Труды МАИ. 2023. № 129
Trudy MAI, 2023, no. 129

Научная статья
УДК 531.36; 531.381
DOI: 10.34759/trd-2023-129-01

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ В ПОТОКЕ ЧАСТИЦ

Максим Магомедович Гаджиев[1], **Александр Сергеевич Кулешов**[2]✉
[1,2]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
[1] maxuta-jr@yandex.ru
[2] kuleshov@mech.math.msu.su✉

Аннотация: Рассматривается задача о движении твердого тела с неподвижной точкой, помещенного в свободный молекулярный поток частиц. Считается, что поток частиц является достаточно разреженным, взаимодействие между частицами отсутствует. Определяются стационарные движения тела в потоке частиц, получены условия их устойчивости.

Ключевые слова: тело с неподвижной точкой, свободный молекулярный поток, стационарные движения, устойчивость

Для цитирования: Гаджиев М.М., Кулешов А.С. Об устойчивости стационарных движений тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: 10.34759/trd-2023-129-01

Original article

STABILITY OF STEADY MOTIONS OF A BODY WITH A FIXED POINT IN A FLOW OF PARTICLES

Maxim M. Gadzhiev[1], **Alexander S. Kuleshov**[2]✉

[1,2] Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

[1] maxuta-jr@yandex.ru

[2] kuleshov@mech.math.msu.su✉

Abstract: The problem of motion of a rigid body with a fixed point in a free molecular flow of particles is considered. Suppose the flow consists of identical non – interacting particles, moving with constant velocity along a fixed direction in a fixed absolute space. Suppose the particles interact absolutely inelastically with the rigid body, i.e. after collision the velocity of a particle with respect to the rigid body is zero. Suppose the surface of the rigid body is strictly convex. Then, under assumption, that the flow velocity considerably exceeds the product of the characteristic value of the angular velocity of the rigid body and the characteristic distance from the rigid body to a fixed point, the explicit expression for the moment, acting on the rigid body with a fixed point from the flow of particles are obtained. It is shown, that equations of motion of the rigid body with a fixed point in a free molecular flow of particles are similar in many aspects to the classical system of equations of motion of a heavy rigid body with a fixed point. The corresponding equations of motion of the rigid body with a fixed point in a free molecular flow of particles have partial solutions for which the rigid body performs permanent rotations with constant angular velocity around the streamlines of the flow. Necessary conditions of stability of these permanent rotations are obtained by analyzing the linearized system. When the rigid body is dynamically symmetric, the necessary and sufficient stability conditions of the corresponding steady motions are obtained by analyzing the effective potential of the system.

Keywords: Rigid Body with a fixed point, Free molecular flow of particles, Steady motions, Stability

For citation: Gadzhiev M.M., Kuleshov A.S. Stability of steady motions of a body with a fixed point in a flow of particles. *Trudy MAI*, 2023. no. 129. DOI: 10.34759/trd-2023-129-01

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении твердого тела, помещенного в поток частиц, вокруг неподвижной точки. Будем предполагать, что поток частиц представляет собой свободный молекулярный поток постоянной плотности ρ, частицы которого движутся поступательно с постоянной скоростью v_0 в направлении, неизменном в неподвижном абсолютном пространстве. Тепловым движением частиц в потоке пренебрегаем. Следуя подходу, предложенному в работах В.В. Белецкого [1, 2] (см. также [3-10]), будем считать, что частицы взаимодействуют с поверхностью твердого тела абсолютно неупруго, то есть после столкновения частицы с телом скорость частицы по отношению к твердому телу равна нулю. Пусть тело ограничено гладкой замкнутой выпуклой поверхностью. Тогда, если произведение характерного значения угловой скорости тела и характерного расстояния от тела до неподвижной точки существенно меньше величины скорости v_0 набегающего на тело потока, то уравнения движения тела можно представить в виде [1-10]:

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \left[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}\right] = -\rho v_0^2 S\left(\boldsymbol{\gamma}\right)\left[\boldsymbol{\gamma} \times \mathbf{c}\left(\boldsymbol{\gamma}\right)\right], \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \left[\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}\right] = 0. \tag{1}$$

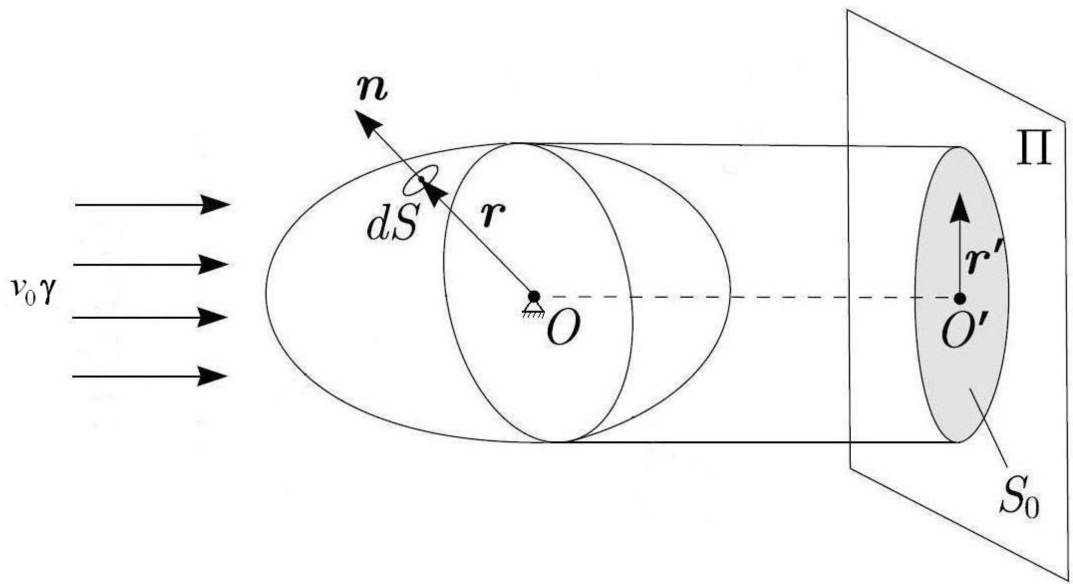

Рис. 1. Твердое тело с неподвижной точкой в потоке частиц.

Здесь $\mathbf{J} = \mathrm{diag}\left(A_1, A_2, A_3\right)$ – тензор инерции тела относительно неподвижной точки O, записанный в системе координат $Ox_1x_2x_3$, оси которой направлены по главным осям инерции в точке O. Единичные базисные векторы соответствующей системы координат в дальнейшем будем обозначать $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ представляет собой вектор абсолютной угловой скорости тела, и в той же системе координат $Ox_1x_2x_3$ он записывается в виде $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3$. Вектор $\boldsymbol{\gamma} = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3$ – это единичный вектор, направленный вдоль набегающего потока. Величина $S\left(\boldsymbol{\gamma}\right)$ – это площадь фигуры S_0 (см. Рис. 1), которая представляет собой ортогональную проекцию тела на плоскость Π, перпендикулярную набегающему потоку, то есть фигура S_0 – это проекция тела на плоскость Π вдоль направления $\boldsymbol{\gamma}$. Вектор $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma}) = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$ – это вектор, который соединяет неподвижную точку с любой точкой прямой $L(\boldsymbol{\gamma})$, параллельной $\boldsymbol{\gamma}$ и проходящей через центроид фигуры S_0, то есть через точку, совпадающую с центром масс однородной пластинки, имеющей форму фигуры S_0 (см. Рис. 1).

2. Стационарные движения тела в потоке частиц. Уравнения (1), описывающие движение твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц, допускают частные решения вида

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{e}, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega\, \mathbf{e}, \tag{2}$$

Частные решения (2) соответствуют перманентным вращениям тела с неподвижной точкой в потоке частиц, когда тело совершает вращение с постоянной угловой скоростью вокруг единичного вектора, задающего направление потока частиц. Здесь $\mathbf{e} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$ – постоянный в связанной с телом системе координат $Ox_1x_2x_3$ единичный вектор, а ω – постоянная скалярная величина (таким образом, имеем: $\dot{\mathbf{e}} = 0,\ \dot{\omega} = 0$). Подставляя частные решения (2) в систему уравнений (1) и учитывая, что $\mathbf{e}$ – единичный вектор, получим, что единичный вектор $\mathbf{e}$ и постоянная ω удовлетворяют системе алгебраических уравнений следующего вида

$$\omega^2 [\mathbf{e} \times \mathbf{J}\mathbf{e}] = -\rho v_0^2 S(\mathbf{e}) [\mathbf{e} \times \mathbf{c}(\mathbf{e})], \quad \mathbf{e}^2 = 1. \tag{3}$$

Умножая векторное уравнение системы (3) скалярно на вектор $\mathbf{J}\mathbf{e}$, заключаем, что для существования перманентных вращений (2) вектор $\mathbf{e}$ необходимо должен удовлетворять двум скалярным алгебраическим уравнениям

$$\left(\mathbf{Je}\cdot\left[\mathbf{e}\times\mathbf{c}(\mathbf{e})\right]\right)=0,\quad \mathbf{e}^2=1. \tag{4}$$

Первое уравнение системы (4) определяет в пространстве $\mathbf{R}^3$ некоторую коническую поверхность, а совокупность первого и второго уравнения этой системы задает на сфере Пуассона $\mathbf{S}^2\subset\mathbf{R}^3$ соответствующие кривые кинематически возможных осей перманентных вращений. Динамически допустимыми среди этих осей будут те оси, для которых из первого векторного уравнения системы (3) следует, что $\omega^2\geq 0$. Умножая обе части первого уравнения системы (3) скалярно на вектор $\left[\mathbf{c}(\mathbf{e})\times\mathbf{e}\right]$, получим соотношение

$$\omega^2\left(\left[\mathbf{e}\times\mathbf{Je}\right]\cdot\left[\mathbf{c}(\mathbf{e})\times\mathbf{e}\right]\right)=\rho v_0^2 S(\mathbf{e})\left[\mathbf{e}\times\mathbf{c}(\mathbf{e})\right]^2\geq 0. \tag{5}$$

Таким образом, динамически допустимые оси перманентных вращений должны удовлетворять неравенству

$$\left(\left[\mathbf{e}\times\mathbf{Je}\right]\cdot\left[\mathbf{c}(\mathbf{e})\times\mathbf{e}\right]\right)\geq 0, \tag{6}$$

которое определяет некоторое подмножество множества (4). Для каждой кинематически и динамически допустимой оси перманентных вращений, удовлетворяющей соотношениям (4) и неравенству (6), абсолютная величина ω угловой скорости вращения определяется из уравнения (5).

Предположим, что в системе координат $Ox_1x_2x_3$ вектор $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$ имеет вид:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})=c_3(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{e}_z=\left(0,\ 0,\ c_3(\boldsymbol{\gamma})\right). \tag{7}$$

В частности, такой вектор $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$ получается при обтекании потоком частиц осесимметричного тела (см. [8-10]). Тогда система уравнений (1) в скалярной форме запишется следующим образом:

$$A_1\dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2)\omega_2\omega_3 = -\rho v_0^2 \gamma_2 S(\boldsymbol{\gamma}) c_3(\boldsymbol{\gamma}), \quad A_2\dot{\omega}_2 + (A_1 - A_3)\omega_1\omega_3 = \rho v_0^2 \gamma_1 S(\boldsymbol{\gamma}) c_3(\boldsymbol{\gamma}),$$
$$A_3\dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2 = 0, \tag{8}$$
$$\dot{\gamma}_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае, когда вектор $\mathbf{c}(\boldsymbol{\gamma})$ имеет довольно простой вид (7), уравнения (8) не обязательно обладают первым интегралом типа энергии. Для существования у системы уравнений (8) первого интеграла типа энергии достаточно, чтобы произведение $S(\boldsymbol{\gamma})c_3(\boldsymbol{\gamma})$ было функцией только γ_3. Ниже мы рассмотрим такой случай, а пока будем рассматривать общий вид системы уравнений (8).

Легко убедиться, что если уравнения движения твердого тела в потоке частиц имеют вид (8), то частные решения (2), соответствующие перманентным вращениям, для этой системы записываются следующим образом:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = \gamma_{30} = \pm 1; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega = \mathrm{const}. \tag{9}$$

Исследуем устойчивость перманентных вращений твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц. Существуют различные методы исследования устойчивости равновесий и стационарных движений голономных и неголономных механических систем [11-20]. Мы получим необходимые условия устойчивости перманентных вращений (9) путем анализа корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения [15-17].

В возмущенном движении положим

$$\gamma_3 = \gamma_{30} + z, \quad \omega_3 = \omega + y,$$

а для остальных переменных сохраним их прежние обозначения. Тогда уравнения возмущенного движения запишутся следующим образом:

$$\dot{\omega}_1 + \frac{(A_3 - A_2)}{A_1}\omega\omega_2 + \frac{\rho v_0^2 S_0 c_{30}}{A_1}\gamma_2 = \Omega_1, \quad \dot{\omega}_2 + \frac{(A_1 - A_3)}{A_2}\omega\omega_1 - \frac{\rho v_0^2 S_0 c_{30}}{A_2}\gamma_1 = \Omega_2,$$
$$\dot{\gamma}_1 - \omega\gamma_2 + \gamma_{30}\omega_2 = \Gamma_1, \quad \dot{\gamma}_2 + \omega\gamma_1 - \gamma_{30}\omega_1 = \Gamma_2, \quad \dot{y} = Y, \quad \dot{z} = Z. \tag{10}$$

Здесь Ω_i, Γ_i, $(i=1,2)$, Y и Z – функции, зависящие от ω_j, γ_j, $(j=1,2)$, y и z, разложения которых по степеням указанных переменных начинаются с членов не ниже второго порядка, причем все эти функции тождественно по y и z уничтожаются при $\omega_j = 0$, $\gamma_j = 0$, $(j=1,2)$. Через S_0 и c_{30} обозначены выражения

$$S_0 = S(0,\ 0,\ \gamma_{30}), \quad c_{30} = c_3(0,\ 0,\ \gamma_{30}).$$

Характеристическое уравнение, отвечающее линеаризованной системе, которая получается из системы (10) отбрасыванием правых частей, имеет вид:

$$\lambda^2\left(\kappa_0\lambda^4 + \kappa_1\lambda^2 + \kappa_2\right) = 0,$$
$$\kappa_0 = A_1A_2 > 0, \quad \kappa_1 = \left(A_1A_2 + (A_3 - A_2)(A_3 - A_1)\right)\omega^2 + \rho v_0^2 (A_1 + A_2) S_0 c_{30}\gamma_{30},$$
$$\kappa_2 = \left((A_3 - A_2)\omega^2\gamma_{30} + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\right)\left((A_3 - A_1)\omega^2\gamma_{30} + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\right).$$

Это уравнение имеет два нулевых корня. Один из них обусловлен однопараметричностью семейства перманентных вращений (9) (свободный параметр – ω), а другой – наличием геометрического интеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$. Следовательно, условия, при которых все корни уравнения

$$\kappa_0\lambda^4 + \kappa_1\lambda^2 + \kappa_2 = 0,$$

являются чисто мнимыми, представляют собой необходимые условия устойчивости перманентных вращений (9). Эти условия имеют вид

$$\kappa_1 > 0, \quad \kappa_2 > 0, \quad \kappa_1^2 - 4\kappa_0\kappa_2 > 0. \tag{11}$$

Поскольку по условию должно быть $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0$, следовательно, условия (11) могут быть приведены к системе двух условий

$$\kappa_2 > 0, \quad \kappa_1 > 2\sqrt{\kappa_0\kappa_2}.$$

В явном виде соответствующие условия записываются следующим образом:

$$\left(\left(A_3 - A_2\right)\omega^2 + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30}\right)\left(\left(A_3 - A_1\right)\omega^2 + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30}\right) > 0, \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\left(A_1A_2 + \left(A_3 - A_2\right)\left(A_3 - A_1\right)\right)\omega^2 + \rho v_0^2\left(A_1 + A_2\right)S_0c_{30}\gamma_{30} > \\ > 2\sqrt{A_1A_2\left(\left(A_3 - A_2\right)\omega^2 + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30}\right)\left(\left(A_3 - A_1\right)\omega^2 + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30}\right)}.\end{gathered} \tag{13}$$

Если тело с неподвижной точкой, омываемое потоком частиц, является динамически симметричным, то есть $A_1 = A_2$, неравенства (12) и (13) упрощаются и принимают вид:

$$\left(\left(A_3 - A_1\right)\omega^2 + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30}\right)^2 > 0, \tag{14}$$

$$\left(A_1^2 + \left(A_3 - A_1\right)^2\right)\omega^2 + 2\rho v_0^2 A_1 S_0 c_{30}\gamma_{30} > 2A_1\sqrt{\left(\left(A_3 - A_1\right)\omega^2 + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30}\right)^2}. \tag{15}$$

В этом случае, если

$$\left(A_3 - A_1\right)\omega^2 + \rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30} \neq 0, \quad 2A_1 \neq A_3,$$

то очевидно, что неравенство (14) всегда выполняется. Неравенство (15) после возведения в квадрат обеих частей данного неравенства приводится к виду:

$$\left(2A_1 - A_3\right)^2\omega^2\left(A_3^2\omega^2 + 4A_1\rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30}\right) > 0.$$

Таким образом, неравенство (15) в этом случае равносильно неравенству

$$A_3^2\omega^2 > -4A_1\rho v_0^2 S_0 c_{30}\gamma_{30}. \tag{16}$$

Условие (16) является аналогом условия Маиевского – Четаева [15-17] в задаче о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц.

3. Стационарные движения динамически симметричного тела в потоке частиц.

Теперь рассмотрим случай динамически симметричного тела $A_1 = A_2$, ограниченного поверхностью вращения, ось симметрии которой совпадает с осью динамической симметрии. В этом случае (см. [8-10])

$$S(\boldsymbol{\gamma}) = S(\gamma_3), \quad c_3(\boldsymbol{\gamma}) = c_3(\gamma_3)$$

и система уравнений (8) допускает первые интегралы

$$U_0 = \frac{A_1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \frac{A_3}{2}\omega_3^2 - \rho v_0^2 \int_0^{\gamma_3} S(\gamma_3) c_3(\gamma_3) d\gamma_3 = k_0 = \text{const}, \tag{17}$$

$$U_1 = A_1\left(\omega_1\gamma_1 + \omega_2\gamma_2\right) + A_3\omega_3\gamma_3 = k_1 = \text{const}, \tag{18}$$

$$U_2 = \omega_3 = k_2 = \text{const}. \tag{19}$$

В рассматриваемом случае система уравнений (8) допускает квадратичный по обобщенным скоростям первый интеграл типа энергии (17) и два линейных по обобщенным скоростям первых интеграла (18), (19). Следовательно, при изучении стационарных движений данной системы можно воспользоваться модифицированной теорией Рауса для голономных систем с известными первыми интегралами [16-20]. Согласно этой теории, критическим значениям одного из интегралов системы при фиксированных значениях постоянных других интегралов отвечают стационарные движения рассматриваемой системы, причем экстремальным значениям – устойчивые стационарные движения. Само существование первых интегралов связано с наличием тех или иных симметрий в системе. В частности, существование линейных по скоростям интегралов связано с наличием непрерывных групп симметрий. Процедура применения теории Рауса для исследования механических систем, допускающих непрерывные группы симметрий, существенно упрощается и сводится, как известно [16-20], к анализу эффективного потенциала системы.

Для построения эффективного потенциала в данной задаче мы должны найти минимум выражения (17) по переменным ω_1, ω_2, ω_3 на фиксированных уровнях интегралов (18) и (19). Заметим, что данные интегралы будут зависимы на полюсах $P_{\pm}$ $\left(\gamma_3 = \gamma_{30}\right)$ сферы Пуассона $\mathbf{S}^2$. Действительно, для полюсов $P_{\pm}$ имеем:

$$U_1 = A_3 \omega \gamma_{30} = k_1, \qquad U_2 = \omega = k_2$$

и поэтому на полюсах

$$A_3 k_2 \gamma_{30} = k_1.$$

В соответствии с [16-20], если интегралы (18) и (19) независимы, то есть если $k_1 \neq A_3 k_2 \gamma_{30}$, то эффективный потенциал может быть представлен следующим образом

$$W_{k_1,k_2}\left(\gamma_3\right) = \frac{\left(k_1 - A_3 k_2 \gamma_3\right)^2}{2A_1\left(1-\gamma_3^2\right)} - \rho v_0^2 \int\limits_0^{\gamma_3} S\left(\gamma_3\right) c_3\left(\gamma_3\right) d\gamma_3 .$$

Если $k_1 = k_{1+} = A_3 k_2$ (случай полюса P_+, $\gamma_3 = 1$), тогда эффективный потенциал имеет вид

$$W_{k_{1+},k_2}\left(\gamma_3\right) = \frac{A_3^2 k_2^2 \left(1-\gamma_3\right)}{2A_1\left(1+\gamma_3\right)} - \rho v_0^2 \int\limits_0^{\gamma_3} S\left(\gamma_3\right) c_3\left(\gamma_3\right) d\gamma_3 . \qquad (20)$$

Аналогично, если $k_1 = k_{1-} = -A_3 k_2$ (случай полюса P_-, $\gamma_3 = -1$), тогда эффективный потенциал имеет вид

$$W_{k_{1-},k_2}(\gamma_3) = \frac{A_3^2 k_2^2 (1+\gamma_3)}{2A_1(1-\gamma_3)} - \rho v_0^2 \int_0^{\gamma_3} S(\gamma_3) c_3(\gamma_3) d\gamma_3 . \qquad (21)$$

Функция (20) не имеет особенностей в окрестности полюса P_+, $\gamma_3 = 1$ сферы Пуассона. Аналогично, функция (21) не имеет особенностей в окрестности полюса P_-, $\gamma_3 = -1$. Эти полюсы соответствуют перманентным вращениям (9) динамически симметричного тела в потоке частиц. Если $\gamma_3 = 1$, то соответствующие перманентные вращения будут устойчивы (неустойчивы) при выполнении условия [16-20]

$$\left.\frac{dW_{k_1+,k_2}}{d\gamma_3}\right|_{\gamma_3=1} < 0 \quad (>0),$$

то есть когда выполняется неравенство

$$-\frac{A_3^2\omega^2}{4A_1} - \rho v_0^2 S(0,\ 0,\ 1) c_3(0,\ 0,\ 1) < 0 \quad (>0).$$

Данное неравенство можно переписать в виде

$$A_3^2\omega^2 > -4\rho v_0^2 A_1 S(0,\ 0,\ 1) c_3(0,\ 0,\ 1) \quad \left(A_3^2\omega^2 < -4\rho v_0^2 A_1 S(0,\ 0,\ 1) c_3(0,\ 0,\ 1)\right). \quad (22)$$

Легко видеть, что если $c_3(0,\ 0,\ 1) > 0$, то данное неравенство выполняется при любом значении угловой скорости ω. Иными словами, перманентные вращения (9) тела с неподвижной точкой в потоке частиц будут устойчивы при любом значении угловой скорости, если тело ориентировано «по потоку» частиц.

Если $\gamma_3 = -1$, то соответствующие перманентные вращения будут устойчивы (неустойчивы) при выполнении условия

$$\left.\frac{dW_{k_1-,k_2}}{d\gamma_3}\right|_{\gamma_3=-1} > 0 \quad (<0),$$

то есть когда выполняется неравенство

$$\frac{A_3^2\omega^2}{4A_1} - \rho v_0^2 S\left(0,\ 0,\ -1\right)c_3\left(0,\ 0,\ -1\right) > 0 \quad (<0).$$

Данное неравенство можно переписать в виде

$$A_3^2\omega^2 > 4\rho v_0^2 A_1 S\left(0,\ 0,\ -1\right)c_3\left(0,\ 0,\ -1\right)\ \left(A_3^2\omega^2 < 4\rho v_0^2 A_1 S\left(0,\ 0,\ -1\right)c_3\left(0,\ 0,\ -1\right)\right). \quad (23)$$

Легко видеть, что можно записать условия (22) и (23) в виде одного неравенства (16). Таким образом, неравенство типа Маиевского – Четаева (16) служит необходимым и достаточным условием устойчивости перманентных вращений (9) геометрически и динамически симметричного тела в потоке частиц.

При произвольных значениях постоянных k_1 и k_2 первых интегралов (18) и (19) система уравнений (8) имеет также двухпараметрическое семейство решений

$$\omega_1 = \omega\gamma_1,\ \omega_2 = \omega\gamma_2,\ \omega_3 = \omega\cos\theta + \Omega,\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2 = \sin^2\theta,\ \gamma_3 = \cos\theta, \quad (24)$$

где постоянные ω и Ω находятся из системы уравнений

$$A_1\omega\sin^2\theta + A_3\left(\omega\cos\theta + \Omega\right)\cos\theta = k_1, \quad \omega\cos\theta + \Omega = k_2,$$

а угол θ – из уравнения

$$\frac{dW}{d\theta} = 0, \quad (25)$$

где обозначено

$$W(\theta)=W_{k_1,k_2}(\gamma_3)\Big|_{\gamma_3=\cos\theta}=\frac{\left(k_1-A_3k_2\cos\theta\right)^2}{2A_1\sin^2\theta}-\rho v_0^2\int\limits_0^{\cos\theta}S(\gamma_3)c_3(\gamma_3)d\gamma_3\,.$$

Решениям уравнения $dW/d\theta=0$ отвечают параллели

$$P_\theta=\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2=\sin^2\theta,\quad \gamma_3=\cos\theta\right)$$

сферы Пуассона, а решениям (24) – регулярные прецессии динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц: тело вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси динамической симметрии, которая, в свою очередь, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг единичного вектора $\boldsymbol{\gamma}$ направления потока, "омывающего" тело. При этом угол между осью динамической симметрии тела и вектором $\boldsymbol{\gamma}$ равен $\theta=\arccos\gamma_3$.

Уравнение (25) в явном виде записывается следующим образом:

$$\frac{\left(k_1-A_3k_2\cos\theta\right)\left(A_3k_2-k_1\cos\theta\right)}{A_1\sin^3\theta}+f\,S(\cos\theta)c_3(\cos\theta)\sin\theta=0\,.$$

Условие устойчивости стационарных движений (24) (необходимое и достаточное с точностью до знака равенства), имеет вид

$$\frac{d^2W}{d\theta^2}\geq 0\,,$$

при этом угол θ должен удовлетворять уравнению (25). Очевидно, что для получения каких-то более определенных выводов об устойчивости стационарных движений (31), нам следует в явном виде определить поверхность, ограничивающую твердое тело с неподвижной точкой, помещенное в поток частиц.

Заключение. В данной работе была исследована устойчивость стационарных движений (перманентных вращений и регулярных прецессий) твердого тела с неподвижной точкой, находящегося в свободном молекулярном потоке частиц. Необходимые условия устойчивости перманентных вращений динамически несимметричного тела получены путем анализа корней характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений возмущенного движения. Путем анализа эффективного потенциала получены необходимые и достаточные условия устойчивости перманентных вращений и регулярных прецессий динамически симметричного твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц.

Список источников

1. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. - М.: Наука, 1965. - 416 с.

2. Белецкий В.В., Яншин А.М. Влияние аэродинамических сил на вращательное движение искусственных спутников. - Киев: Наукова думка, 1984. - 187 с.

3. Баранцев Р.Г., Цжень-юй У. Силы и моменты, действующие на тела вращения в свободномолекулярном потоке // Вестник Ленинградского университета. 1961. № 13. С. 79-92.

4. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженного газа с обтекаемыми поверхностями. - М.: Наука, 1975. - 344 с.

5. Карымов А.А. Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26. № 5. С. 867-876.

6. Карымов А.А. Устойчивость вращательного движения геометрически симметричного искусственного спутника в поле сил светового давления // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 5. С. 923-930.

7. Буров А.А., Карапетян А.В. О движении твердого тела в потоке частиц // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. № 2. С. 77-81.

8. Гаджиев М.М., Кулешов А.С. О движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2022. № 3. С. 58-68.

9. Кулешов А.С., Гаджиев М.М. Задача о движении твердого тела с неподвижной точкой в потоке частиц // Вестник Санкт–Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9. № 3. С. 550-560.

10. Gadzhiev M.M., Kuleshov A.S. Nonintegrability of the Problem of the Motion of an Ellipsoidal Body with a Fixed Point in a Flow of Particles // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2022, vol. 18, no. 4, pp. 629-637. DOI: https://doi.org/10.20537/nd221216

11. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=65212

12. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL:https://trudymai.ru/published.php?ID=72568

13. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего

порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=93292

14.Майоров А.Ю., Байков А.Е. Исследование устойчивости положения равновесия трёхзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=56875

15. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. - М.: Наука, 1990. - 175 с.

16. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. - М.: Эдиториал URSS, 1998. - 168 с.

17. Карапетян А.В. Устойчивость и бифуркация движений. - М.: Изд-во Московского университета, 2020. - 186 с.

18. Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. Неголономные механические системы и стабилизация движения // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т. 11. № 7. С. 117-158.

19. Karapetyan A.V. On construction of the effective potential in singular cases // Regular and Chaotic Dynamics, 2000, vol. 5, no. 2, pp. 219-224. DOI:10.1070/rd2000v005n02ABEH000144

20. Karapetyan A.V., Kuleshov A.S. Steady Motions of Nonholonomic Systems // Regular and Chaotic Dynamics, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 81-117. DOI:10.1070/RD2002v007n01ABEH000198

References

1. Beletskii V.V. *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* (Motion of an Artificial Satellite about Its Center of Mass), Moscow, Nauka, 1965, 416 p.

2. Beletskii V.V., Yanshin A.M. *Vliyanie aerodinamicheskikh sil na vrashchatel'noe dvizhenie iskusstvennykh sputnikov* (The Effect of Aerodynamic Forces on the Rotational Motion of Artificial Satellites), Kiev, Naukova dumka, 1984, 187 p.

3. Barantsev R.G., Tszhen'-yui U. *Vestnik Leningradskogo universiteta*, 1961, no. 13, pp. 79-92.

4. Barantsev R.G. *Vzaimodeistvie razrezhennogo gaza s obtekaemymi poverkhnostyami* (The Interaction of Rarefied Gases with Streamlined Surfaces), Moscow, Nauka, 1975, 344 p.

5. Karymov A.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1962, vol. 26, no. 5, pp. 867-876.

6. Karymov A.A. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1964, vol. 28, no. 5, pp. 923-930.

7. Burov A.A., Karapetyan A.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1993, vol. 57, no. 2, pp. 77-81.

8. Gadzhiev M.M., Kuleshov A.S. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 2022, no. 3, pp. 58-68.

9. Kuleshov A.S., Gadzhiev M.M. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika. Astronomiya*. 2022, vol. 9, no. 3, pp. 550-560.

10. Gadzhiev M.M., Kuleshov A.S. Nonintegrability of the Problem of the Motion of an Ellipsoidal Body with a Fixed Point in a Flow of Particles, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics,* 2022, vol. 18, no. 4, pp. 629-637. DOI: https://doi.org/10.20537/nd221216

11. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212

12. Bardin B.S., Chekina E.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL:https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72568

13. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI,* 2018, no. 100. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93292

14. Maiorov A.Yu., Baikov A.E. *Trudy MAI*, 2015, no. 80. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=56875

15. Chetaev N.G. *Ustoichivost' dvizheniya* (The Stability of Motion*)*, Moscow, Nauka, 1990, 175 p.

16. Karapetyan A.V. *Ustoichivost' statsionarnykh dvizhenii (The Stability of Steady Motions)*, Moscow, Editorial URSS, 1998, 168 p.

17. Karapetyan A.V. *Ustoichivost' i bifurkatsiya dvizhenii* (The Stability and Bifurcation of Motions), Moscow, Izd-vo Moskovskogo universiteta, 2020, 186 p.

18. Kalenova V.I., Karapetyan A.V., Morozov V.M., Salmina M.A. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika,* 2005, vol. 11, no. 7, pp. 117-158.

19. Karapetyan A.V. On construction of the effective potential in singular cases, *Regular and Chaotic Dynamics,* 2000, vol. 5, no. 2, pp. 219-224. DOI:10.1070/rd2000v005n02ABEH000144

20. Karapetyan A.V., Kuleshov A.S. Steady Motions of Nonholonomic Systems, *Regular and Chaotic Dynamics*, 2002, vol. 7, no. 1, pp. 81-117. DOI:10.1070/RD2002v007n01ABEH000198

Статья поступила в редакцию 17.03.2023

Одобрена после рецензирования 23.03.2023

Принята к публикации 27.04.2023

The article was submitted on 17.03.2023; approved after reviewing on 23.03.2023; accepted for publication on 27.04.2023