Труды МАИ. 2021.Выпуск № 120
Trudy MAI. 2021.Issues no.120

МЕХАНИКА

Научная статья
УДК 539.32
DOI: 10.34759/trd-2021-120-02

Об условии корректности в краевых задачах градиентных теорий упругости

Сергей Альбертович Лурье[1], Константин Константинович Шрамко[2]✉
[1]Институт прикладной механики Российской академии наук, Москва, Россия
[1,2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
[1]salurie@mail.ru
[2]konstantin_home@mail.ru✉

Аннотация. Исследуются условия симметрии градиентных теорий упругости. Обсуждаются специфические свойства симметрии тензоров модулей упругости шестого ранга, и выделяется условие симметрии, которое характерно только для градиентных теорий. Рассматриваются модели Миндлина, связанные с первой и второй формой потенциальной энергии, ибо остальные градиентные варианты теорий упругости являются их частными случаями. Исследуется вариационная постановка градиентной упругости общего вида и роль условий симметрии, по вторым индексам в каждой тройке индексов. Доказывается, что в общем случае, что это условие симметрии является основой для формулировки условия корректности краевых задач при математической постановке градиентный теорий упругости. Отмечается необходимость требований симметрии модулей упругости (или тензоров третьего

ранга для моментов по последней паре индексов) в случае, если поверхность тела имеет ребра, а также для класса так называемых векторных моделей.

Ключевые слова: градиентная упругость, вариационные модели, свойства симметрии тензоров обобщенных модулей упругости, условия корректности

Для цитирования: Лурье С.А., Шрамко К.К. Об условии корректности в краевых задачах градиентных теорий упругости // Труды МАИ. 2021. № 120. DOI: 10.34759/trd-2021-120-02

MECHANICS

Original article

On the correctness condition in boundary value problems of gradient elasticity theory

Sergey A. Lurie[1], Konstantin K. Shramko[2]✉
[1]Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
[1,2]Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, Moscow, Russia
[1]salurie@mail.ru
[2]konstantin_home@mail.ru✉

Abstract. The main subject of study in this article concerns the variational formulation of gradient models of elasticity and specific symmetry conditions in gradient theories of elasticity of a general form. Special attention is being paid to the symmetry conditions, which are a consequence of the fact that it is possible to change the order of differentiation in the components of the displacement gradient tensor in the potential energy

density expression. First, the conditions of symmetry in the theory of elasticity and gradient elasticity are discussed, the features of the properties of symmetry in gradient models are noted in comparison with the classical theory of elasticity. Then the variational statements of gradient elasticity and the structure of the boundary conditions following from this statement are briefly discussed. Finally, the conditions for the formulation correctness of the of boundary value problems and their connection with the symmetry property of gradient elastic modules are established. This article presents the symmetry conditions analysis for components of the generalized elastic properties tensor of gradient models of elasticity. It is demonstrated that one of the conditions is related to the correctness of boundary value problems of gradient elasticity theories. It is established for the first time that physically and energetically insignificant components of the elastic modulus tensor may appear on the surface under boundary static conditions for stresses (with variations in displacements) and under boundary conditions on the contours of edges, which can lead to significant errors in solving applied problems. A procedure allowing always obtaining correct boundary conditions for arbitrary optioins of gradient elasticity theories is presented.
Keywords: gradient elasticity, variational models, symmetry properties of generalized elastic modules tensors, correctness conditions

For citation: Lurie S.A., Shramko K.K. On the correctness condition in boundary value problems of gradient elasticity theory. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. DOI: 10.34759/trd-2021-120-02

1. Введение

Современные градиентные варианты теории упругости исторически связаны с фундаментальными работами [1-3] и получили развитие применительно к описанию свойств неоднородных структур в работах [4-7]. Однако наиболее значительный интерес к модифицированным вариантам теорий упругости возник в последнее десятилетие, ибо градиентные теории упругости зависят от параметров масштаба. В настоящее время градиентная упругость широко используется для описания размерных эффектов и нелокального поведения, наблюдаемых в полукристаллических и наноструктурных материалах, геоматериалов, биоматериалов [8, 9], а так же для описания взаимодействия нескольких фаз материалов [10-12], для моделирования особенностей деформирования сверхтонких консольных балок и пластин углеродных нанотрубок и металлических нанопроволок [13, 14], при разработке методов усреднения, учитывающих масштабные эффекты-упругие эффекты второго порядка [15], а также для моделирования переходных эффектов связанных с использованием дискретного атомарного моделирования материалов и континуальных моделей, способных описывать свойства материалов на разных структурных уровнях [16]. Проблемы моделирования задач механики материалов, перечисленных выше, а также перспективы развития подобных исследования обсуждаются в интересных работах [17-20] и др... Эффективность использования углеродных наночастиц, особенно в композиционных материалах, описывается в работе [21].

В градиентной упругости в общем случае (см. [2, 16, 17]) имеется 300 независимых коэффициентов материалов, тогда как для изотропны центросимметричных материалов это число уменьшается до 7 (два из них – коэффициенты Ламе, определяют физические свойства изотропного тела в классической упругости.

Такое сокращение физических постоянных связано с тем, что для определяющих соотношений в механике деформируемых сред имеют место система фундаментальных условий симметрии. В этой работе главным предметом изучения является вариационная формулировка градиентных моделей упругости и специфические условия симметрии в градиентных теориях упругости общего вида. Особое внимание обращается на условия симметрии, которые являются следствием того, что в выражении плотности потенциальной энергии можно изменять порядок дифференцирования в компонентах тензора градиента перемещений $u_{i,jk}$, где u_i- компоненты вектора перемещений. Это условие симметрии обсуждалось, в частности, разделе 5 основополагающей работы Тупина (1962) и в недавних работах [22, 23].

План работы состоит в следующем. Сначала обсуждаются условия симметрии в теории упругости и градиентной упругости, отмечаются особенности свойств симметрии в градиентных моделях по сравнению с классической теорией упругости. Затем обсуждаются кратко вариационные постановки градиентной упругости и структура следующих из это постановке краевых условий. Наконец, устанавливаются условия корректности постановки краевых задач и их связь со свойством симметрии градиентных модулей упругости.

2. О свойствах симметрии классической и градиентной теории упругости

Определяющие уравнения в линейной теории упругости записываются через тензоры напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{1}$$

Для линейной градиентной теории для материалов с центросимметричной симметрией определяющие уравнения могут быть записаны в терминах деформаций [17,19]

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{и} \quad \mu_{ijk} = A_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n} \tag{2}$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, \mu_{ijk}$ и $\varepsilon_{ij,k}$ являются компонентами тензоров напряжений, деформаций, моментов и градиентов деформаций соответственно σ, ε, μ и $\nabla\varepsilon$.

С другой стороны, определяющие соотношения градиентной упругости могут быть записаны в терминах дисторсий $u_{i,j}$

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}u_{k,l} \quad и \quad \mu_{ijk} = A_{ijklmn}u_{l,mn} \tag{3}$$

Тензоры модулей упругости для обратимых процессов, моделируемых в классической A_{ijkl} и градиентной упругости A_{ijklmn} должны подчиняются потенциальности для плотности потенциальной энергии

$$A_{ijkl} = A_{klij}, \quad A_{ijklmn} = A_{lmnijk} \tag{4}$$

Отметим еще одно свойство симметрии, связанное градиентной теорией деформаций, которое связано с симметрией тензора деформации (условия симметрии деформаций):

$$A_{ijkl} = A_{ijlk}, \qquad A_{ijklmn} = A_{ijkmln} \tag{5}$$

В результате количество независимых коэффициентов материала уменьшается.

Полагаем, что оба тензора A в (3) подчиняются условиям (5). Тогда и напряжения σ и μ также удовлетворяют аналогичным условиям симметрии

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{и} \quad \mu_{ijk} = \mu_{jik} \tag{6}$$

Введем понятие физически и энергетически несущественных компонент модулей упругости. Очевидно, что уравнения закона Гука для моментов (3) только симметричные компоненты тензора модулей упругости шестого ранга по последней паре индексов в первой и второй тройке индексов являются физически существенными.

Действительно введем симметричные по указанным индексам компоненты

$$A^s_{ijklmn} : A^s_{ijklmn} = A^s_{ijklmn}. \quad A^s_{ijklmn} = A^s_{ijklnm} \tag{7}$$

и несимметричные компоненты тензора шестого ранга несимметричные по последним индексам в каждой тройке индексов

$$A^a_{ijklmn} : A_{ijklmn} = -A_{ikjlmn}. \quad A_{ijklmn} = -A_{ikjlnm} \tag{8}$$

Рассмотрим второе равенство (2) и учтем определение (8). В силу свертки с учетом симметрии тензора $u_{i,jk}$ сумма всех слагаемых, соответствующих компонентам A^a_{ijklmn} в (3) тождественно равны нулю, $\mu_{ijk} = A^a_{ijklmn} u_{l,mn} = 0$. В этом случае будем говорить, что компоненты A^a_{ijklmn} являются физически несущественными.

Очевидно, что A^a_{ijklmn} являются и энергетически несущественными, так как для любых значений A^a_{ijklmn} равна нулю квадратичная форма $A^a_{ijklmn} u_{i,jk} u_{l,mn} \equiv 0$.

Следовательно и для тензора моментов μ_{ijk} и для потенциальной энергии, записанной для интегрируемых дисторсий $w_g\left(u_{i,jk}\right)$ только симметричные компоненты тензора шестого ранга (7) являются существенными.

3. Структура тензоров градиентных модулей упругости

Рассмотрим общий вид тензоров градиентных модулей упругости шестого ранга для изотропного тела.

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} = {} & a_1\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + a_2\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln} + a_3\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm} + a_4\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn} + a_5\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln} \\ & + a_6\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm} + a_7\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn} + a_8\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + a_9\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} + a_{10}\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln} \\ & + a_{11}\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} + a_{12}\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + a_{13}\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm} + a_{14}\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + a_{15}\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl} \end{aligned} \tag{9}$$

Вводя условия потенциальности (4) , и условия симметрии по порядку дифференцирования - симметрии по последним двум индексам в каждой тройке индексов (7), получим из (9) следующее определение компонент тензоров шестого ранга через пять существенных модулей $a_1,\ a_2, a_7,\ a_8,\ a_{11}$, что соотвествует модели Миндлина I

$$\begin{aligned}A_{ijklmn} &= a_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}+\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm}+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn}+\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln}\right)\\ &+a_2\left(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln}+\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm}+\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm}+\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln}\right)+a_7\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}\\ &+a_8\left(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}\right)+a_{11}\left(\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}+\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}+\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}+\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

С другой стороны, если мы, рассматривая соотношения (9) введем условия симметрии деформации т.е. условие симметрии по первым двум индексам в каждой тройке индексов (5), то получим определение компонент тензоров шестого ранга через пять существенных модулей $a_1,\ a_3, a_4,\ a_8,\ a_9$, соответствующее модели Миндлина II

$$\begin{aligned}A_{ijklmn} &= a_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn}+\delta_{in}\delta_{jk}\delta_{lm}+\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{ln}+\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{lm}\right)+a_3\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{lm}\\ &+a_4\left(\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{mn}+\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{ln}+\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ln}+\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{mn}\right)+a_8\left(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn}+\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn}\right)\\ &+a_9\left(\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl}+\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km}+\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km}+\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

Запишем определяющие соотношения для тензоров моментов для модели Миндлина I

$$\begin{aligned}&\sigma_{ijk}=A_{ijklmn}u_{l,mn}=a_1\left(\delta_{ij}u_{k,mm}+\delta_{jk}u_{m,mi}+\delta_{ik}u_{j,mm}+\delta_{jk}u_{n,ni}\right)+\\ &+a_2\left(\delta_{ij}u_{n,nk}+\delta_{ik}u_{m,mj}+\delta_{ij}u_{m,mk}+\delta_{ik}u_{n,nj}\right)+a_7\delta_{jk}u_{i,mm}+\\ &+2a_8\left(u_{i,jk}\right)+2a_{11}\left(u_{j,ik}+u_{k,ij}\right)=\\ &=a_1\left(\delta_{ij}\Delta u_k+2\delta_{jk}\theta_{,i}+\delta_{ik}\Delta u_j\right)+2a_2\left(\delta_{ij}\theta_{,k}+\delta_{ik}\theta_{,j}\right)+\\ &+a_7\delta_{jk}\Delta u_i+2a_8u_{i,jk}+2a_{11}\left(u_{j,ik}+u_{k,ij}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

и модели Миндлина II

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ijk} = A_{ijklmn}u_{l,mn} = a_1\left(\delta_{ij}u_{k,mm} + \delta_{jk}u_{l,li} + \delta_{ij}u_{l,kl} + \delta_{ik}u_{l,lj}\right) + a_3\delta_{ij}u_{l,lk} + \\
&+a_4\left(\delta_{ik}u_{j,mm} + \delta_{jk}u_{l,il} + \delta_{ik}u_{l,jl} + \delta_{jk}u_{i,mm}\right) + a_8\left(u_{i,jk} + u_{j,ik}\right) + \\
&+a_9\left(u_{k,ij} + u_{j,ki} + u_{i,kj} + u_{k,ji}\right) = \\
&= a_1\left(\delta_{ij}\Delta u_k + \delta_{jk}\theta_{,i} + \delta_{ij}\theta_{,k} + \delta_{ik}\theta_{,j}\right) + a_3\delta_{ij}\theta_{,k} + \\
&+a_4\left(\delta_{ik}\Delta u_j + \delta_{jk}\theta_{,i} + \delta_{ik}\theta_{,j} + \delta_{jk}\Delta u_i\right) + (a_8 + a_9)\left(u_{i,jk} + u_{j,ik}\right) + \\
&+2a_9u_{k,ij}
\end{aligned} \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что для модели Миндина I тензор моментов σ_{ijk} является симметричным по двум последним индексам $\sigma_{ijk} = \sigma_{ikj}$, в то время как для модели Миндлина II тензор моментов обладает симметрией «парности» - симметрией по первым двум индексам $\sigma_{ijk} = \sigma_{jik}$. Исследуемые два типа симметрии являются принципиально различными. Симметрия по порядку дифференцирования является фундаментальной и связана с необходимыми и достаточными условиями непрерывности дисторсий. Симметрия, связанная с парностью (симметрия по первым индексам с первой и второй тройке индексов) вносится при построении градиентной теории деформаций и связана с симметрией тензора деформации.

Рассмотрим теперь плотность потенциальной энергии. Для модели Миндлин I плотность градиентной потенциальной энергии записывается через тензор модулей упругости, обладающих свойством симметрии по порядку дифференцирования (7)

$$w(u_{l,mn}) = \tfrac{1}{2}u_{i,jk}A^{s}{}_{ijklmn}u_{l,mn} \tag{14}$$

Для модели Миндлин II плотность градиентной потенциальной энергии записывается через тензор деформаций формально с другим тензором градиентных свойств шестого ранга A^*_{ijklmn}, которые не обладают свойствами (7)

$$w^*(\varepsilon_{lm,n}) = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij,k}A^*_{ijklmn}\varepsilon_{lm,n} \tag{15}$$

Записанные две формы разложений Миндлина (14) и (15) являются эквивалентными в том смысле, что каждая из них записывается через пять физических постоянных (a_i для формы Миндлин I и a^*_i для формы Миндлин II) и коэффициенты a_i и a^*_i могут быть выражены друг через друга если, например, квадратичную форму (24) переписать в деформациях учитывая тождество $u_{i,jk} = \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{ki,j} - \varepsilon_{jk,i}$.

Далее мы рассмотрим проблему о необходимости соблюдения условий симметрии по порядку дифференцирования в градиентной теории упругости.

4. Условие симметрии по порядку дифференцирования и критерии корректности модели

Будем говорить, что градиентная модель является корректной, если в краевых условиях не входят физически и энергетически несущественные компоненты модулей упругости A^a_{ijklmn}, (8). Напомним, что компоненты тензоров модулей упругости A_{ijklmn} называются физически и энергетически несущественными, если для них выполняются тождества $\mu_{ijk} = A^a_{ijklmn}u_{l,mn} = 0$, $A^a_{ijklmn}u_{i,jk}u_{l,mn} \equiv 0$.

Представим тензор шестого ранга в виде разложения:

$$A_{ijkmnl} = A_{ijkmnl}^{++} + A_{ijkmnl}^{+-} + A_{ijkmnl}^{-+} + A_{ijkmnl}^{--} \tag{16}$$

$$\begin{cases} A_{ijkmnl}^{++} = (A_{ijkmnl} + A_{ikjmnl} + A_{ijkmln} + A_{ikjmln}) / 4 \\ A_{ijkmnl}^{+-} = (A_{ijkmnl} + A_{ikjmnl} - A_{ijkmln} - A_{ikjmln}) / 4 \\ A_{ijkmnl}^{-+} = (A_{ijkmnl} - A_{ikjmnl} + A_{ijkmln} - A_{ikjmln}) / 4 \\ A_{ijkmnl}^{--} = (A_{ijkmnl} - A_{ikjmnl} - A_{ijkmln} + A_{ikjmln}) / 4 \end{cases} \tag{17}$$

Рассмотрим вариацию градиентной части потенциальной энергии, предполагая для простоты, что кусочно- гладкая поверхность тела состоит плоскостей. Имеем

$$\begin{aligned} &\delta w_g = \int_V \sigma_{ijk} \delta u_{i,jk} dV = \int_V \sigma_{ijk,jk} \delta u_i dV - \int_F [\sigma_{ijk,k} n_j \delta u_i - \sigma_{ijk} n_k \delta u_{i,j}] dF = \\ &= -\int_F [\sigma_{ijk,k} n_j + (\sigma_{ijk} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF + \int_F (\sigma_{ijk} n_k) n_j \delta(u_{i,p} n_p) dF - \\ &+ \oint [(\sigma_{ijk} n_k) v_j)] \delta u_i ds \end{aligned} \tag{18}$$

Запишем равенство (18) в перемещениях с учетом обобщенного закона Гука сначала через физически и энергетические значимые компоненты тензора моделей шестого ранга A_{ijkmnl}^{++}

$$\begin{aligned} &\delta w_g^s = \int_V A_{ijkmnl}^{++} u_{l,mnjk} \delta u_i dV - \\ &- \int_F [A_{ijkmnl}^{++} u_{l,mnk} n_j + (A_{ijkmnl}^{++} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta_{jp}^*] \delta u_i dF + \\ &+ \int_F (A_{ijkmnl}^{++} u_{l,mn} n_k) n_j \delta(u_{i,p} n_p) dF + \oint [(A_{ijkmnl}^{++} u_{l,mn} n_k) v_j)] \delta u_i ds \end{aligned} \tag{19}$$

а затем для общего случая с учетом разложений (16), (17)

$$\delta w_g^{full} = \int_V A^{++}_{ijklmn} u_{l,mnjk} \delta u_i dV -$$
$$-\int_F [(A^{++}_{ijklmn} + A^{-+}_{ijklmn}) u_{l,mnk} n_j + ((A^{++}_{ijklmn} + A^{-+}_{ijklmn}) u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta^*_{jp}] \delta u_i dF +$$
$$+\int_F ((A^{++}_{ijklmn} + A^{-+}_{ijklmn}) u_{l,mn} n_k) n_j \delta(u_{i,p} n_p) dF + \tag{20}$$
$$+\oint [(A^{++}_{ijklmn} + A^{-+}_{ijklmn}) u_{l,mn} n_k) \nu_j)] \delta u_i ds$$

Сравнивая вариационные формы (19) и (20), получим

$$\delta w_g^{full} - \delta w_g^s = -\int_F [A^{-+}_{ijklmn} u_{l,mnk} n_j + (A^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta^*_{jp\,j}] \delta u_i dF -$$
$$+\oint [A^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \nu_j] \delta u_i ds \tag{21}$$

Полученное равенство (21) показывает, что постановка краевой задачи без учета симметрии тензора модулей упругости по индексам дифференцирования может приводить к значительным погрешностям за счет возможного появления в краевых условиях физически и энергетически несущественных составляющих модулей упругости, которые могут принимать любые значения. Для исключения паразитных внутренних сил в граничных условиях следует требовать выполнения условия

$$B = \delta w_g^{full} - \delta w_g^s = -\int_F [A^{-+}_{ijklmn} u_{l,mnk} n_j + (A^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k)_{,p} \delta^*_{jp\,j}] \delta u_i dF -$$
$$+\oint [A^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \nu_j] \delta u_i ds = 0 \tag{22}$$

Можно видеть, что в общем случае, так как контурное условие $\oint [A^{-+}_{ijklmn} u_{l,mn} n_k \nu_j] \delta u_i ds$ формируется с учетом соседних поверхностей (контур обходятся в разных направлениях, но по различным плоскостям), то подынтегральное выражение в контурном интеграле не равно нулю для произвольного несимметричного тензора A^{-+}_{ijklmn}.

Далее, анализ соотношений (22) показывает, что выражение

$$\begin{aligned}&\int_F [A^{-+}_{ijklmn}u_{l,mnk}n_j + (A^{-+}_{ijklmn}u_{l,mn}n_k)_{,p}\delta^*_{jp\,j}]\delta u_i dF = \\ &= \int_F [\tilde{\sigma}_{ijk,k}n_j + (\tilde{\sigma}_{ijk}n_k)_{,p}\delta^*_{jp}]\delta u_i dF\end{aligned} \tag{23}$$

всегда равно нулю в силу свертки симметричного и несимметричного тензоров, где $\tilde{\sigma}_{ijk}$ - несимметричная часть тензора моментов в отношении последних индексов, $\mu_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\mu_{ijk} + \mu_{ikj}\right) + \frac{1}{2}\left(\mu_{ijk} - \mu_{ikj}\right) = \hat{\mu}_{ijk} + \tilde{\mu}_{ijk}$. Однако равенство нулю выражения (23) реализуется лишь в случае комбинации обеих слагаемых в (23). Тем не менее имеется целый класс градиентных моделей сред [24], для которых моментные поправки вида $(\sigma_{ijk}n_k)_{,p}\delta^*_{jp}$ в краевых условиях отсутствуют и статические граничные условия записываются фактически в форме условий классической упругости через квази-классические напряжения $t_i = (\sigma_{ij} - \sigma_{ijk,k})n_j$.

В результате доказано следующее утверждение:

1. Для любой градиентной теории упругости корректные статические краевые условия вектор сил и статические условия для менисковых сил $f_i = A_{ijklmn}u_{l,mn}n_k\nu_j$ следует формулировать в перемещениях для симметричного

относительно порядка дифференцирования (т.е. симметричного по последним индексам в каждой тройке) тензора градиентных модулей упругости, A^{++}_{ijklmn} .

2. Если для градиентных векторных моделей упругости краевые статические условия формулируются в усилиях и моментах, то они должны быть записаны через симметричную составляющую тензора моментов относительно последних индексов $\hat{\sigma}_{ijk}$.

Только при выполнении условий 1 и 2 утверждения выполняется условие корректности (21).

Заключение

Представлен анализ условий симметрии на компоненты тензора обобщённых упругих свойств градиентных моделей упругости. Показано, что одно из условий связано с корректностью краевых задач градиентных теорий упругости. Впервые установлено, что в краевых статических условиях для напряжений (при вариации перемещений) и в граничных условиях на контурах ребер на поверхности могут появляться физически и энергетически несущественные компоненты тензора модулей упругости, что может приводить к существенным ошибкам в решении прикладных задач. Указывается процедура, позволяющая всегда получить корректные краевые условия для произвольных вариантов градиентных теорий упругости.

Список источников

1. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1962, vol. 11, pp. 385-414.

2. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964, no. 16, pp. 51-78.

3. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity // International Journal of Solids and Structures, 1968, no. 4, pp. 109-124. DOI:10.1016/0020-7683(68)90036-X

4. Altan B.S., Aifantis E.C. On the structure of the mode-III crack-tip in gradient elasticity // Scripta Metallurgica Et Materialia, 1992, no. 26, pp. 319–324. DOI:10.1016/0956-716X(92)90194-J

5. Vardoulakis I., Georgiadis H.G. SH surface waves in a homogeneous gradientelastic half-space with surface energy // Journal of Elasticity, 1997, no. 47, pp. 147-165. URI: http://hdl.handle.net/123456789/12434

6. S. Li, I. Miskioglu, B.S. Altan. Solution to line loading of a semi-infinite solid in gradient elasticity // International Journal of Solids and Structures, 2004, no. 41, pp. 3395-3410. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2004.02.010

7. Aifantis E.C. et al. The role of interfaces in enhancing the yield strength of composites and polycrystals // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2005, no. 53, pp. 1047-1070. DOI:10.1016/j.jmps.2004.12.003

8. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity. Advances in Applied Mechanics, Academic Press, New York, 1997, vol. 33, pp. 295-361. DOI:10.1016/S0065-2156(08)70388-0

9. Liu X.N., Huang G.L., Hu, G.K. Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2012, no. 60, pp. 1907–1921. DOI:10.1016/j.jmps.2012.06.008

10. Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, no. 56, no. 3379-3391. DOI:10.1016/j.jmps.2008.09.007

11. Соляев Ю.О. Моделирование эффективных механических свойств керамик на основе градиентной теории межфазного слоя // Труды МАИ. 2011. № 42. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=24316

12. Кривень Г.И., Маковский С.В. О демпфирующих свойствах вискеризованного слоя в модифицированных волокнистых композитах // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=118729. DOI: 10.34759/trd-2020-114-03

13. Lam D.C.C., Yang F., Chonga A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2003, no. 51, pp. 1477-1508. DOI:10.1016/S0022-5096(03)00053-X

14. Wang Q, Wang C.M. The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes // Nanotechnology, 2007, no. 18, pp. 075702. DOI: 10.1088/0957-4484/18/7/075702

15. Forrest S. Mechanics of generalized continua: construction by homogenization // Journal de Physique IV, 1998, no.8, pp. 39–48. DOI: 10.1051/jp4:1998405

16. Gusev A.A., Lurie S.A. Strain-gradient elasticity for bridging continuum and atomistic estimates of stiffness of binary Lennard-Jones crystals // Advanced Engineering Materials, 2010, no.12, pp. 529–533. DOI: 10.1002/adem.201000004

17. Auffray N., Le Quang H., He H.C. Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity // Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2013, no. 61, pp. 1202-1223. DOI:10.1016/j.jmps.2013.01.003

18. Papanicolopulos S.-A. Chirality in isotropic linear gradient elasticity // International Journal of Solids and Structures, 2011, no. 48, pp. 745-752. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2010.11.007

19. Dell'Isola F., Sciarra G., Vidoli S., Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials // Proceedings of The Royal Society A. Mathematical Physical and Engineering Sciences, 2009, A 465, pp. 2177-2196. DOI:10.1098/rspa.2008.0530

20. Auffray N., Bouchet R., Bréchet Y. Deviation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior // International Journal of Solids and Structures, 2009, no. 46, pp. 440-454. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2008.09.009

21. Климов А.К., Климов Д.А., Низовцев В.Е., Ухов П.А. Эффективность применения наноструктурных композиционных материалов и изделий из них в авиационной промышленности // Труды МАИ. 2013. № 67. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=41486

22. Gusev A.A., Lurie S.A. Symmetry conditions in strain gradient elasticity // Mathematics and Mechanics of Solids, 2017, no. 22(4), pp. 683–691. DOI: 10.1177/1081286515606960

23. Vasiliev V.V., Lurie S.A. On correct nonlocal generalized theories of elasticity // Physical Mesomechanics, 2016, no. 19(3), pp. 269-281. DOI:10.1134/S102995991603005X

24. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O., Aifantis E.C. On one class of applied gradient models with simplified boundary problems // Materials Physics and Mechanics, 2017, no. 32(3), pp. 353-369.

References

1. Toupin R.A. Elastic materials with couple stresses, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1962, vol. 11, pp. 385-414.

2. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, no. 16, pp. 51-78.

3. Mindlin R.D., Eshel N.N. On first strain-gradient theories in linear elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 1968, no. 4, pp. 109-124. DOI:10.1016/0020-7683(68)90036-X

4. Altan B.S., Aifantis E.C. On the structure of the mode-III crack-tip in gradient elasticity, *Scripta Metallurgica Et Materialia*, 1992, no. 26, pp. 319–324. DOI:10.1016/0956-716X(92)90194-J

5. Vardoulakis I., Georgiadis H.G. SH surface waves in a homogeneous gradientelastic half-space with surface energy, *Journal of Elasticity*, 1997, no. 47, pp. 147-165. URI: http://hdl.handle.net/123456789/12434

6. S. Li, I. Miskioglu, B.S. Altan. Solution to line loading of a semi-infinite solid in gradient elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 2004, no. 41, pp. 3395-3410. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.02.010

7. Aifantis E.C. et al. The role of interfaces in enhancing the yield strength of composites and polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, no. 53, pp. 1047-1070. DOI:10.1016/j.jmps.2004.12.003

8. Fleck N.A., Hutchinson J.W. *Strain gradient plasticity. Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, 1997, vol. 33, pp. 295-361. DOI:10.1016/S0065-2156(08)70388-0

9. Liu X.N., Huang G.L., Hu, G.K. Chiral effect in plane isotropic micropolar elasticity and its application to chiral lattices, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2012, no. 60, pp. 1907–1921. DOI:10.1016/j.jmps.2012.06.008

10. Ma H.M., Gao X.-L., Reddy J.N. A microstructure-dependent Timoshenko beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2008, no. 56, no. 3379-3391. DOI:10.1016/j.jmps.2008.09.007

11. Solyaev Yu.O. *Trudy MAI*, 2011, no. 42. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=24316

12. Kriven' G.I., Makovskii S.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118729. DOI: 10.34759/trd-2020-114-03

13. Lam D.C.C., Yang F., Chonga A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2003, no. 51, pp. 1477-1508. DOI:10.1016/S0022-5096(03)00053-X

14. Wang Q, Wang C.M. The constitutive relation and small scale parameter of nonlocal continuum mechanics for modelling carbon nanotubes, *Nanotechnology*, 2007, no. 18, pp. 075702. DOI: 10.1088/0957-4484/18/7/075702

15. Forrest S. Mechanics of generalized continua: construction by homogenization, *Journal de Physique IV*, 1998, no.8, pp. 39–48. DOI: 10.1051/jp4:1998405

16. Gusev A.A., Lurie S.A. Strain-gradient elasticity for bridging continuum and atomistic estimates of stiffness of binary Lennard-Jones crystals, *Advanced Engineering Materials*, 2010, no.12, pp. 529–533. DOI: 10.1002/adem.201000004

17. Auffray N., Le Quang H., He H.C. Matrix representations for 3D strain-gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2013, no. 61, pp. 1202-1223. DOI:10.1016/j.jmps.2013.01.003

18. Papanicolopulos S.-A. Chirality in isotropic linear gradient elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 2011, no. 48, pp. 745-752. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2010.11.007

19. Dell'Isola F., Sciarra G., Vidoli S. Generalized Hooke's law for isotropic second gradient materials, *Proceedings of The Royal Society A. Mathematical Physical and Engineering Sciences*, 2009, A 465, pp. 2177-2196. DOI:10.1098/rspa.2008.0530

20. Auffray N., Bouchet R., Bréchet Y. Deviation of anisotropic matrix for bi-dimensional strain-gradient elasticity behavior, *International Journal of Solids and Structures*, 2009, no. 46, pp. 440-454. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2008.09.009

21. Klimov A.K., Klimov D.A., Nizovtsev V.E., Ukhov P.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 67, URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=41486

22. Gusev A.A., Lurie S.A. Symmetry conditions in strain gradient elasticity, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, no. 22(4), pp. 683–691. DOI: 10.1177/1081286515606960

23. Vasiliev V.V., Lurie S.A. On correct nonlocal generalized theories of elasticity, *Physical Mesomechanics*, 2016, no. 19(3), pp. 269-281. DOI:10.1134/S102995991603005X

24. Lurie S.A., Belov P.A., Solyaev Y.O., Aifantis E.C. On one class of applied gradient models with simplified boundary problems, *Materials Physics and Mechanics*, 2017, no. 32(3), pp. 353-369.

Статья поступила в редакцию 27.09.2021; одобрена после рецензирования 06.10.2021; принята к публикации 22.10.2021.

The article was submitted 27.09.2021; approved alter reviewieng 06.10.2021; accepted for publication 22.10.2021.