УДК 517.927.2

Дробные дифференциальные уравнения и ядра, и малые колебания механических систем

Алероева Х.Т.[1*], Алероев Т.С.[2]**

[1]*Московский технический университет связи и информатики, МТУСИ,*
ул. Авиамоторная, 8а, Москва, 111024, Россия

[2]*Московский государственный строительный университет, МГСУ,*
Ярославское шоссе, 26, Москва,129337, Россия

**e-mail: binsabanur@gmail.com*

***e-mail: aleroev@mail.ru*

Аннотация

В работе изучается краевая задача Дирихле для уравнения движения осциллятора с вязкоупругим демпфированием в случае, когда порядок демпфирования больше единицы, но меньше двойки. Такие задачи моделируют многие физические процессы, в частности, колебание струны в вязкой среде, изменение деформационно-прочностных характеристик полимербетона при нагружении и др. В данной работе исследуется функция Грина (функция влияния) изучаемой задачи. Доказано, что эта функция Грина (функция влияния) является неотрицательной, что позволяет установить основные осцилляционные свойства рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: асфальтобетон, осцилляционные свойства, дробная производная, полимербетон, функция Грина, основной тон.

Математическая постановка задачи

Как известно, многие задачи математической физики и механики [1],[2],[3], которые связаны с возмущением нормальных операторов с дискретным спектром, приводят к рассмотрению в гильбертовом пространстве H компактного оператора

$$A = IH + SH .$$

Этот оператор, при компактном S, называется слабым возмущением H или оператором келдышевского типа.

В данной работе мы продолжим исследование оператора B, порождаемый дифференциальным уравнением

$$u'' + \sum_{j=1}^{n} a_j(x) D_{0x}^{\alpha_j} u + q(x)u = \lambda u \ , \qquad (1)$$

где $0 < \alpha_n < \ldots < \alpha_1 = \alpha < 2$, а

$$D_{0+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt$$

- оператор дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α, (здесь, $n = [\alpha] + 1$ и $[\alpha]$ обозначает целую часть числа α) и краевыми условиями

$$u(0) = 0, \ \ u(1) = 0. \qquad (2)$$

начатое в [20].

Следует отметить [20], что задача (1)-(2) находится в центре внимания многих авторов. В первую очередь [20], это связано с тем, что задача (1)-(2) моделирует многие физические процессы, в частности, движение осциллятора под действием упругих сил, характерных для вязкоупругих сред. В работе [12] было произведено моделирование изменения деформационно-прочностных характеристик асфальтобетона при нагружении с помощью задачи

$$mx(t)''+bD^{\alpha}x(t)+kx(t)=F(t), \tag{3}$$

$$x(0)=0, \quad x(1)=0, \tag{4}$$

где b - модуль вязкости полиэфирной смолы, k -модуль жесткости полиэфирной смолы, m - масса гранулы, $x(t)$ -смещение.

Отметим, что порядок α дробной производной в уравнении (1) больше чем 1,3 но меньше 1,8. Следует отметить, что спектральная структура оператора, порожденного уравнением (1) и краевыми условиями типа Штурма-Лиувилля, в случае, когда порядок дробной производной больше единицы, практически не исследован. Как известно, в прикладных задачах наибольший интерес представляет обычно определение первых собственных значений. Следует отметить, что в работе [12], в частности, исследуется и эта задача. Данная работа, в основном, посвящена уточнению и обоснованию результатов, полученных в работе Кехарсаевой Э.Р. и Пирожкова В.Г. в [12].

Основные результаты

Для исследования основных осцилляционных свойств оператора, порожденного задачей (3)-(4), будем пользоваться результатами, полученными в работах [4]. В [18] построена функции Грина (функция влияния) для задачи

$$u'' + \varepsilon D_{0x}^{\alpha} u = \lambda u, \tag{5}$$

$$u(0) = 0, u(1) = 0 \tag{6}$$

в случае, когда порядок дробной производной меньше единицы. Для случая когда $1 < \alpha < 2$, функция Грина задачи (5)-(6) была построена А.М. Нахушевым [4].

Полученную [4] функцию Грина будем использовать для установления основных осцилляционных свойств задачи (5)-(6). Эта функция имеет вид

$$G_2(x,\tau) = G_1(x,\tau) - \frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)} \int_{\tau}^{1} \mathrm{E}_{\rho}\left[\varepsilon(\eta-\tau)\right]^{\beta} d\eta \cdot$$

$$\cdot \int_{0}^{1} G(x,t) D_{0t}^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right] dt,$$

где

$$G_1(x,\tau) = \begin{cases} (1-x)\int_{\tau}^{x} \mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)\right] dt \\ -x - \int_{x}^{1} \mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right] dt, \quad x \geq \tau \\ -x\int_{\tau}^{1} \mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right] dt, \quad x \leq \tau \end{cases}$$

Теорема. *Если* $0 \leq \varepsilon \leq \dfrac{1}{3}$, *то первое собственное число задачи (5)-(6) вещественное и простое и основной тон не имеет узлов.*

Доказательство. Известно [15, стр. 143], что задача (5)-(6) эквивалентна уравнению

$$u(x)=\lambda\int_0^1 G_2(x,\tau)u(\tau)d\tau, \tag{7}$$

где

$$\begin{gathered}G_2(x,\tau)=G_1(x,\tau)-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_\tau^1 \mathrm{E}_\rho[\varepsilon(\eta-\tau)]^\beta d\eta\cdot\\ \cdot\int_0^1 G(x,t)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt,\end{gathered} \tag{8}$$

$$G_1(x,\tau)=\begin{cases}(1-x)\int_\tau^x \mathrm{E}_\beta[\varepsilon(t-\tau)]dt\\ -x-\int_x^1 \mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon(t-\tau)^\beta\right]dt,\ x\ge\tau\\ -x\int_\tau^1 \mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon(t-\tau)^\beta\right]dt,\ x\le\tau\end{cases}. \tag{9}$$

Здесь

$$\mathrm{E}_\rho(z,\mu)=\sum_{\infty}^{\kappa=0}\frac{z^\kappa}{\Gamma(\mu+\kappa\rho^{-1})}$$

- функция типа Миттаг-Лефлера, и

$$\mathrm{E}_\rho[z]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^\kappa}{\Gamma(1+\kappa\rho^{-1})}$$

- функция Миттаг-Лефлера.

Покажем, что функция Грина $G_2[x,\tau]$ задачи (5)-(6) знакоопределена. Для этого нам понадобятся двухсторонние оценки для функции

$$\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right]=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\left(\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right)^{\kappa}}{\Gamma\left(1+\kappa\beta^{-1}\right)}.$$

Очевидно, что

$$1<\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\left(\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right)^{\kappa}}{\Gamma\left(1+\kappa\beta^{-1}\right)}\leq\sum_{\kappa=0}^{\infty}\varepsilon^{\kappa}.$$

Таким образом, если $\varepsilon<1/3$, то $1<\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right]<3/2$.

Далее,

$$D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{1}{(x-\xi)^{1-\alpha}}\left[1+\frac{\varepsilon\xi^{\beta}}{\Gamma(1+\beta^{-1})}+\frac{\varepsilon^{2}\xi^{2\beta}}{\Gamma(1+2\beta^{-1})}+\ldots\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\left[\frac{\Gamma(1)\beta}{\Gamma(\beta^{-1}+1)}x^{\beta}+\varepsilon\frac{\Gamma(\beta+1)2\beta}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)}x^{2\beta}+\varepsilon^{2}\frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)}x^{3\beta}+\ldots\right]. \tag{10}$$

Очевидно, что

$$\int_{0}^{1}G(x,t)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt=\int_{0}^{x}t(x-1)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt+\int_{x}^{1}x(t-1)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt.$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_{0}^{x}t(x-1)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt.$$

Очевидно, что

$$\int_{0}^{x}t(x-1)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt=x\int_{0}^{x}tD_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt-\int_{0}^{x}tD_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt.$$

При $x\geq t$ имеем

$$G_2(x,\tau)=G_1(x,\tau)-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/2}(\varepsilon,2)}\int_{\tau}^{1}\mathrm{E}_{\rho}[\varepsilon(\eta-\tau)]^{\beta}\,d\eta\,\cdot$$

$$\cdot\int_{0}^{1}G(x,t)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt=$$

$$=(1-x)\int_{\tau}^{x}\mathrm{E}_{\beta}[\varepsilon(t-\tau)]dt-x-\int_{x}^{1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right]dt-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/2}(\varepsilon,2)}\int_{\tau}^{1}\mathrm{E}_{\rho}[\varepsilon(\eta-\tau)]^{\beta}\,d\eta\,\cdot$$

$$\cdot\int_{0}^{1}G(x,t)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt$$

Нам понадобится оценка для выражения

$$-(1-x)\int_{\tau}^{x}\mathrm{E}_{\beta}[\varepsilon(t-\tau)]dt+x+\int_{x}^{1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right]dt$$

Очевидно, что при $0<\varepsilon<1/3$

$$x+\int_{x}^{1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right]dt>1$$

А выражение

$$(1-x)\int_{\tau}^{x}\mathrm{E}_{\beta}[\varepsilon(t-\tau)]dt<3/4$$

из чего следует оценка

$$-(1-x)\int_{\tau}^{x}\mathrm{E}_{\beta}[\varepsilon(t-\tau)]dt+x+\int_{x}^{1}\mathrm{E}_{\beta}\left[\varepsilon(t-\tau)^{\beta}\right]dt>1/3.$$

Что показывает знакоопределенность функции Грина при $x\geq t$.

Далее, при $x\leq\tau$, имеем

$$G_2(x,\tau)=G_1(x,\tau)-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_\tau^1 \mathrm{E}_\rho[\varepsilon(\eta-\tau)]^\beta d\eta\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^1 G(x,t)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt=-x\int_\tau^1 \mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon(t-\tau)^\beta\right]dt-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_\tau^1 \mathrm{E}_\rho[\varepsilon(\eta-\tau)]^\beta d\eta\,\cdot$$

$$\cdot\int_0^1 G(x,t)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt=-x\int_\tau^1 \mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon(t-\tau)^\beta\right]dt\left[1+\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\int_0^1 G(x,t)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt\right]=$$

$$=-x\int_\tau^1 \mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon(t-\tau)^\beta\right]dt\left[1+\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\int_0^x t(x-1)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt+\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\int_x^1 x(t-1)D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt\right]=$$

$$=-x\int_\tau^1 \mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon(t-\tau)^\beta\right]dt\left[1+\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_0^x tD_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\int_0^x tD_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt\right]-$$

$$-x\int_\tau^1 \mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon(t-\tau)^\beta\right]dt\left[\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_x^1 tD_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt-\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_0^x D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt\right].$$

Введем обозначения

$$I_1=\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\int_0^x tD_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt,\qquad I_2=\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_0^x D_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt.$$

Очевидно, что с учётом (2.28),

$$I_1=\frac{\varepsilon}{\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\int_0^x tD_{0t}^{\alpha-1}\mathrm{E}_\beta\left[\varepsilon t^\beta\right]dt=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\Gamma(2-\alpha)\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\int_0^x t\left[\frac{\Gamma(1)\beta t^\beta}{\Gamma(\beta^{-1}+1)}+\varepsilon\frac{\Gamma(\beta+1)2\beta t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)}+\varepsilon^2\frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)}+\right]=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\Gamma(2-\alpha)\mathrm{E}_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\left[\frac{\Gamma(1)\beta x^{\beta+1}}{\Gamma(\beta^{-1}+1)(\beta+1)}+\varepsilon\frac{\Gamma(\beta+1)2\beta x^{2\beta+1}}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)(2\beta+1)}+\right.$$

$$+\varepsilon^2\frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)x^{3\beta+1}}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)(3\beta+1)}+...\Bigg]\Bigg|_0^x=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\Gamma(2-\alpha)E_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\left[\frac{\Gamma(1)x^{\beta}}{\Gamma(\beta^{-1}+2)}+\varepsilon\frac{\Gamma(\beta+1)(2\beta)x^{2\beta}}{\Gamma(2\beta^{-1}+2)}+\varepsilon^2\frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)x^{3\beta}}{\Gamma(3\beta^{-1}+2)}+...\right]$$

Точно также,

$$I_2=\frac{\varepsilon}{E_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_0^x D_{0t}^{\alpha-1}E_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\Gamma(2-\alpha)E_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_x^1\left[\frac{\Gamma(1)\beta t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta^{-1}+1)}+\varepsilon\frac{\Gamma(\beta+1)2\beta t^{2\beta-1}}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)}+\varepsilon^2\frac{\Gamma(2\beta+1)(3\beta)x^{3\beta-1}}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)}+...\right]dt=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\Gamma(2-\alpha)E_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\left[\frac{\Gamma(1)t^{\beta}}{\Gamma(\beta^{-1}+1)\beta}+\varepsilon\frac{\Gamma(\beta+1)t^{2\beta}}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)}+\varepsilon^2\frac{\Gamma(2\beta+1)t^{3\beta}}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)}+...\right]\Bigg|_x^1=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\Gamma(2-\alpha)E_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\left(\frac{\Gamma(1)}{\beta\Gamma(\beta^{-1}+1)}+\varepsilon\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(2\beta^{-1}+1)}+\varepsilon^2\frac{\Gamma(2\beta+1)}{\Gamma(3\beta^{-1}+1)}+...\right)$$

Из полученных соотношений следует, что

$$\Bigg[1+\frac{\varepsilon}{E_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_0^x tD_{0t}^{\alpha-1}E_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt-\frac{\varepsilon}{E_{1/\beta}(\varepsilon,2)x}\int_0^x tD_{0t}^{\alpha-1}E_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt+$$

$$+\frac{\varepsilon}{E_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_x^1 tD_{0t}^{\alpha-1}E_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt-\frac{\varepsilon}{E_{1/\beta}(\varepsilon,2)}\int_0^x D_{0t}^{\alpha-1}E_{\beta}\left[\varepsilon t^{\beta}\right]dt\Bigg]>0$$

что и доказывает теорему.

Заметим, что способ построения функция Грина для задачи (5)-(6) в случае $0<\alpha<1$ ранее был указан в [18]. Построим функцию Грина для задачи (5)-(6) в случае $0<\alpha<1$.

Замечание. Из доказательства теоремы выше следует, что оценка $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$ которой мы пользовались при доказательстве знакоопределенности ядра $G_2(x,t)$ очень грубая и ее конечно можно уточнить, но на данном этапе такая задача не ставится.

Библиографический список

1. Келдыш М.В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Доклады АН СССР. 1951. Т. 77. № 1. С. 11–14.

2. Зверяев Е.М. Выделение уравнений типа Тимошенко из пространственных уравнений теории упругости для пластины на основе принципа сжатых отображений // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53459

3. Зверяев Е.М., Олехова Л.В. Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=53459

4. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. - 273 с.

5. Aleroev T.S., Aleroeva H.T., Ning-Ming Nie, Yi-Fa Tang. Boundary Value Problems for Differential Equations of Fractional Order // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics, 2010, no.49, pp. 19–82.

6. Цейтлин А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики – М.: Стройиздат, 1984. - 334 с.
7. Ingman D., Suzdalnitsky J. Iteration method for equation of viscoelastic motion with fractional differential operator of damping // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2001, no.190, pp. 5027-5036.
8. Chen J.-H., Chen W.-C. Chaotic dynamics of the fractionally damped van der Pole equation // Chaos, Solitons and Fractals, 2008, no.35, pp. 188-198.
9. Coffey W.T., Kalmykov Yu.P., Waldron J.T. The Langevin Equation. World Scientific Series in Contemporary Chemical Physics, 2004, vol. 10, 704 p.
10. Yang H., Luo G., Karnchanaphanurach P., Louie T.M., Rech I., Cova S., Xun L., Xie X.S. Protein Conformational Dynamics Probed by Single-Molecule Electron Transfer // Science, 2003, vol. 302, pp. 262–266.
11. Кехарсаева Э.Р., Пирожков В.Г. Моделирование изменения деформационно-прочностных характеристик асфальтобетона при нагружении с помощью дробного исчисления // Труды 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» имени И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского, Москва, 16-18 ноября 2016, С. 154.
12. Aleroev T.S., Aleroeva H.T. Erratum to: On the Eigenfunctions and Eigenvalues of a Class of Non-Selfadjoint Operators // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2016, vol. 37, no. 6, pp. 815.

13. Aleroev T.S., Aleroeva H.T. On the Eigenfunctions and Eigenvalues of a Class of Non-Selfadjoint Operators // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2016. Vol. 37. No. 3, pp. 227–230.
14. Aleroev T.S., Kirane M., Tang Y.-F. Boundary-value problems for differential equations of fractional order // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 10. No. 2, pp. 158-175.
15. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. - М.: Мир, 1972. 739 с.
16. Логинов Б. В. К оценке точности метода возмущений. //Известия АН УзССР. Сер. физико-математических наук. 1963. №6. С. 14-19.
17. Ларионов Е.А., Зверяев Е.М., Алероев Т.С. К теории слабого возмущения нормальных операторов.- М: Институт прикладной механики им. М.В. Келдыша, препринт № 14, 2014. - С.31.
18. Алероев Т.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с дробными производными // Дисс. доктора физ.-мат. наук. – М.: МГУ, 2000. - 120 с.
19. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1965. - 448 с.
20. Алероева Х.Т. Дробное исчисление и малые колебания механических систем // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=76821