УДК 519.632.4 

# УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Владимир Николаевич БАКУЛИН родился в 1949 г. в городе Новомосковске Тульской области. Ведущий научный сотрудник Института прикладной механики РАН. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник. Основные научные интересы — в области механики, численных методов, вычислительной механики, математического моделирования. Автор более 170 научных работ. E-mail: vbak@yandex.ru.

Vladimir N. BAKULIN, Ph.D., was born in 1949, in the Tula Region. He is a Principal Research Associate at the Institute of Applied Mechanics RAS. His research interests are in mechanics, numerical methods, computational mechanics, mathematical modeling. He has published over 170 technical papers. E-mail: vbak@yandex.ru

Сергей Иванович МАРТЫНЕНКО родился в 1965 г. в городе Балашихе Московской области. Научный сотрудник ФГУП ЦИАМ им. П.И. Баранова. Кандидат физико-математических наук. Основные научные интересы — в области вычислительной гидродинамики, математического моделирования, численных методов. Автор 18 научных работ. E-mail:martyn_s@mail.ru

Sergey I. MARTYNENKO, Ph.D., was born in 1965, in the Moscow Region. He is a Research Associate at the P.I. Baranov Central Institute of Aviation Motors (CIAM). His research interests are in computational hydrodynamics, mathematical modeling, numerical methods. He has published 18 technical papers. E-mail:martyn_s@mail.ru

*Статья посвящена проблеме создания вычислительной технологии для решения широкого класса прикладных задач. Данная технология предназначена для перспективного программного обеспечения, устроенного по принципу «черного ящика».*

*A problem statement is suggested to solve a broad class of application problems. The problem associates with computing technology development providing advanced black-box type software generation to solve continuum mechanics problems.*

**Ключевые слова:** универсальная многосеточная технология, численные решения, задачи механики сплошной среды, программное обеспечение.

**Key words:** robust multigrid technique, numerical solutions, continuum mechanics problems, software.

## Введение

В настоящее время широкое распространение получили автономные программы (устроенные по принципу «черного ящика»), используя которые инженер только формулирует задачу, а детали вычислительного алгоритма ему могут быть даже не известны. Применительно к техническим приложениям работу автономных программ упрощенно можно представить следующим образом: конструктор проектирует некоторый узел при помощи графической программы, например AutoCAD. Затем геометрия узла переносится в вычислительный модуль, конструктор задает граничные и начальные условия, после чего проводит тепловой, прочностной, гидродинамический или другой расчет и анализирует результаты. Как правило, после анализа полученных результатов нужно внести изменения в конструкцию и повторить расчет [1]. Обычно конструктор выполняет несколько подобных итераций, чтобы получить оптимальную, с его точки зрения, конструкцию. Еще большую практическую ценность будет представлять возможность расчета машины в целом, а не только отдельных ее узлов, поскольку поэлементное моделирование часто связано с погрешностями постановки граничных условий.

Однако широкому внедрению методологии математического моделирования в расчетную практику в машиностроении препятствует несовершенство методов вычислений. Применение традиционных численных методов подразумевает возможность контроля математиком хода вычислительного процесса и внесения изменений в написанную им же программу. Ранее такой подход был оправдан, но с появлением мощных персональных компьютеров возникла острая потребность в новых вычислительных методах, обладающих достаточной точностью, эффективностью, высоким уровнем формализации и параллелизма без контроля со стороны пользователя. Уже сейчас такие программные продукты, как ANSYS, STAR-CD, FLUENT, CFX, PHOENICS, и др. получили широкое применение в НИИ и ОКБ для решения разнообразных прикладных задач. Конечно, подобные программные средства еще далеки от совершенства и часто вызывают обоснованные претензии пользователей, что обусловлено использованием в них традиционных численных методов.

Разработка универсальной многосеточной технологии (УМТ) для перспективного программного обеспечения началась в 90-е годы [2—7]. УМТ определяется как наиболее рациональная организация вычислений при решении краевых задач без контроля хода вычислительного процесса пользователем автономной программы.

## 1. Постановка задачи о создании универсального алгоритма

Сформулируем задачу о построении универсального алгоритма для автономных программных продуктов. Пусть дана исходная дифференциальная задача

$$L(u) = f(x),$$

где $x \in \Omega$, $\Omega$ — область $N$-мерного пространства; $f(x)$ — заданная функция; $L$ — (не)линейный дифференциальный оператор. Полагается, что граничные условия учтены оператором $L$ и правой частью $f(x)$. В области $\Omega$ строится сетка и/или триангуляция, на которой осуществляется контрольно-объемная и/или конечно-элементная аппроксимация дифференциальной задачи. Обозначим результирующую систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученную в результате аппроксимации, как

$$Ax = b.$$

Предположим, что имеется множество итерационных методов $\Upsilon$, при помощи которых можно решить полученную СЛАУ. Тогда задача о построении универсального алгоритма состоит в отыскании такой стратегии применения итерационных методов из множества $\Upsilon$ к решению СЛАУ $Ax = b$, которая позволит достичь скорости сходимости, близкой к оптимальной, т.е. для численного решения краевых задач нужно выполнить $O(N \lg^k N)$ арифметических операций, где $N$ — число неизвестных, $k$ =1, 2.

При этом на универсальный алгоритм накладываются следующие ограничения:

1. *Минимальное использование ресурсов компьютера.* Темпы развития современных математических моделей опережают совершенствование аппаратной части вычислительной техники. Поэтому в отдельных случаях ресурсы компьютера могут быть задействованы преимущественно для хранения разностной задачи, а не промежуточных вычислений. Минимальный объем хранимых данных составит $\sim 2N$ вещественных чисел, т.е. в оперативной памяти могут размещаться только векторы $x$ и $b$ результирующей СЛАУ. В общем случае матрицу коэффициентов $A$ хранить не имеет смысла, поскольку ее элементы будут пересчитываться после каждой итерации по нелинейности. Большинство реальных процессов описывается нелинейными уравнениями, и лишь в первом приближении эти уравнения можно заменить линейными [8]. Рациональное использование ресурсов компьютера позволит применять достаточно мелкие вычислительные сетки для численного решения краевых задач в автономных программах.

2. *Возможность изменения способа и/или порядка аппроксимации в процессе решения задачи.*

3. *Отсутствие проблемно-зависимых компонент.* В универсальном алгоритме не допускается применение компонент, которые зависят от решаемой задачи и обеспечивают высокую скорость сходимости. Однако возможно использование проблемно-зависимых параметров (например, верхней и/или нижней релаксации) при условии, что существует эффективная методика определения их оптимальных значений без контроля со стороны пользователя.

4. *Возможность эффективного распараллеливания вычислений вне зависимости от используемых итерационных методов из множества* $\Upsilon$.

По-видимому, отсутствие проблемно-зависимых компонент в универсальном алгоритме не позволит достичь оптимальной скорости сходимости ($k = 0$), хотя этот факт не доказан. Поэтому оценка максимального проигрыша в эффективности является основным вопросом в сравнении узкоспециализированных и универсальных алгоритмов.

## 2. Основополагающие идеи УМТ

УМТ основана на адаптации краевых задач к вычислительному алгоритму, поэтому технология состоит из двух частей: аналитической и вычислительной [2]. Основное назначение аналитической части УМТ заключается в приведении краевых задач к виду, удобному для последующего численного решения унифицированным многосеточным методом. В отличие от классических многосеточных методов, индивидуальные особенности краевых задач проявляются не в выборе проблемно-зависимых компонент, а в способе адаптации краевых задач к УМТ. Ряд новых конструктивных решений и априорная аналитическая адаптация краевых задач позволили исключить проблемно-зависимые компоненты из вычислительной части УМТ для ее последующей формализации и использования в автономном обеспечении [5].

Другой отличительной чертой УМТ является построение грубых сеток, которые обладают следующими свойствами:

1) каждый контрольный объем на сетках более мелких сетках представим в виде объединения $3^N$ ($N = 2, 3$) контрольных объемов на более грубых сетках, что в сочетании со свойством аддитивности определенного интеграла относительно подобластей при использовании интегро-интерполяционного метода аппроксимации краевых задач позволит существенно расширить класс краевых задач, решаемых унифицированным образом;

2) каждая сетка представима в виде объединения $3^N$ соответствующих ей грубых сеток, что позволит исключить интерполяцию из УМТ;

3) сетки одного уровня не имеют общих точек, что позволит эффективно распараллеливать вычисления и экономно использовать память компьютера.

В качестве примера приведем результаты численного решения следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda^x(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda^y(u)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda^z(u)\frac{\partial u}{\partial z}\right)= =-f(x,y,z); \qquad (1)$$

$$u(0,y,z)=e^{2y+3z};\quad u(1,y,z)=e^{1+2y+3z};$$
$$u(x,0,z)=e^{x+3z};\quad u(x,1,z)=e^{x+2+3z};$$
$$u(x,y,0)=e^{x+2y};\quad u(x,y,1)=e^{x+2y+3}.$$

В случае если $\lambda^x(u)=u^{-\alpha}$, $\lambda^y(u)=u^{-\beta}$ и $\lambda^z(u)=u^{-\gamma}$, точное решение данной краевой задачи имеет вид $u^a(x,y,z)=e^{x+2y+3z}$. Поставленная задача является модельной по отношению к нелинейным задачам теплопроводности в анизотропных средах. Коэффициенты $\alpha, \beta$ и $\gamma$ предназначены для иллюстрации негативного влияния анизотропии среды на скорость сходимости итерационных методов.

Выберем в качестве начального приближения

$$u^{(0)}(x,y,z)=0 \text{ и } \lambda^x(u^{(0)})=1,$$
$$\lambda^y(u^{(0)})=1,\ \lambda^z(u^{(0)})=1.$$

Вычисления проводились на равномерной сетке $101\times101\times101$. В качестве сглаживающей процедуры выбран метод Зейделя с точечным упорядочиванием неизвестных, т.е. рассматривался один из самых медленных вариантов УМТ.

В качестве критериев оценки точности численного решения выберем:

1) относительную норму вектора невязки

$$R=\frac{\| Au-b\|}{\| b\|};$$

2) погрешность численного решения

$$E=\max_{i,j,k}|u_{ijk}-u^a|.$$

Для выбранного начального приближения $u^{(0)}(x,y,z)=0$ данные параметры равны $R^{(0)}=1$ и $E^{(0)}\approx e^6$. Результаты вычислительного эксперимента приведены в табл. 1, где $T$ — время решения (в секундах) модельной задачи на компьютере с процессором Intel Pentium IV Celeron с тактовой частотой 2 ГГц, полученного после выполнения четырех многосеточных итераций.

Сравнение этих результатов со случаем $\alpha=\beta=\gamma=0$ (линейное изотропное уравнение) показывает, что нелинейность и анизотропия не оказывают существенного влияния на скорость сходимости УМТ.

В прикладных задачах коэффициенты $\lambda^x, \lambda^y$ и $\lambda^z$ могут быть разрывными. Предположим, что область $\Omega$, которая является единичным кубом, состоит из двух материалов с коэффициентами теплопроводности $\lambda_i$ во внутренней подобласти $\tilde{\Omega}$ размера $1/3\times1/3\times1/3$ и $\lambda_e$. Вычислительный эксперимент предназначен для решения уравнения (1), где коэффициент теплопроводности принимает вид

$$\lambda^x=\lambda^y=\lambda^z=\begin{cases}\lambda_i, & (x,y,z)\in\tilde{\Omega};\\ \lambda_e, & (x,y,z)\notin\tilde{\Omega}.\end{cases} \qquad (2)$$

Разрывность коэффициента теплопроводности осложняет построение многосеточных алгоритмов [9, 10]. Известно, что полиномиальная интерполяция через поверхности разрыва коэффициентов приводит к большим погрешностям и, как следствие, к потере вычислительной эффективности алгоритма. Отсутствие интерполяции в УМТ позво-

*Таблица 1*

**Результаты вычислительного эксперимента при решении краевой задачи для уравнения (1)**

| α | β | γ | $R$ | $E$ | $T$,с |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,00 | 0,00 | $4{,}423\cdot10^{-9}$ | $1{,}766\cdot10^{-3}$ | 551 |
| 0,00 | 0,00 | 0,25 | $4{,}622\cdot10^{-8}$ | $8{,}451\cdot10^{-4}$ | 555 |
| 0,00 | 0,00 | 0,50 | $2{,}075\cdot10^{-5}$ | $6{,}700\cdot10^{-4}$ | 556 |
| 0,00 | 0,25 | 0,00 | $2{,}555\cdot10^{-8}$ | $2{,}078\cdot10^{-3}$ | 556 |
| 0,00 | 0,25 | 0,25 | $4{,}631\cdot10^{-8}$ | $6{,}961\cdot10^{-4}$ | 561 |
| 0,00 | 0,25 | 0,50 | $5{,}376\cdot10^{-7}$ | $2{,}714\cdot10^{-4}$ | 560 |
| 0,00 | 0,50 | 0,00 | $9{,}241\cdot10^{-6}$ | $2{,}499\cdot10^{-3}$ | 556 |
| 0,00 | 0,50 | 0,25 | $3{,}099\cdot10^{-7}$ | $7{,}577\cdot10^{-4}$ | 560 |
| 0,00 | 0,50 | 0,50 | $6{,}840\cdot10^{-7}$ | $1{,}781\cdot10^{-4}$ | 560 |
| 0,25 | 0,00 | 0,00 | $1{,}521\cdot10^{-8}$ | $2{,}131\cdot10^{-3}$ | 554 |
| 0,25 | 0,00 | 0,25 | $2{,}408\cdot10^{-8}$ | $1{,}055\cdot10^{-3}$ | 560 |
| 0,25 | 0,00 | 0,50 | $4{,}981\cdot10^{-7}$ | $8{,}569\cdot10^{-4}$ | 561 |
| 0,25 | 0,25 | 0,00 | $1{,}310\cdot10^{-8}$ | $2{,}618\cdot10^{-3}$ | 562 |
| 0,25 | 0,25 | 0,25 | $1{,}633\cdot10^{-8}$ | $9{,}347\cdot10^{-4}$ | 566 |
| 0,25 | 0,25 | 0,50 | $1{,}110\cdot10^{-7}$ | $3{,}436\cdot10^{-4}$ | 567 |
| 0,25 | 0,50 | 0,00 | $2{,}547\cdot10^{-7}$ | $3{,}260\cdot10^{-3}$ | 562 |
| 0,25 | 0,50 | 0,25 | $4{,}912\cdot10^{-8}$ | $1{,}083\cdot10^{-3}$ | 566 |
| 0,25 | 0,50 | 0,50 | $1{,}259\cdot10^{-7}$ | $1{,}893\cdot10^{-4}$ | 566 |
| 0,50 | 0,00 | 0,00 | $3{,}423\cdot10^{-6}$ | $2{,}406\cdot10^{-3}$ | 558 |
| 0,50 | 0,00 | 0,25 | $1{,}748\cdot10^{-7}$ | $1{,}217\cdot10^{-3}$ | 561 |
| 0,50 | 0,00 | 0,50 | $4{,}370\cdot10^{-7}$ | $1{,}014\cdot10^{-3}$ | 562 |
| 0,50 | 0,25 | 0,00 | $1{,}496\cdot10^{-7}$ | $3{,}034\cdot10^{-3}$ | 562 |
| 0,50 | 0,25 | 0,25 | $2{,}305\cdot10^{-8}$ | $1{,}127\cdot10^{-3}$ | 566 |
| 0,50 | 0,25 | 0,50 | $5{,}244\cdot10^{-8}$ | $4{,}237\cdot10^{-4}$ | 567 |
| 0,50 | 0,50 | 0,00 | $2{,}432\cdot10^{-7}$ | $3{,}850\cdot10^{-4}$ | 562 |
| 0,50 | 0,50 | 0,25 | $2{,}272\cdot10^{-8}$ | $1{,}365\cdot10^{-3}$ | 566 |
| 0,50 | 0,50 | 0,50 | $3{,}693\cdot10^{-8}$ | $2{,}398\cdot10^{-4}$ | 566 |

ляет решать задачи теплопроводности унифицированным образом вне зависимости от гладкости коэффициентов.

*Таблица 2*

**Результаты вычислительного эксперимента при решении краевой задачи для уравнения (1) с разрывными коэффициентами**

| $\lambda_e$ | $\lambda_i$ | $R$ | $E$ | $T$ ,с |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $10^{+0}$ | $4{,}446\cdot10^{-9}$ | $1{,}496\cdot10^{-7}$ | 338 |
| 1 | $10^{-1}$ | $4{,}409\cdot10^{-9}$ | – | 327 |
| 1 | $10^{-2}$ | $1{,}229\cdot10^{-8}$ | – | 329 |
| 1 | $10^{-3}$ | $1{,}516\cdot10^{-8}$ | – | 328 |
| 1 | $10^{-4}$ | $1{,}537\cdot10^{-8}$ | – | 336 |
| 1 | $10^{-5}$ | $1{,}896\cdot10^{-8}$ | – | 330 |

Вычислительный эксперимент проводился на четырехуровневой многосеточной структуре с самой мелкой сеткой $91\times91\times91$, остальные условия совпадают с условиями предыдущего эксперимента. Результаты, приведенные в табл. 2, показывают высокую скорость сходимости УМТ.

Примеры решения разнообразных краевых задач математической физики приводятся в [6].

## Выводы

Дальнейшее совершенствование автономных программных продуктов для решения прикладных задач потребует разработки специальных вычислительных технологий, обладающих скоростью сходимости, близкой к оптимальной, и высоким уровнем формализации и параллелизма.

**Библиографический список**

1. *Бакулин В.Н., Каледин В.О.* Численно-аналитический подход к исследованию деформирования оболочечных конструкций из композитов // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 4. С. 184-188.

2. *Мартыненко С.И.* Универсальная многосеточная технология для численного решения краевых задач на структурированных сетках // Вычислительные методы и программирование. 2000. Т.1. Раздел 1. С.85-104.

3. *Мартыненко С.И.* Универсальная многосеточная технология для численного решения систем дифференциальных уравнений в частных производных // Вычислительные методы и программирование. 2001. Т.1. Раздел 1. С.1-11.

4. *Мартыненко С.И.* Программное обеспечение для универсальной многосеточной технологии: строительные блоки и диагностические инструменты // Вычислительные методы и программирование. 2001. Т.4. Раздел 1. С.1-6.

5. *Мартыненко С.И.* Программное обеспечение для универсальной многосеточной технологии // Математическое моделирование. 2002. Т.14. № 9. С. 87-90.

6. *Martynenko S.I.* Robust Multigrid Technique for black box software // Comp. Meth. in Appl. Math. 2006. V. 6. № 4. P. 413-435.

7. *Бакулин В.Н., Мартыненко С.И.* Универсальная многосеточная технология для численного решения задач механики сплошной среды // Международная конференция «Шестые Окуневские чтения» 23-27 июня 2008 г., Санкт-Петербург: Материалы докладов. Т.II / Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 2008, С. 47-50

8. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.

9. *Wesseling P.* An Introduction to Multigrid Methods, Wiley, Chichester, 1991. 10. Hackbusch W. Multi-grid methods and applications, Springer, Berlin, 1985.

Институт прикладной механики
Российской академии наук

ФГУП ЦИАМ им. П.И. Баранова
Статья поступила в редакцию 23.12.2008

Сдано в набор 12.05.09. Подписано в печать 5.06.09.
Бумага офсетная. Формат 60×84 1/8. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 20,46. Уч.-изд. л. 22,00. Тираж 160 экз.
Заказ 4263/240.

Издательство МАИ-ПРИНТ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993
Типография Издательства МАИ
(МАИ), Волоколамское ш., д. 4, Москва, А-80, ГСП-3 125993