УДК 519.977

Синтез оптимальных систем с переменной структурой при неполной информации

К.А. Рыбаков, И.Л. Сотскова

Рассматривается новый подход к решению задачи синтеза оптимальных многомерных нелинейных стохастических систем с переменной структурой при неполной информации о векторе состояния, сформулированы достаточные условия оптимальности. Приводятся соотношения для определения оптимального управления как для общего случая, так и для нахождения оптимального в среднем управления.

Постановка задачи

Система описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dX = f^{<k>}\big(t, X(t), U^{<k>}(t)\big)dt + \sigma^{<k>}\big(t, X(t), U^{<k>}(t)\big)dW,\ k = 1,2,\ldots,N;$$
$$X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, k – номер структуры, $U^{<k>} \in Q_U^{<k>} \subseteq \mathbb{R}^q$ – вектор управления k-ой структурой, $Q_U = Q_U^{<1>} \times Q_U^{<2>} \times \ldots \times Q_U^{<N>}$, $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0; $f^{<k>}(t,x,U)$ – вектор-функция размера $n \times 1$, $\sigma^{<k>}(t,x,U)$ – матричная функция размера $n \times s$, N – число структур, $t \in T = (t_0, t_1)$.

Начальное состояние системы X_0 задается плотностью вероятности $p_0^{<k>}(x)$ ($k = 1,2,\ldots,N$).

Поглощение и восстановление реализаций случайного процесса характеризуется функциями $v_{kr}(t,x)$ и $u_{rk}(t,x)$ соответственно ($k, r = 1,2,\ldots,N$), и в общем случае они определяются так:

$$v_{kr}(t,x) = \begin{cases} \mathcal{V}_{kr}(t,x)\, p^{<k>}(t,x),\ k \ne r, \\ 0,\ k = r, \end{cases}$$
$$u_{rk}(t,x) = \begin{cases} \mathcal{U}_{rk}(t,x)\, p^{<r>}(t,x),\ k \ne r, \\ 0,\ k = r, \end{cases} \tag{2}$$

где $\mathcal{V}_{kr}(t,x)$ и $\mathcal{U}_{rk}(t,x)$ – некоторые линейные безынерционные операторы, возможные аналитические выражения для которых подробно рассмотрены в [2,3], $p^{<k>}(t,x) = p(t,x,k)$ – совместная плотность вероятности смешанного вектора состояния $\begin{pmatrix} X & K \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, состоящего из компонентов вектора X и номера структуры.

В случае восстановления реализаций случайного процесса без потерь выполняется равенство $v_{kr}(t,x) = u_{kr}(t,x)$ ($k,r = 1,2,...,N$). (3)

При управлении используется информация о времени и о величине m первых компонент вектора состояния, т.е. $X = \begin{pmatrix} X_{(1)} & X_{(2)} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, $U^{<k>}(t) = U^{<k>}\left(t, X_{(1)}(t)\right)$ ($k = 1,2,...,N$), где $X_{(1)} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $X_{(2)} = \begin{pmatrix} X_{m+1} & \dots & X_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Множество допустимых управлений k-ой структурой $\mathcal{U}_m^{<k>}$ состоит из функций $U^{<k>}\left(t, x_{(1)}\right)$: $\overline{T} \times \mathbb{R}^m \to Q_U^{<k>}$ таких, что $f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\left(t,x_{(1)}\right)\right)$, $\sigma_{ir}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\left(t,x_{(1)}\right)\right)$ кусочно-непрерывны по t, $\forall t \in \overline{T}$ $f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\left(t,x_{(1)}\right)\right) \in C^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ и имеют ограниченные первые производные по x, $\sigma_{ir}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\left(t,x_{(1)}\right)\right) \in C^2\left(\mathbb{R}^n\right)$ и имеют ограниченные первые и вторые производные по x, а также $\exists c > 0$ такая, что $\forall t \in \overline{T}$, $\forall x,z \in \mathbb{R}^n$ $\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\left(t,x_{(1)}\right)\right) z_i z_j \ge c\|z\|^2$, где $g_{ij}^{<k>}(t,x,U) = \sum\limits_{r=1}^{s} \sigma_{ir}^{<k>}(t,x,U)\sigma_{jr}^{<k>}(t,x,U)$ – элементы матрицы диффузии ($i,j = 1,2,...,n$; $r = 1,2,...,s$; $k = 1,2,...,N$) (см. [6,8]).

Совместная плотность вероятности $p^{<k>}(t,x)$ удовлетворяет обобщенному уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [2,3]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial p^{<k>}(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right) p^{<k>}(t,x)\right) + \\
+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right) p^{<k>}(t,x)\right) - \sum_{r=1}^{N} v_{kr}(t,x) + \sum_{r=1}^{N} u_{rk}(t,x), \\
k = 1,2,...,N.
\end{gathered} \tag{4}$$

Начальные и краевые условия для обобщенного уравнения ФПК:

$$\begin{gathered}
p^{<k>}(t,x)\Big|_{t=t_0} = p_0^{<k>}(x), \\
p^{<k>}(t,x)\Big|_{x=\pm\infty} = 0, \\
k = 1,2,...,N.
\end{gathered} \tag{5}$$

Введем следующие классы функций: множество допустимых плотностей

$$\mathcal{P} = \left\{ p(x) = \begin{pmatrix} p^{<1>}(x) \\ \ldots \\ p^{<N>}(x) \end{pmatrix} :\ p^{<k>}(x) \geq 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots, N),\ \sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} p^{<k>}(x) dx = 1 \right\}$$

и множество допустимых управлений

$$\mathsf{U}_m = \left\{ U\left(t, x_{(1)}\right) = \begin{pmatrix} U^{<1>}\left(t, x_{(1)}\right) \\ \ldots \\ U^{<N>}\left(t, x_{(1)}\right) \end{pmatrix} :\ U^{<k>}\left(t, x_{(1)}\right) \in \mathsf{U}_m^{<k>\text{ё}},\ k = 1, 2, \ldots, N \right\}.$$

Задачу (4), (5) можно переписать в векторной форме:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = \mathsf{A}_U\, p(t,x), \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &p(t,x)\big|_{t=t_0} = p_0(x) \in \mathsf{P}, \\ &p(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где

$$\mathsf{A}_U = \begin{pmatrix} \mathsf{A}_{11} & \ldots & \mathsf{A}_{1N} \\ \ldots & & \ldots \\ \mathsf{A}_{N1} & \ldots & \mathsf{A}_{NN} \end{pmatrix},\ p(t,x) = \begin{pmatrix} p^{<1>}(t,x) \\ \ldots \\ p^{<N>}(t,x) \end{pmatrix},\ U\left(t, x_{(1)}\right) \in \mathsf{U}_m .$$

Из (2), (4) следует, что

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_{kk}\, p^{<k>}(t,x) = &-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}\left(t, x, U^{<k>}\right) p^{<k>}(t,x)\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}\left(t, x, U^{<k>}\right) p^{<k>}(t,x)\right) - \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{N} \mathsf{V}_{kr}(t,x)\, p^{<k>}(t,x)\ \ (k = 1, 2, \ldots, N), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\mathsf{A}_{kr}\, p^{<r>}(t,x) = \mathsf{U}_{rk}(t,x)\, p^{<r>}(t,x)\ \ (k, r = 1, 2, \ldots, N;\ k \neq r).$$

Пусть $\mathsf{D}_m = \left\{ d_m :\ d_m = \left(p(t,x), U\left(t, x_{(1)}\right)\right)\right\}$, где $p(t,x) \in \mathsf{P}$ (при фиксированном t) и $U\left(t, x_{(1)}\right) \in \mathsf{U}_m$ удовлетворяют уравнению (4). Введем на D_m функционал качества:

$$J\left(p_0(x), d_m\right) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\left(t, p(t,x), U\left(t, x_{(1)}\right)\right) dx dt + \theta\left(p(t_1, x)\right). \tag{9}$$

Задача 1. Требуется найти такой элемент $d_m^* = \left(p^*(t,x), U^*\left(t, x_{(1)}\right)\right) \in \mathsf{D}_m$, что

$$J\left(p_0(x), d_m^*\right) = \min_{d_m \in \mathsf{D}_m} J\left(p_0(x), d_m\right). \tag{10}$$

Задача 2. Требуется найти такую синтезирующую функцию $U^*\left(t, x_{(1)}\right) = U^*\left(t, x_{(1)}, p(x)\right)$, что

$$J\left(p_0(x), d_m^*\right) = \min_{d_m \in \mathsf{D}_m} J\left(p_0(x), d_m\right) \quad \forall p_0(x) \in \mathsf{P}, \tag{11}$$

т.е. оптимальная синтезирующая функция является функционалом по плотности вероятности $p(x)$.

Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим класс $\mathcal{S}$ функций $S\big(t, p(x)\big)\colon T \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых по t на T и имеющих непрерывные вариационные производные [5,6] по $p^{<k>}(x)$ ($k = 1, 2, ..., N$). Определим на $\mathcal{S}$ следующие конструкции:

$$R\big(t, p(x), U\big) = \frac{\partial S\big(t, p(x)\big)}{\partial t} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\left[\frac{\delta S\big(t, p(\xi)\big)}{\delta p(x)} \right]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_U p(x) - \omega\big(t, p(x), U\big) \right) dx, \tag{12}$$

$$G\big(t_1, p(x)\big) = S\big(t_1, p(x)\big) + \theta\big(p(x)\big). \tag{13}$$

Предположим, что при некотором заданном m функции $R\big(t, p(x), U\big)$ и $G\big(t_1, p(x)\big)$ достигают экстремальных значений:

$$r_m(t) = \max_{p(x)\in\mathcal{P}} \left\{ \frac{\partial S\big(t, p(x)\big)}{\partial t} + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \max_{U\in Q_U} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \left(\big[p(x)\big]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_U^* \left[\frac{\delta S\big(t, p(\xi)\big)}{\delta p(x)} \right] - \omega\big(t, p(x), U\big) \right) dx_{(2)} \right\} dx_{(1)} \right\}, \tag{14}$$

$$g = \min_{p(x)\in\mathcal{P}} \left\{ S\big(t_1, p(x)\big) + \theta\big(p(x)\big) \right\}. \tag{15}$$

В выражении (14) через $\mathcal{A}_U^*$ обозначен сопряженный оператор системы обобщенных уравнений ФПК:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \big[\phi(t,x)\big]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_U p(t,x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big[p(t,x)\big]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_U^* \phi(t,x)\, dx,$$

где $\mathcal{A}_U^* = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}^* & \dots & \mathcal{A}_{N1}^* \\ \dots & & \dots \\ \mathcal{A}_{1N}^* & \dots & \mathcal{A}_{NN}^* \end{pmatrix}$, $\phi(t,x) = \begin{pmatrix} \phi^{<1>}(t,x) \\ \dots \\ \phi^{<N>}(t,x) \end{pmatrix}$;

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{kk}^* \phi^{<k>}(t,x) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{<k>}\big(t, x, U^{<k>}\big) \frac{\partial \phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{<k>}\big(t, x, U^{<k>}\big) \frac{\partial^2 \phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq k}}^{N} \mathcal{V}_{kr}^*(t,x) \phi^{<k>}(t,x) \ \big(k = 1, 2, ..., N\big), \\ \mathcal{A}_{kr}^* \phi^{<k>}(t,x) = \mathcal{U}_{rk}^*(t,x) \phi^{<k>}(t,x) \ \big(k, r = 1, 2, ..., N;\ k \neq r\big). \end{gathered} \tag{16}$$

Рассмотрим возможные случаи задания операторов $\mathcal{V}_{kr}(t,x)$, $\mathcal{U}_{rk}(t,x)$ и сопряженных с ними при $k \neq r$. Перепишем уравнение (4) следующим образом [2]:

$$\begin{gathered} \frac{\partial p^{<k>}(t,x)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{<k>}(t,x) - \sum_{r=1}^{N} v_{kr}(t,x) + \sum_{r=1}^{N} u_{rk}(t,x), \\ k = 1, 2, ..., N, \end{gathered} \tag{17}$$

где $\pi^{<k>}(t,x)$ – вектор плотности потока вероятности, компоненты которого определяются формулой:

$$\pi_i^{<k>}(t,x) = f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)p^{<k>}(t,x) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)p^{<k>}(t,x)\right) \quad \left(i=1,2,...,n;\ k=1,2,...,N\right). \tag{18}$$

Если переход из состояния (структуры) с номером k в состояние r происходит на границе гиперповерхности $\Gamma = \left\{(t,x)\in T\times\mathbb{R}^n:\ \gamma(t,x)=0\right\}$, то функция поглощения имеет вид:

$$v_{kr}(t,x) = \delta\left(\gamma(t,x)\right)\cdot\left(n^0,\pi^{<k>}(t,x)\right), \tag{19}$$

где n^0 – орт внешней нормали к гиперповерхности Γ.

При поглощении реализаций случайного процесса в области $W\subset\mathbb{R}^n$ возможны два варианта:

$$v_{kr}(t,x) = \begin{cases} c_0^{<kr>}(x)\,p^{<k>}(t,x),\ x\in W, \\ 0,\ x\notin W, \end{cases} \tag{20}$$

или

$$v_{kr}(t,x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i^{<kr>}(x)\,\pi_i^{<k>}(t,x),\ x\in W, \\ 0,\ x\notin W, \end{cases} \tag{21}$$

где функции $c_i^{<kr>}(x)$ ($0 < c_i^{<kr>}(x) < 1$, $i=0,1,...,n$) характеризуют интенсивности переходов [2].

Также возможны поглощения типа условных марковских переходов:

$$v_{kr}(t,x) = \lambda_{kr}(t\,|\,x)\,p^{<k>}(t,x). \tag{22}$$

Принимая во внимание вид выражений (19)-(22), достаточно рассмотреть два случая. В первом $v_{kr}(t,x) = \vartheta_{kr}(t,x)\,p^{<k>}(t,x)$, и тогда

$$\begin{gathered} V_{kr}(t,x)\,p^{<k>}(t,x) = \vartheta_{kr}(t,x)\,p^{<k>}(t,x), \\ V_{kr}^{*}(t,x)\,\phi^{<k>}(t,x) = \vartheta_{kr}(t,x)\,\phi^{<k>}(t,x), \end{gathered} \tag{23}$$

а во втором случае $v_{kr}(t,x) = \sum_{i=1}^{n}\mu_i^{<kr>}(t,x)\,\pi_i^{<k>}(t,x)$:

$$\begin{gathered} V_{kr}(t,x)\,p^{<k>}(t,x) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\mu_i^{<kr>}(t,x)\left(f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)p^{<k>}(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)p^{<k>}(t,x)\right)\right), \\ V_{kr}^{*}(t,x)\,\phi^{<k>}(t,x) = \\ = \sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i^{<kr>}(t,x)\,f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\phi^{<k>}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu_i^{<kr>}(t,x)\,\phi^{<k>}(t,x)\right)\right). \end{gathered} \tag{24}$$

Выражения для операторов $\mathsf{U}_{rk}(t,x)$ аналогичны (23) или (24), т.к. функции поглощения и восстановления связаны между собой соотношением $v_{kr}(t,x)=\chi_{kr}(t,x)u_{kr}(t,x)$, в котором $0\le\chi_{kr}(t,x)\le 1$ (в частном случае при восстановлении реализаций без потерь $\chi_{kr}(t,x)\equiv 1$).

Теорема 1 (достаточные условия оптимальности в задаче 1).

Если существует $S(t,p(x))\in\mathsf{S}$ такая, что элемент $d_m^*\in\mathsf{D}_m$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $R\left(t,p^*(t,x),U^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)=r_m(t)$ почти всюду на T; (25)

2. $G\left(t_1,p^*(t_1,x)\right)=g$, (26)

то справедливо условие (10).

Не ограничивая общности, можно положить $r_m(t)$ и g равными нулю, тогда можно вычислить минимум функционала (9):

$$J\left(p_0(x),d_m^*\right)=-S\left(t_0,p_0(x)\right). \tag{27}$$

Пусть в (14), (15) отсутствуют операции максимизации и минимизации по $p(x)\in\mathsf{P}$, тогда учитывая, что $r_m(t)\equiv 0$ и $g=0$, можно сформулировать достаточные условия оптимальности в задаче 2.

Теорема 2 (достаточные условия оптимальности в задаче 2).

Если существует $S(t,p(x))\in\mathsf{S}$ и $U^*\left(t,x_{(1)},p(x)\right)$ такие, что $\forall t\in T,\forall p(x)\in\mathsf{P}$:

1. $$\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t}+\int_{\mathsf{i}^m}\max_{U\in Q_U}\left\{\int_{\mathsf{i}^{n-m}}\left(\left[p(x)\right]^{\mathrm{T}}\mathsf{A}_U^*\left[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right]-\omega(t,p(x),U)\right)dx_{(2)}\right\}dx_{(1)}=0; \tag{28}$$

2. $$S\left(t_1,p(x)\right)=-\theta\left(p(x)\right), \tag{29}$$

то справедливо условие (11).

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на принцип расширения Кротова [1,4] и проводится аналогично случаю моноструктурных стохастических систем [6].

Из условий (14), (25) можно получить структуру оптимального управления:

$$U^*\left(t,x_{(1)}\right)=\arg\max_{U\in Q_U}\left\{\int_{\mathsf{i}^{n-m}}\left(\left[p^*(t,x)\right]^{\mathrm{T}}\mathsf{A}_U^*\left[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right]-\omega\left(t,p^*(t,x),U\right)\right)dx_{(2)}\right\}. \tag{30}$$

При отсутствии информации о векторе состояния оптимальное программное управление определяется так:

$$U^*(t)=\arg\max_{U\in Q_U}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left[p^*(t,x)\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_U^*\left[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right]-\omega\left(t,p^*(t,x),U\right)\right)dx\right\}, \tag{31}$$

а при наличии полной информации

$$U^*(t,x)=\arg\max_{U\in Q_U}\left\{\left[p^*(t,x)\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_U^*\left[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right]-\omega\left(t,p^*(t,x),U\right)\right\}. \tag{32}$$

Применим необходимые условия экстремума в (12), (13):

$$\frac{\delta R\left(t,p^*(t,x),U^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)}{\delta p(x)}=0, \tag{33}$$

$$\frac{\delta G\left(t_1,p^*(t,x)\right)}{\delta p(x)}=0, \tag{34}$$

тогда из (33) следует, что

$$\frac{\delta S_t(t,p(\xi))}{\delta p(x)}=-\frac{\delta H\left(t,p^*(t,x),U^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)}{\delta p(x)}, \tag{35}$$

а из (34) следует, что

$$\frac{\delta S(t_1,p(\xi))}{\delta p(x)}=-\frac{\delta\theta\left(p^*(t,x)\right)}{\delta p(x)}, \tag{36}$$

где

$$S_t(t,p(x))=\frac{\partial S(t,p(x))}{\partial t},\ H(t,p(x),U)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\left[p(x)\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_U^*\left[\frac{\delta S(t,p(\xi))}{\delta p(x)}\right]-\omega\left(t,p(x),U\right)\right)dx.$$

В соотношениях (30)-(36) плотность вероятности $p^*(t,x)$ является решением задачи (6), (7), а конкретный вид уравнений (35), (36) зависит от задания функции $S(t,p(x))\in\mathcal{S}$.

Рассмотрим частный случай, когда функционал (9) является линейным по плотности:

$$J\left(p_0(x),d_m\right)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\omega\left(t,x,U^{<k>}\left(t,x_{(1)}\right)\right)\right]^{\mathrm{T}}p(t,x)\,dxdt+\int_{\mathbb{R}^n}\left[\theta(x)\right]^{\mathrm{T}}p(t_1,x)\,dx, \tag{37}$$

где

$$\omega(t,x,U)=\begin{pmatrix}\omega^{<1>}\left(t,x,U^{<1>}\right)\\ \dots\\ \omega^{<N>}\left(t,x,U^{<N>}\right)\end{pmatrix},\ \theta(x)=\begin{pmatrix}\theta^{<1>}(x)\\ \dots\\ \theta^{<N>}(x)\end{pmatrix};$$

т.е. рассматривается задача синтеза оптимального в среднем управления:

$$J\left(p_0(x),d_m\right)=\mathrm{M}\left[\sum_{k=1}^{N}\left(\int_{t_0}^{t_1}\omega^{<k>}\left(t,X(t),U^{<k>}\left(t,X_{(1)}(t)\right)\right)dt+\theta^{<k>}\left(X(t_1)\right)\right)\right]. \tag{38}$$

В этом случае функцию $S\left(t,p(x)\right)\in\mathcal{S}$ достаточно искать в виде:

$$S\left(t,p(x)\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\left[\phi(t,x)\right]^{\mathrm{T}}p(x)dx, \tag{39}$$

где $\phi(t,x)=\begin{pmatrix}\phi^{<1>}(t,x)\\ \ldots\\ \phi^{<N>}(t,x)\end{pmatrix}$ – неизвестная функция, т.е.

$$S\left(t,p(x)\right)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}\phi^{<k>}(t,x)p^{<k>}(x)dx,$$

тогда, учитывая, что $\dfrac{\delta S\left(t,p(\xi)\right)}{\delta p(x)}=\phi(t,x)$, выражение для $H\left(t,p(x),U\right)$ примет вид:

$$H\left(t,p(x),U\right)=\int_{\mathbb{R}^n}\left[p(x)\right]^{\mathrm{T}}\left(\mathcal{A}_U^*\phi(t,x)-\omega(t,x,U)\right)dx, \tag{40}$$

или в координатной форме:

$$\begin{aligned}H\left(t,p(t,x),U\right)&=\sum_{\substack{k,r=1\\k\neq r}}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}p^{<r>}(t,x)\mathcal{A}_{kr}^*\phi^{<k>}(t,x)dx+\\&+\int_{\mathbb{R}^n}p^{<1>}(t,x)\left(\mathcal{A}_{11}^*\phi^{<1>}(t,x)-\omega^{<1>}\left(t,x,U^{<1>}\right)\right)dx+\\&+\int_{\mathbb{R}^n}p^{<2>}(t,x)\left(\mathcal{A}_{22}^*\phi^{<2>}(t,x)-\omega^{<2>}\left(t,x,U^{<2>}\right)\right)dx+\\&+\ldots+\int_{\mathbb{R}^n}p^{<N>}(t,x)\left(\mathcal{A}_{NN}^*\phi^{<N>}(t,x)-\omega^{<N>}\left(t,x,U^{<N>}\right)\right)dx.\end{aligned} \tag{41}$$

Перепишем (35), (36) с учетом (39):

$$\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}=-\frac{\delta H\left(t,p^*(t,x),U^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)}{\delta p(x)},\ \phi(t_1,x)=-\theta(x). \tag{42}$$

Из (30), (37) и того факта, что в общем случае от управления могут зависеть все элементы $\mathcal{A}_U^*$ (см. (16)), можно записать структуру оптимального управления для всех $k=1,2,\ldots,N$:

$$\begin{aligned}U^{*<k>}\left(t,x_{(1)}\right)&=\arg\max_{U^{<k>}\in Q_U^{<k>}}\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left(\sum_{i=1}^{n}f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial^2\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\right.\right.\\&\left.\left.-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathcal{V}_{kr}^*(t,x)\phi^{<k>}(t,x)+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathcal{U}_{kr}^*(t,x)\phi^{<r>}(t,x)-\omega^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\right)p_{(2|1)}^{*<k>}\left(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\right)dx_{(2)}\right\},\end{aligned} \tag{43}$$

где

$$p_{(2|1)}^{<k>}\left(t,x_{(2)} \mid x_{(1)}\right)=\frac{p^{<k>}(t,x)}{p_{(1)}^{<k>}\left(t,x_{(1)}\right)},\ p_{(1)}^{<k>}\left(t,x_{(1)}\right)=\int\limits_{\mathrm{i}^{n-m}} p^{<k>}(t,x)\,dx_{(2)}\ , \tag{44}$$

а из (6), (7), (41), (42) получаем соотношения:

$$\frac{\partial p^*(t,x)}{\partial t}=\mathsf{A}_{U^*}p^*(t,x),\ p^*(t,x)\Big|_{t=t_0}=p_0(x),\ p^*(t,x)\Big|_{x=\pm\infty}=0; \tag{45}$$

$$\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t}=-\mathsf{A}_{U^*}^{*}\phi(t,x)+\omega\left(t,x,U^*\right),\ \phi(t,x)\Big|_{t=t_1}=-\theta(x). \tag{46}$$

В координатной форме формулы (45), (46) примут вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial p^{*<k>}(t,x)}{\partial t}&=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}\left(t,x,U^{*<k>}\right)p^{*<k>}(t,x)\right)+\\&+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{*<k>}\right)p^{*<k>}(t,x)\right)-\\&\quad-\sum_{\substack{r=1\\r\neq k}}^{N}\mathsf{V}_{kr}(t,x)\,p^{*<k>}(t,x)+\sum_{\substack{r=1\\r\neq k}}^{N}\mathsf{U}_{rk}(t,x)\,p^{*<r>}(t,x),\end{aligned} \tag{47}$$

$$p^{*<k>}(t,x)\Big|_{t=t_0}=p_0^{<k>}(x),\ \ p^{*<k>}(t,x)\Big|_{x=\pm\infty}=0,\ k=1,2,...,N;$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \phi^{<k>}(t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}f_i^{<k>}\left(t,x,U^{*<k>}\right)\frac{\partial \phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{*<k>}\right)\frac{\partial^2\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\\&\quad-\sum_{\substack{r=1\\r\neq k}}^{N}\mathsf{V}_{kr}^{*}(t,x)\phi^{<k>}(t,x)+\sum_{\substack{r=1\\r\neq k}}^{N}\mathsf{U}_{kr}^{*}(t,x)\phi^{<r>}(t,x)-\omega^{<k>}\left(t,x,U^{*<k>}\right)=0,\end{aligned} \tag{48}$$

$$\phi^{<k>}(t,x)\Big|_{t=t_1}=-\theta^{<k>}(x),\ k=1,2,...,N.$$

Таким образом, для определения оптимального управления необходимо решить систему (43), (44), (47), (48). После определения функций $\phi^{<k>}(t,x)$ можно вычислить минимум функционала:

$$J\left(p_0(x),d_m^*\right)=-\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{\mathrm{i}^{n}}\phi^{<k>}(t_0,x)\,p_0^{<k>}(x)\,dx\ . \tag{49}$$

Рассмотрим предельные случаи информированности. Пусть $m=0$, тогда структура оптимального программного управления имеет вид ($k=1,2,...,N$):

$$\begin{aligned}U^{*<k>}(t)=\arg\max_{U^{<k>}\in Q_U^{<k>}}\Bigg\{\int\limits_{\mathrm{i}^{n}}\Bigg(&\sum_{i=1}^{n}f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial^2\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\\-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathsf{V}_{kr}^{*}(t,x)\phi^{<k>}(t,x)+&\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathsf{U}_{kr}^{*}(t,x)\phi^{<r>}(t,x)-\omega^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\Bigg)p^{*<k>}(t,x)\,dx\Bigg\},\end{aligned} \tag{50}$$

т.е. соотношения (47), (48), (50) определяют аналог стохастического принципа максимума [6] для систем с переменной структурой.

При $m=n$ для определения оптимального управления с полной обратной связью нужно решить следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\max_{U^{<k>}\in Q_U^{<k>}}\left\{\frac{\partial\phi^{<k>}(t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial^2\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\omega^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)-$$
$$\left.-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathsf{V}_{kr}^{*}(t,x)\phi^{<k>}(t,x)+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathsf{U}_{kr}^{*}(t,x)\phi^{<r>}(t,x)\right\}=0,\ k=1,2,...,N;$$

(51)

с граничным условием $\phi^{<k>}(t,x)\Big|_{t=t_1}=-\theta^{<k>}(x),\ k=1,2,...,N$. (52)

Структура оптимального управления с полной обратной связью:

$$U^{*<k>}(t,x)=\arg\max_{U^{<k>}\in Q_U^{<k>}}\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+\right.$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\frac{\partial^2\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\omega^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)- \qquad (53)$$
$$\left.-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathsf{V}_{kr}^{*}(t,x)\phi^{<k>}(t,x)+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathsf{U}_{kr}^{*}(t,x)\phi^{<r>}(t,x)\right\},\ k=1,2,...,N.$$

Для нахождения управления с полной обратной связью нет необходимости решать систему обобщенных уравнений ФПК (47). Полученные соотношения (51)-(53) аналогичны уравнению Беллмана для стохастических систем [6].

Замечание. Соотношения (35), (36) получены с использованием только необходимых условий экстремума. Однако из теоремы 2 при $m=n$ следует, что для синтеза оптимального управления достаточно разрешить систему обобщенных уравнений Беллмана (51), (52). Поскольку из соотношений (28), (29) при условии (37), (39) получается равенство:

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^n} p^{<k>}(x)\left\{\frac{\partial\phi^{<k>}(t,x)}{\partial t}+\max_{U^{<N>}\in Q_U^{<N>}}\left\{\sum_{r=1}^{N}\mathsf{A}_{rk}^{*}\phi^{<r>}(t,x)-\omega^{<k>}\left(t,x,U^{<k>}\right)\right\}\right\}dx,$$

которое выполняется при любой плотности $p(x)\in\mathsf{P}$, и условие $\phi^{<k>}(t_1,x)=-\theta^{<k>}(x)$ ($\forall x\in\mathbb{R}^n,\ k=1,2,...,N$), следовательно, справедлива система (51), (52).

Окончательный вид уравнений (47), (48), (51) получается при подстановке $\mathsf{V}_{kr}(t,x)$ и $\mathsf{U}_{rk}(t,x)$ в зависимости от типа переходов между структурами (см. (23), (24)).

Синтез оптимальных линейных регуляторов

Рассмотрим задачу синтеза линейной стохастической системы с полной обратной связью:

$$\begin{aligned}&dX = \left(A^{<k>}(t)X(t) + B^{<k>}(t)U^{<k>}(t) + C^{<k>}(t)\right)dt + D^{<k>}(t)dW,\ k = 1,2,...,N;\\&X(t_0) = X_0,\end{aligned} \tag{54}$$

и квадратичным критерием

$$\begin{aligned}J\left(p_0(x), d_m\right) &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n}\left(x^{\mathrm{T}}S^{<k>}(t)x + \left[U^{<k>}\right]^{\mathrm{T}}Q^{<k>}(t)U^{<k>}\right)p^{<k>}(t,x)\,dx\,dt +\\&+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}\left(x^{\mathrm{T}}R^{<k>}x\right)p(t_1,x)\,dx,\end{aligned} \tag{55}$$

т.е. для всех $k = 1,2,...,N$ коэффициенты сноса и диффузии [2] определяются так:

$$\begin{aligned}&f^{<k>}(t,x,U) = A^{<k>}(t)x + B^{<k>}(t)U + C^{<k>}(t),\\&\sigma^{<k>}(t,x,U) = D^{<k>}(t),\end{aligned} \tag{56}$$

а для функций $\omega^{<k>}(t,x,U)$ и $\theta^{<k>}(x)$ ($k = 1,2,...,N$) справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}&\omega^{<k>}(t,x,U) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}S^{<k>}(t)x + \frac{1}{2}U^{\mathrm{T}}Q^{<k>}(t)U,\\&\theta^{<k>}(x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}R^{<k>}x,\end{aligned} \tag{57}$$

где $A^{<k>}(t),\ B^{<k>}(t),\ C^{<k>}(t),\ D^{<k>}(t)$ – матрицы размера $n\times n,\ n\times q,\ n\times 1,\ n\times s$ соответственно, $S^{<k>}(t),\ R^{<k>}$ – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера $n\times n$, а $Q^{<k>}(t)$ – положительно определенная симметрическая матрица размера $q\times q$; ограничения на управление отсутствуют.

Функции поглощения имеют вид безусловного марковского перехода, а восстановление реализаций происходит без потерь [2,3]:

$$v_{kr}(t,x) = u_{kr}(t,x) = \lambda_{kr}(t)\,p^{<k>}(t,x),\ k \ne r\ . \tag{58}$$

Перепишем уравнение (51) в векторной форме с учетом (56)-(58) и правила (23):

$$\begin{aligned}\max_{U^{<k>}\in Q_U^{<k>}}&\left\{\frac{\partial\phi^{<k>}(t,x)}{\partial t} + \left[\frac{\partial\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}\left(A^{<k>}(t)x + B^{<k>}(t)U^{<k>} + C^{<k>}(t)\right) +\right.\\&+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(D^{<k>}(t)\left[D^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\phi^{<k>}(t,x)}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}S^{<k>}(t)x - \frac{1}{2}\left[U^{<k>}\right]^{\mathrm{T}}Q^{<k>}(t)U^{<k>} -\\&\left.-\sum_{\substack{r=1\\r\ne k}}^{N}\lambda_{kr}(t)\phi^{<k>}(t,x) + \sum_{\substack{r=1\\r\ne k}}^{N}\lambda_{kr}(t)\phi^{<r>}(t,x)\right\} = 0,\ k = 1,2,...,N,\end{aligned} \tag{59}$$

или кратко $\max\limits_{U^{<k>}\in Q_U^{<k>}}\left\{\Phi^{<k>}\left(U^{<k>}\right)\right\} = 0$.

Используя необходимые условия экстремума, получаем структуру оптимального управления:

$$U^{*<k>}(t,x) = \left[Q^{<k>}(t)\right]^{-1}\left[B^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}} \frac{\partial \phi^{<k>}(t,x)}{\partial x},\ k = 1,2,...,N\ , \tag{60}$$

Вследствие положительной определенности $Q^{<k>}(t)$ также выполняются достаточные условия, поэтому $\Phi^{<k>}\left(U^{<k>}\right)$ достигает максимального значения при $U^{<k>} = U^{*<k>}(t,x)$.

Для решения уравнения (59) будем искать функцию $\phi^{<k>}(t,x)$ в виде:

$$\phi^{<k>}(t,x) = \frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\xi^{<k>}(t)x + x^{\mathrm{T}}\eta^{<k>}(t) + \zeta^{<k>}(t), \tag{61}$$

где $\xi^{<k>}(t)$ – симметрическая матрица размера $n\times n$, $\eta^{<k>}(t)$ – вектор размера $n\times 1$, а $\zeta^{<k>}(t)$ – скалярная функция.

После подстановки (60), (61) в (52), (59) получается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}&\frac{d\xi^{<k>}(t)}{dt} + \xi^{<k>}(t)A^{<k>}(t) + \left[A^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\xi^{<k>}(t) + \\ &\quad + \xi^{<k>}(t)B^{<k>}(t)\left[Q^{<k>}(t)\right]^{-1}\left[B^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\xi^{<k>}(t) - S^{<k>}(t) - \\ &\qquad - \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{N}\lambda_{kr}(t)\xi^{<k>}(t) + \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{N}\lambda_{kr}(t)\xi^{<r>}(t) = 0,\quad \xi^{<k>}(t_1) = -R^{<k>};\end{aligned} \tag{62}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\eta^{<k>}(t)}{dt} + \left[A^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\eta^{<k>}(t) + \xi^{<k>}(t)C^{<k>}(t) + \\ &\quad + \xi^{<k>}(t)B^{<k>}(t)\left[Q^{<k>}(t)\right]^{-1}\left[B^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\eta^{<k>}(t) - \\ &\qquad - \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{N}\lambda_{kr}(t)\eta^{<k>}(t) + \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{N}\lambda_{kr}(t)\eta^{<r>}(t) = 0,\quad \eta^{<k>}(t_1) = 0;\end{aligned} \tag{63}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d\zeta^{<k>}(t)}{dt} + \left[C^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\eta^{<k>}(t) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(D^{<k>}(t)\left[D^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\xi^{<k>}(t)\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\eta^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}B^{<k>}(t)\left[Q^{<k>}(t)\right]^{-1}\left[B^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\eta^{<k>}(t) - \\ &\qquad - \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{N}\lambda_{kr}(t)\zeta^{<k>}(t) + \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{N}\lambda_{kr}(t)\zeta^{<r>}(t) = 0,\quad \zeta^{<k>}(t_1) = 0;\end{aligned} \tag{64}$$

$k = 1,2,...,N$.

Вычислив функции $\xi^{<k>}(t)$, $\eta^{<k>}(t)$, $\zeta^{<k>}(t)$ можно найти оптимальное управление:

$$U^{*<k>}(t,x) = \left[Q^{<k>}(t)\right]^{-1}\left[B^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\left(\xi^{<k>}(t)x + \eta^{<k>}(t)\right),\ k = 1,2,...,N, \tag{65}$$

а из (49) следует, что $J\left(p_0(x), d_m^*\right) = -\sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} x^{\mathrm{T}} \xi^{<k>}(t_0) x + x^{\mathrm{T}} \eta^{<k>}(t_0) + \zeta^{<k>}(t_0) \right) p_0^{<k>}(x) dx$, или, используя формулу для вычисления нормированных математического ожидания $\mu_0^{<k>}$ и ковариационной матрицы $\psi_0^{<k>}$ начального состояния X_0, окончательно получим:

$$
\begin{aligned}
&J\left(p_0(x), d_m^*\right) = \\
&\quad = -\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(\psi_0^{<k>} \xi^{<k>}(t_0)\right) + \frac{1}{2} \left[\mu_0^{<k>}\right]^{\mathrm{T}} \xi^{<k>}(t_0) \mu_0^{<k>} + \left[\mu_0^{<k>}\right]^{\mathrm{T}} \eta^{<k>}(t_0) + \zeta^{<k>}(t_0) \right) P^{<k>}(t_0),
\end{aligned}
\tag{66}
$$

где $P^{<k>}(t_0)$ – вероятность нахождения системы в k-ом состоянии в начальный момент времени [2,7].

При $C^{<k>}(t) \equiv 0$ формулы (63)-(66) существенно упрощаются (т.к. в этом случае $\eta^{<k>}(t) \equiv 0$):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\zeta^{<k>}(t)}{dt} + \frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(D^{<k>}(t) \left[D^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}} \xi^{<k>}(t) \right) - \\
&\quad - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{N} \lambda_{kr}(t) \zeta^{<k>}(t) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{N} \lambda_{kr}(t) \zeta^{<r>}(t) = 0, \quad \zeta^{<k>}(t_1) = 0;
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
U^{*<k>}(t,x) = \left[Q^{<k>}(t)\right]^{-1} \left[B^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}} \xi^{<k>}(t) x, \ k = 1,2,\ldots,N;
\tag{68}
$$

$$
J\left(p_0(x), d_m^*\right) = -\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{2} \mathrm{tr}\left(\psi_0^{<k>} \xi^{<k>}(t_0)\right) + \frac{1}{2} \left[\mu_0^{<k>}\right]^{\mathrm{T}} \xi^{<k>}(t_0) \mu_0^{<k>} + \zeta^{<k>}(t_0) \right) P^{<k>}(t_0).
\tag{69}
$$

Пример. Дана линейная одномерная система с двумя структурами:

$$
\begin{cases}
dX = \left(X(t) + U^{<1>}(t) + 1\right) dt + dW, \\
dX = U^{<2>}(t) dt + dW, \\
t \in [0,1], \ x \in \mathbb{R},
\end{cases}
$$

заданы начальные и краевые условия:

$$
\begin{aligned}
&p^{<1>}(t,x)\Big|_{t=0} = N(x; \mu = 0; \sigma = 1), \ p^{<2>}(t,x)\Big|_{t=0} = 0, \\
&p^{<1>}(t,x)\Big|_{x=\pm\infty} = p^{<2>}(t,x)\Big|_{x=\pm\infty} = 0,
\end{aligned}
$$

а переходы между структурами задаются с помощью функций $\lambda_{12}(t), \ \lambda_{21}(t)$ (см. (58)):

$\lambda_{12}(t) = 0.4e^{-0.4t}, \ \lambda_{21}(t) = 0.6e^{-0.6t}, \ t \geq 0$.

Критерий оптимальности задается следующим образом:

$$
J\left(p_0(x), d_m\right) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left(x^2 + \left(U^{<1>}(t,x)\right)^2 \right) p^{<1>}(t,x) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left(U^{<2>}(t,x)\right)^2 p^{<2>}(t,x) dx dt \to \min_{d_m \in \mathcal{D}_m}.
$$

Для решения системы (62)-(64) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности с шагом по времени $h_t = 0.01$ (рис. 1):

а) б) в)

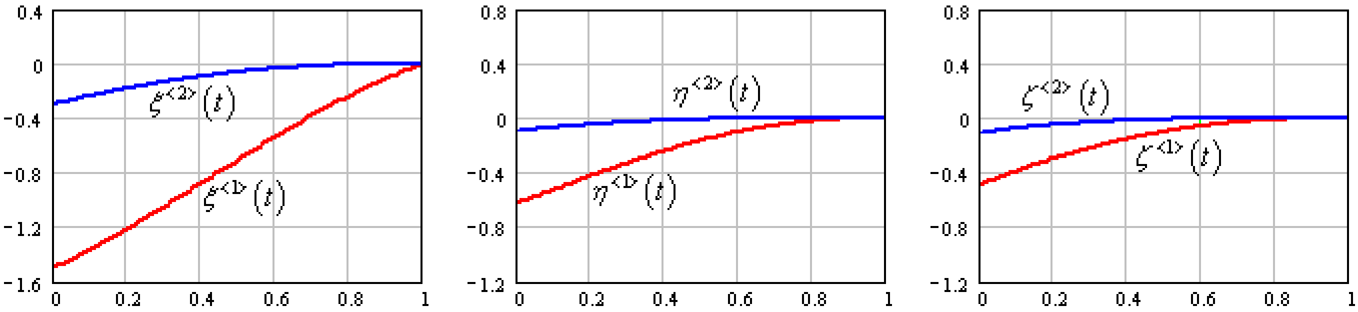
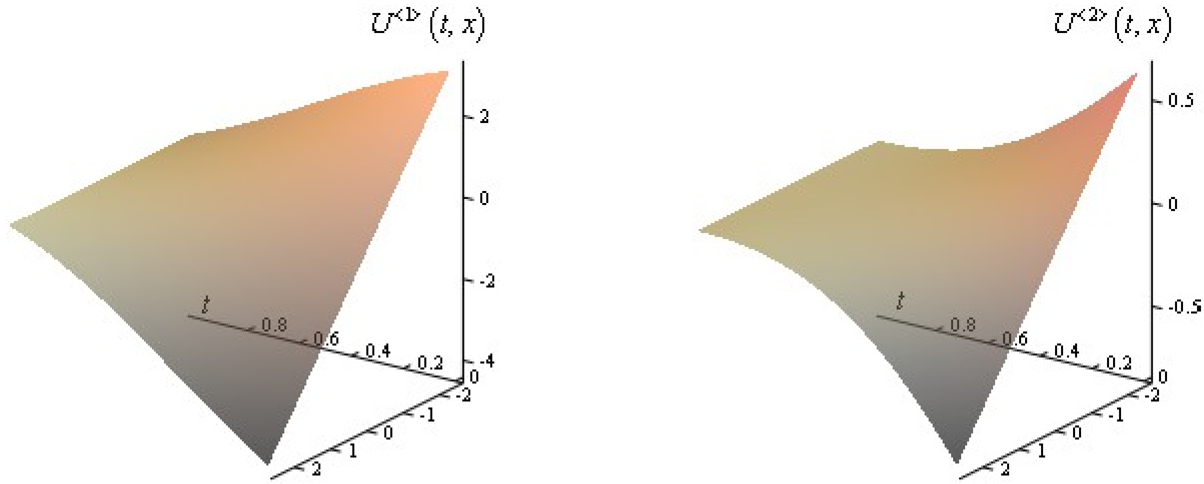


Рис. 1. Графики функций $\xi^{<k>}(t)$, $\eta^{<k>}(t)$, $\zeta^{<k>}(t)$ ($k = 1,2$).

Далее по формуле (65) можно найти оптимальное управление (рис. 2):



а) б)

Рис. 2. Оптимальное управление с полной обратной связью.

В рассматриваемом примере $J\left(p_0(x), d_m^*\right) \cong 1.2$.

Список литературы

1. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
2. Казаков И.Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Казаков И.Е., Артемьев В.М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
5. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 478 с.
6. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. – М.: МАИ, 1992. – 192 с.
7. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Анализ систем с переменной структурой в классе обобщенных характеристических функций. // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2003, № 11. – http://www.mai.ru (11.04.03).
8. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 318 с.
9. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

Рыбаков Константин Александрович, аспирант кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета);
E-mail: rkmaster@mail.ru

Сотскова Ирина Леонидовна, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.;
Контактный телефон: 158-48-11