УДК 531.383

# Выражение методической ошибки измерения волновым твердотельным гироскопом с дифференцированием

А. А. Захаров.

Измерения отдельными каналами интегрирующих волновых твердотельных гироскопов с дифференцированием (ВТГ-ИГД) с заданием постоянной угловой скорости ($\Omega_{п}$) обнаружили периодическую помеху с преобладающей гармоникой, амплитуда и частота которой пропорциональны $\Omega_{п}$. Такое явление может быть вызвано некачественными формированием и (или) преобразованием сигналов, поступающих от датчиков угла ($\theta$) положения стоячей волны по двум каналам. При этом выходные сигналы функционально могут иметь вид: $A_s=A_1\cdot\sin 2\theta + c_1$, $A_c=A_2\cdot\cos 2\theta + c_2$, и возникает периодическая ошибка $\Delta\theta(\theta)$. Показано, что амплитуда гармоники $\sin 4\theta$ пропорциональна $|A_1–A_2|/(A_1+A_2)$. Получены функции измеренных углов $\theta$ и $\psi$ (поворота основания гироскопа) от $\theta$ и зависимости измеренных углов $\psi$, приращений угла $\psi$, скорости изменения $\psi$ от времени при задании $\Omega_{п}$. Проведён анализ опытных параметров помехи.

Ключевые слова: методическая ошибка, периодическая помеха, интегрирующий волновой твердотельный гироскоп, интегрирующий волновой твердотельный гироскоп с цифровым дифференцированием, измеренные (подсчитанные) значения, угол положения стоячей волны, угол поворота, угловая скорость.

## 1. Задача исследования

В последнее время для угловой ориентации движущихся объектов в системах управления и навигации подвижных объектов, находит применение интегрирующий волновой твердотельный гироскоп с дифференцированием (ВТГ-ИГД) [1]. Чувствительный элемент ВТГ-ИГД представляет собой упругую тонкую оболочку вращения – резонатор, предназначенный для поддержания в нем незатухающих механических колебаний оболочки в виде стоячей волны. На основании, под резонатором, установлены датчики углового положения волны. В качестве них используются датчики радиального перемещения оболочки резонатора. Сигналы датчиков усиливаются и складываются таким образом, что в результате по выходам каналов «As» и «Ac» образуются два оцифрованных сигнала $A_s$ и $A_c$ (например [мВ]), соответственно зависящие от $\sin 2\theta$ и $\cos 2\theta$ (где $\theta$ [рад] – угол положения стоячей волны, угол ориентации пучностей волны, относительно основания). Исходя из уровней $A_s$, $A_c$, при штатной работе резонатора в режиме параметрического возбуждения, электронный вычислительный блок (ВБ) ВТГ-ИГД непрерывно подсчитывает значения угла $\theta$ и значения угла ($\psi$ [рад]) поворота основания гироскопа вокруг его оси чувствительности (оси резонатора) относительно инерциального пространства. Подсчёт значений $\psi$ (положительное направление $\theta$ отсчитывается в направлении угла $\psi$) осуществляется в соответствии с известной [2,3] формулой

$$\psi = -\theta/K, \qquad (1.1)$$

где K – масштабный коэффициент ВТГ, по данным [2,3] K= 0,28…0,31.

Во внешние устройства ВТГ-ИГД выдаёт информацию в виде последовательностей приращений ($\delta\psi$ [рад]) измеренных (подсчитанных) значений угла $\psi$ и измеренных (подсчитанных) значений проекций ($\Omega$ [рад/с]) абсолютной угловой скорости поворота гироскопа на его ось чувствительности. Значения $\delta\psi$, $\Omega$ выдаются циклически (с частотой от 100 до 600 Гц), через интервалы времени $T_{ц}$ обновления информации. Расчет информации «$\delta\psi$, $\Omega$» осуществляется в блоке ВБ цифровым дифференцированием по времени (t [c]) последовательности измеренных значений угла $\psi$. В полностью скомплектованном навигационном приборе имеются три резонатора, установленные взаимно ортогонально, с помощью которых производится выдача указанных параметров по трём информационным каналам.

Как показали испытания опытных приборов с ВТГ-ИГД, при задании по оси резонатора одного из каналов угловой скорости ($\Omega$) с постоянным значением $\Omega_{п}$ [рад/с], измеренные значения параметров $\delta\psi, \Omega$ имели следующую особенность. Помимо ожидаемых постоянных составляющих $\delta\psi_{п}$, $\Omega_{п}$ и шумовых помех, они содержали периодические составляющие, амплитуды ($\delta\psi_{имq}, \Omega_{имq}$) наибольших по амплитуде гармоник порядка «q» которых (а также их угловая частота $\omega_q$) были пропорциональны заданной скорости $\Omega_{п}$. Причём для первого прибора [4] отношение $\Omega_{имq}/\Omega_{п}$ составило 0,66 %, а $\omega_q/\Omega_{п} \approx 1{,}09$. Для второго – отношение $\Omega_{имq}/\Omega_{п}$ достигло 1,3 % при $\omega_q/\Omega_{п} \approx 1{,}19$.

В качестве возможной причины появления такой помехи в [4] было рассмотрено использование алгоритма вычисления угла $\theta$ по формуле [3,5]

$$2\theta_{изм} = \mathrm{arctg}\, B, \qquad (1.2)$$

где $\theta_{изм}$ – измеренное (подсчитанное) значение угла $\theta$, B – безразмерное число,

$$B = A_s/A_c, \qquad (1.3)$$

без дополнительного алгоритма (ограничивающего интервал изменения В: $-1 \le B \le 1$, вместо $-\infty \le B \le \infty$), позволяющего избежать переполнения разрядной сетки ВБ.

Однако установлено, что в этих приборах указанный дополнительный алгоритм присутствовал. Цель данного исследования – определение других причин появления описанной периодической помехи и нахождение её математического выражения.

### 2. Предварительные соотношения параметров, формируемых ВТГ- ИГД

Предварительно рассмотрим соотношения информационных параметров. Обозначим через $\psi_{изм}$ измеренное (подсчитанное) значение угла $\psi$. Считаем, что значение масштабного коэффициента уставки, занесенное в память ВБ, выбрано равным его физическому значению К (например, по методике [4]). Тогда из (1.1)

$$\psi_{изм} = -\theta_{изм}/K. \qquad (2.1)$$

Приращение значений угла $\psi$ за время $T_ц$ для момента времени $t_i$ [c] (i – номер цикла)

$$\delta\psi(t_i) = \psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi(t_i) - \psi(t_i - T_ц).$$

Приращение значений $\psi_{изм}$ за время $T_ц$ для момента времени $t_i$

$$\delta\psi_{изм}(t_i) = \psi_{изм}(t_i) - \psi_{изм}(t_{i-1}) = \psi_{изм}(t_i) - \psi_{изм}(t_i - T_ц).$$

В связи с малостью интервала $T_ц$, приближённо можно считать, что моменты времени t совпадают с моментами $t_i$. И из двух последних выражений следует:

$$\delta\psi(t) = \psi(t) - \psi(t - T_ц); \qquad (2.2)$$

$$\delta\psi_{изм}(t) = \psi_{изм}(t) - \psi_{изм}(t - T_ц).$$

Мгновенное значение ($\Omega$) угловой скорости для момента времени t определяется производной угла по времени.

$$\Omega(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}.$$

Мгновенное измеренное значение ($\Omega_{изм}$) угловой скорости для момента времени t соответственно равно

$$\Omega_{изм}(t) = \frac{d\psi_{изм}(t)}{dt}. \qquad (2.3)$$

Значение средней скорости изменения угла $\psi$ на интервале $T_ц$

$$\Omega_{ср}(t) = \delta\psi(t)/T_ц.$$

Измеряемое (подсчитываемое) значение средней скорости изменения угла $\psi$ на интервале $T_ц$

$\Omega_{сризм}(t) = \delta\psi_{изм}(t)/T_ц$.

В связи с малостью интервала $T_ц$, с достаточной степенью точности можно считать мгновенные скорости равными указанным средним и соответственно записать:

$\Omega(t) \approx \delta\psi(t)/T_ц$;

$\Omega_{изм}(t) \approx \delta\psi_{изм}(t)/T_ц$.

Откуда приращения угла $\psi$ и значений $\psi_{изм}$ соответственно пропорциональны мгновенной скорости $\Omega(t)$ и значению $\Omega_{изм}(t)$:

$$\delta\psi(t) \approx T_ц \cdot \Omega(t); \tag{2.4}$$

$$\delta\psi_{изм}(t) \approx T_ц \cdot \Omega_{изм}(t). \tag{2.5}$$

### 3.Вычисление угла положения стоячей волны

Рассмотрим также сущность указанного дополнительного алгоритма вычисления значения $\theta_{изм}$. После включения ВТГ и перехода к параметрическому возбуждению его резонатора (при $2\theta \approx 0$) в блоке ВБ начинает действовать программа по анализу полученного числа В и выдача информации об измеренном значении ($2\theta_{изм}$) угла $2\theta$. При изменении положения основания ВТГ и соответствующем изменении угла $2\theta$ таком, что $-1-П \le В \le 1+П$, значения $2\theta_{изм}$ определяются по формуле (1.2). П – безразмерная величина запаса на переключение, превышающая уровень возможных пульсаций чисел В или 1/В (вызванных, например, неучтённым переменным сигналом помехи от детектирования на выходах каналов «As» и «Ac»), и в дальнейшем принимаемая для расчётов П=0,1; 1+П – верхнее пороговое значение переключения; –1–П – нижнее пороговое значение переключения. Соответственно (при П=0) для указанного диапазона изменения В получаем ориентировочные границы первого диапазона изменения угла $2\theta_{изм}$: $-\pi/4 \le 2\theta_{изм} \le \pi/4$.

При повороте основания ВТГ-ИГД и увеличении угла $2\theta$ таком, что $В>1+П$, в блоке ВБ происходит переход к программе контроля и анализа значений 1/В. При дальнейшем росте угла $2\theta$ значения 1/В уменьшаются. Причём для диапазона $1+П \ge 1/В \ge -1-П$ измеренные значения $2\theta_{изм}$ определяются по формуле

$$2\theta_{изм} = \mathrm{arcctg}(1/В). \tag{3.1}$$

Откуда для последнего диапазона изменения 1/В (при П=0) получаем ориентировочные границы второго диапазона изменения $2\theta_{изм}$: $\pi/4 \le 2\theta_{изм} \le 3\pi/4$.

При дальнейшем увеличении $2\theta$ и, соответственно, с уменьшением значений 1/B ниже величины –1–П в блоке ВБ начинает действовать программа анализа и контроля значений B. И при дальнейшем возрастании $2\theta$ значение B также возрастает. При нахождении значений B в диапазоне $-1-П \le B \le 1+П$, значения $2\theta_{изм}$ определяются как $2\theta_{изм} = \mathrm{arctg}B + \pi$ и лежат в третьем диапазоне. Границы третьего диапазона изменения $2\theta_{изм}$ (считая П=0): $3\pi/4 \le 2\theta_{изм} \le 5\pi/4$.

При дальнейшем росте угла $2\theta$ и увеличении номера «n» диапазона определения угла $2\theta_{изм}$ наблюдаются аналогичные соответствия. При уменьшении $2\theta$ переход в программу контроля происходит в обратном порядке. При нахождении угла $2\theta_{изм}$ в третьем или первом диапазонах и уменьшении угла $2\theta$ до уровня, при котором $B<-1-П$ произойдёт переход к анализу значений 1/B. При нахождении угла $2\theta_{изм}$ в четвёртом или втором диапазонах и уменьшении угла $2\theta$ до уровня, при котором $1/B >1+П$ произойдёт переход к анализу значений B.

Таким образом, при изменении угла $2\theta$ (при разворотах ВТГ-ИГД), его измеренные значения $2\theta_{изм}$, находятся в диапазоне с номером «n» (где n – целое рациональное число, причём после включения ВТГ, в начале работы, n=1). Вид этого диапазона (считая П=0):

$(2n-3)\cdot\pi/4 \le 2\theta_{изм} \le (2n-1)\cdot\pi/4$.

При n – нечётном ($n = n_{нч}$) обеспечен режим контроля и анализа числа B в диапазоне

$$-1-П \le B \le 1+П, \tag{3.2}$$

а измеренное значение угла $2\theta$ определяется (с использованием (1.2)) по формуле

$$2\theta_{изм} = \mathrm{arctg}B + (n_{нч} - 1)\cdot\pi/2. \tag{3.3}$$

При n – чётном ($n = n_{чт}$) обеспечен режим контроля и анализа числа 1/B в диапазоне

$$1+П \ge 1/B \ge -1-П, \tag{3.4}$$

а измеренное значение угла $2\theta$ определяется (с использованием (3.1)) по формуле

$$2\theta_{изм} = \mathrm{arcctg}(1/B) + (n_{чт} - 2)\cdot\pi/2. \tag{3.5}$$

Рассмотрим значения некоторых тригонометрических функций для указанных диапазонов. Для нечётного диапазона из (3.2), (3.3):

$\mathrm{tg}\,2\theta \approx \mathrm{tg}\,2\theta_{изм} = -1-П \ldots 1+П$, и при П=0,1 приближённо $-1,1 \le \mathrm{tg}\,2\theta \le 1,1$.

$\cos^2 2\theta \approx \cos^2(\mathrm{arctg}B + (n_{нч} - 1)\cdot\pi/2) = \cos^2(\mathrm{arctg}(-1-П \ldots 1+П) + (n_{нч} - 1)\cdot\pi/2)$, и при П=0,1 приближённо $1 \ge \cos^2 2\theta \ge \cos^2(\mathrm{arctg}1,1) = \cos^2(47,7°) = 0,673^2 = 0,452$.

Соответственно для чётного диапазона из (3.4), (3.5)

$\mathrm{ctg}\,2\theta \approx \mathrm{ctg}\,2\theta_{изм} = 1+П \ldots -1-П$, и при П= 0,1 приближённо $1,1 \ge \mathrm{ctg}\,2\theta \ge -1,1$.

$\sin^2 2\theta \approx \sin^2(\text{arcctg}(1/B) + (n_{чт} - 2)\cdot\pi/2) = \sin^2(\text{arcctg}\,(1+П \ldots -1-П) + (n_{чт} - 2)\cdot\pi/2) =$

$= \sin^2(\text{arctg}\,(1/(1+П)) \ldots \pi + \text{arctg}\,(-1/(1+П))) + (n_{чт} - 2)\cdot\pi/2)$, и при П=0,1 приближённо

$1 \geq \sin^2 2\theta \geq \sin^2(\text{arctg}\,1/1{,}1) = \sin^2(42{,}3°) = 0{,}673^2 = 0{,}452$.

Так что значения функций $\text{tg}\,2\theta$, $\cos^{-2}2\theta$ и $\text{ctg}\,2\theta$, $\sin^{-2}2\theta$ для углов $2\theta \approx 2\theta_{изм}$, находящихся соответственно в нечётных и чётных диапазонах, ограничены.

### 4.Определение функции ошибки

Что касается отличной от [4] возможной причины появления периодической помехи, то она может состоять в следующем. Обычно предполагается [1,3,5], что сигналы $A_s$, $A_c$ определены как: $A_s = A \cdot \sin 2\theta$; $A_c = A \cdot \cos 2\theta$ (где A – коэффициент пропорциональности [мВ]). Однако из-за различия параметров датчиков перемещения, различия коэффициентов передачи и наличия нулевых сигналов преобразовательных блоков в каналах «As» и «Ac» в общем случае сигналы $A_s$ и $A_c$ могут быть равны:

$$A_s = A_1 \cdot \sin 2\theta + c_1; \qquad (4.1)$$

$$A_c = A_2 \cdot \cos 2\theta + c_2, \qquad (4.2)$$

где: $A_1>0$, $A_2>0$ и $c_1$, $c_2$ – коэффициенты пропорциональности [мВ] и нулевые сигналы [мВ] зависимостей $A_s(\sin 2\theta)$, $A_c(\cos 2\theta)$, соответственно. Число B из (1.3) с учётом (4.1), (4.2) равно:

$$B = (A_1 \cdot \sin 2\theta + c_1) / (A_2 \cdot \cos 2\theta + c_2). \qquad (4.3)$$

И, если выполняется хотя бы одно из условий: $A_1 \neq A_2$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, то будет иметь место методическая ошибка $(\Delta\theta)$ измерения угла $\theta$.

$$\Delta\theta = \theta_{изм} - \theta. \qquad (4.4)$$

Введём следующие обозначения: $A_{ср}$ – средний коэффициент пропорциональности [мВ];

$\gamma$ – относительная разность коэффициентов $A_1$ и $A_2$, безразмерная малая величина; $u_1, u_2$ – относительные нулевые сигналы, безразмерные малые величины; $a_1, a_2$ – относительные коэффициенты пропорциональности, безразмерные величины близкие единице.

$A_{ср} = (A_1 + A_2)/2$.

$$\gamma = (A_1 - A_2)/A_{ср} = 2(A_1 - A_2)/(A_1 + A_2). \qquad (4.5)$$

$$u_1 = c_1/A_{ср} = 2\,c_1/(A_1 + A_2); \; u_2 = c_2/A_{ср} = 2\,c_2/(A_1 + A_2). \qquad (4.6)$$

$$a_1 = A_1/A_{ср} = 2\,A_1/(A_1 + A_2); \; a_2 = A_2/A_{ср} = 2\,A_2/(A_1 + A_2). \qquad (4.7)$$

$$|\gamma| \ll 1; \; |u_1| \ll 1; \; |u_2| \ll 1; \; a_1 \approx a_2 \approx 1. \qquad (4.8)$$

Из (4.5): $A_1/A_2 = (1 + \gamma/2)/(1 - \gamma/2) = (1 + \gamma/2)^2/(1 - (\gamma/2)^2) \approx 1 + \gamma$; (4.9)

$A_2/A_1 = (1-\gamma/2)/(1+\gamma/2) = (1-\gamma/2)^2/(1-(\gamma/2)^2) \approx 1-\gamma.$ (4.10)

Для определения ошибки (4.4) преобразуем выражения B и 1/B, используя (4.3) и предыдущие выражения, понимая, что значение B применимо для углов $2\theta \approx 2\theta_{изм}$, находящихся в нечётных диапазонах, а значение 1/B – для $2\theta \approx 2\theta_{изм}$ чётных диапазонов.

$B = (a_1 \cdot \sin 2\theta + u_1)/(a_2 \cdot \cos 2\theta + u_2) = (a_1 \cdot \sin 2\theta + u_1)\cdot(\cos 2\theta - u_2)/(a_2^2 \cdot \cos^2 2\theta - u_2^2) \approx$

$\approx (a_1 \cdot a_2 \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta - a_1 \cdot u_2 \cdot \sin 2\theta + a_2 \cdot u_1 \cdot \cos 2\theta)/a_2^2 \cdot \cos^2 2\theta =$

$= (1+\gamma) \cdot \mathrm{tg} 2\theta - m_1 \cdot \sin(2\theta - \alpha)/\cos^2 2\theta = \mathrm{tg} 2\theta + ((\gamma/2)\cdot \sin 4\theta - m_1 \cdot \sin(2\theta-\alpha))/\cos^2 2\theta,$ (4.11)

где: $m_1$ – безразмерная амплитуда, $\alpha$ – начальная фаза [рад].

$m_1 = m/a_2^2;$ (4.12)

$m = \sqrt{a_2^2 u_1^2 + a_1^2 u_2^2} \approx \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$ (4.13)

$\alpha = \mathrm{arctg}(a_2 \cdot u_1/(a_1 u_2)) = \mathrm{arctg}(A_2 \cdot c_1/(A_1 \cdot c_2))$ (при $c_2>0$),

$\alpha = \pi + \mathrm{arctg}(a_2 \cdot u_1/(a_1 \cdot u_2)) = \pi + \mathrm{arctg}(A_2 \cdot c_1/(A_1 \cdot c_2))$ (при $c_2<0$).

В знаменателе выражения B мы пренебрегли $u_2^2$ (квадратом малой величины) по сравнению с произведением ($\cos^2 2\theta \approx (0{,}452\ldots1)$) на ($a_2^2 \approx 1$), а в числителе пренебрегли $u_1 \cdot u_2$ (произведением малых величин).

Находим выражение 1/B, с учётом (4.6), (4.8), (4.10):

$1/B = (a_2 \cdot \cos 2\theta + u_2)/(a_1 \cdot \sin 2\theta + u_1) = (a_2 \cdot \cos 2\theta + u_2)\cdot(a_1 \cdot \sin 2\theta - u_1)/(a_1^2 \cdot \sin^2 2\theta - u_1^2) \approx$

$\approx (a_1 \cdot a_2 \cdot \sin 2\theta \cdot \cos 2\theta - a_2 \cdot u_1 \cdot \cos 2\theta + a_1 \cdot u_2 \cdot \sin 2\theta)/a_1^2 \cdot \sin^2 2\theta \approx$

$\approx (1-\gamma) \cdot \mathrm{ctg} 2\theta + m_2 \cdot \sin(2\theta-\alpha)/\sin^2 2\theta = \mathrm{ctg} 2\theta - ((\gamma/2)\cdot \sin 4\theta - m_2 \cdot \sin(2\theta-\alpha))/\sin^2 2\theta,$

(4.14)

где: $m_2$ – безразмерная амплитуда:

$m_2 = m/a_1^2.$ (4.15)

В знаменателе выражения 1/B мы пренебрегли $u_1^2$ (квадратом малой величины) по сравнению с произведением ($\sin^2 2\theta \approx (0{,}452\ldots1)$) на ($a_1^2 \approx 1$), а в числителе пренебрегли $u_1 \cdot u_2$ (произведением малых величин).

Выражения для тангенсов измеренных значений углов $2\theta$ нечётных диапазонов из (3.3) и котангенсов измеренных значений углов $2\theta$ чётных диапазонов из (3.5):

$\mathrm{tg}\, 2\theta_{изм} = B;$ (4.16)

$\mathrm{ctg}\, 2\theta_{изм} = 1/B.$ (4.17)

Используя (4.4) найдём значения tg $2\theta_{изм}$ и ctg $2\theta_{изм}$ соответственно для нечётных и чётных диапазонов изменения значений $2\theta_{изм}$ (при этом считаем $2\Delta\theta$ малой величиной, для которой справедливо tg $2\Delta\theta \approx 2\Delta\theta$).

$\mathrm{tg}\, 2\theta_{изм} = \mathrm{tg}\, 2(\theta+\Delta\theta) = (\mathrm{tg}\, 2\theta + \mathrm{tg}\, 2\Delta\theta)/(1- \mathrm{tg}\, 2\theta \cdot \mathrm{tg}\, 2\Delta\theta) = (\mathrm{tg}\, 2\theta + \mathrm{tg}\, 2\Delta\theta)\cdot(1+$

$+\mathrm{tg}\, 2\theta \cdot \mathrm{tg}\, 2\Delta\theta)/(1-\mathrm{tg}^2\, 2\theta \cdot \mathrm{tg}^2\, 2\Delta\theta) \approx \mathrm{tg}\, 2\theta + 2\Delta\theta \cdot (\mathrm{tg}^2\, 2\theta + 1) = \mathrm{tg}\, 2\theta + 2\Delta\theta/\cos^2 2\theta$. (4.18)

В знаменателе выражения $\mathrm{tg}\, 2(\theta+\Delta\theta)$ мы пренебрегли произведением $\mathrm{tg}^2\, 2\theta \cdot \mathrm{tg}^2\, 2\Delta\theta$, а в числителе произведением $\mathrm{tg}\, 2\theta \cdot \mathrm{tg}^2\, 2\Delta\theta$ (с квадратами малой величины).

$\mathrm{ctg}\, 2\theta_{изм} = \mathrm{ctg}\, 2(\theta+\Delta\theta) = (\mathrm{ctg} 2\theta \cdot \mathrm{ctg}\, 2\Delta\theta - 1)/(\mathrm{ctg} 2\theta + \mathrm{ctg} 2\Delta\theta) =$

$= (\mathrm{ctg} 2\theta - \mathrm{tg} 2\Delta\theta)/(\mathrm{ctg} 2\theta \cdot \mathrm{tg} 2\Delta\theta + 1) = (\mathrm{ctg} 2\theta - \mathrm{tg} 2\Delta\theta) \cdot (1 - \mathrm{ctg} 2\theta \cdot \mathrm{tg} 2\Delta\theta)/(1 - \mathrm{ctg}^2 2\theta \cdot \mathrm{tg}^2 2\Delta\theta) \approx$

$\approx \mathrm{ctg} 2\theta - 2\Delta\theta \cdot (\mathrm{ctg}^2 2\theta + 1) = \mathrm{ctg} 2\theta - 2\Delta\theta/\sin^2 2\theta$. (4.19)

В знаменателе выражения $\mathrm{ctg}\, 2(\theta+\Delta\theta)$ мы пренебрегли произведением $\mathrm{ctg}^2 2\theta \cdot \mathrm{tg}^2 2\Delta\theta$, а в числителе произведением $\mathrm{ctg}\, 2\theta \cdot \mathrm{tg}^2\, 2\Delta\theta$ (с квадратами малой величины).

На основании (4.16), (4.17) выражения (4.11) и (4.18), (4.14) и (4.19) соответственно равны. Откуда (с учётом (4.12), (4.13), (4.15)) получаем приближённые равенства при малых $\Delta\theta$:

для углов $2\theta \approx 2\theta_{изм}$ из нечётных диапазонов:

$\Delta\theta \approx 0{,}25\gamma \cdot \sin 4\theta - 0{,}5 m_1 \cdot \sin(2\theta - \alpha) = 0{,}25\gamma \cdot \sin 4\theta - 0{,}5(m/a_2^2) \cdot \sin(2\theta - \alpha)$; (4.20)

для углов $2\theta \approx 2\theta_{изм}$ из чётных диапазонов:

$\Delta\theta \approx 0{,}25\gamma \cdot \sin 4\theta - 0{,}5 m_2 \cdot \sin(2\theta - \alpha) = 0{,}25\gamma \cdot \sin 4\theta - 0{,}5(m/a_1^2) \cdot \sin(2\theta - \alpha)$. (4.21)

Неравенство выражений (4.20), (4.21) объясняется приближёнными преобразованиями при их нахождении. Поэтому корректируем эти выражения (основываясь на том, что $a_1 \approx a_2 \approx 1$; при $a_1 > 1$, $a_2 < 1$; при $a_1 < 1$, $a_2 > 1$ и определяя общее среднее, исключив знаменатели в (4.20), (4.21)) и записываем выражение ошибки без возможных высших гармоник:

$\Delta\theta(\theta) = 0{,}25\gamma \cdot \sin 4\theta - 0{,}5 m \cdot \sin(2\theta - \alpha) + \ldots$ .

Полученную функцию ошибки можно представить в виде:

$\Delta\theta(\theta) = 0{,}5 m \cdot \sin(2\theta + \pi - \alpha) + 0{,}25\gamma \cdot \sin 4\theta + \ldots$ . (4.22)

## 5.Выражения формируемых параметров

Функция измеренных (подсчитанных) значений угла $\theta$ из (4.4), (4.22) равна:

$\theta_{изм}(\theta) = \theta + \Delta\theta(\theta) = \theta + 0{,}5 m \cdot \sin(2\theta + \pi - \alpha) + 0{,}25\gamma \cdot \sin 4\theta + \ldots$ . (5.1)

При подстановке (5.1) в (2.1) имеем функцию измеренных (подсчитанных) значений угла $\psi$ с аргументом $\theta$.

$$\psi_{изм}(\theta) = -\frac{1}{K}\cdot[\theta + 0{,}5\,m\cdot\sin(2\theta+\pi-\alpha) + 0{,}25\gamma\cdot\sin 4\theta + \ldots] =$$

$$= -\theta/K - (0{,}5\,m/K)\cdot\sin(2\theta+\pi-\alpha) - (0{,}25\gamma/K)\cdot\sin 4\theta - \ldots =$$

$$= -\theta/K - \Delta\psi_{им1}\cdot\sin(2\theta+\pi-\alpha) - \Delta\psi_{им2}\cdot\sin 4\theta - \ldots . \qquad (5.2)$$

где: $\Delta\psi_{им1}$, $\Delta\psi_{им2}$ – амплитуды первых двух гармоник периодической составляющей функции $\psi_{изм}$.

$$\Delta\psi_{им1} = 0{,}5\,m/K, \quad \Delta\psi_{им2} = 0{,}25\gamma/K. \qquad (5.3)$$

Из (5.2) подстановкой $\theta$ из (1.1) получаем функцию измеренных (подсчитанных) значений угла $\psi$ с аргументом $\psi$:

$$\psi_{изм}(\psi) = \psi - \Delta\psi_{им1}\cdot\sin(2(-\psi\cdot K)+\pi-\alpha) - \Delta\psi_{им2}\cdot\sin 4(-\psi\cdot K) - \ldots = \psi + \Delta\psi_{им1}\cdot\sin(2\psi\cdot K+\alpha--\pi) + \Delta\psi_{им2}\cdot\sin(4\psi\cdot K) + \ldots . \qquad (5.4)$$

Пусть ВТГ-ИГД вращается вокруг оси резонатора некоторого канала с постоянной скоростью $\Omega_п$, и угол $\psi$ изменяется по закону ($\psi_0$ – начальное значение [рад] угла $\psi$):

$$\psi(t) = \psi_0 + \Omega_п t. \qquad (5.5)$$

Соответственно приращение ($\delta\psi(t)$) (за время $T_ц$) значений угла $\psi$ из (2.2), (5.5) имеют вид:

$$\delta\psi(t) = (\psi_0 + \Omega_п\cdot t) - [\psi_0 + \Omega_п\cdot(t - T_ц)] = T_ц\cdot\Omega_п = \delta\psi_п, \qquad (5.6)$$

где $\delta\psi_п$ – постоянное значение приращения угла $\psi$, согласующееся с (2.4).

После подстановки (5.5) в (5.4), находим зависимость $\psi_{изм}(t)$

$$\psi_{изм}(t) = \psi_0 + \Omega_п t + \Delta\psi_{им1}\cdot\sin(2(\psi_0+\Omega_п t)\cdot K - \pi + \alpha) + \Delta\psi_{им2}\cdot\sin(4(\psi_0+\Omega_п t)\cdot K) + \ldots =$$

$$= \psi_0 + \Omega_п t + \Delta\psi_{им1}\cdot\sin(2\Omega_п Kt + 2\psi_0 K - \pi + \alpha) + \Delta\psi_{им2}\cdot\sin(4\Omega_п Kt + 4\psi_0 K) + \ldots =$$

$$= \psi_0 + \Omega_п t + \Delta\psi_{им1}\cdot\sin(\omega t + \varphi_1) + \Delta\psi_{им2}\cdot\sin(2\omega t + \varphi_2) + \ldots , \qquad (5.7)$$

где для периодической составляющей функции $\psi_{изм}(t)$: $\varphi_1$, $\varphi_2$ –начальные фазы гармоник, $\omega$ – угловая частота [рад/с] первой гармоники.

$$\varphi_1 = 2\psi_0 K - \pi + \alpha, \quad \varphi_2 = 4\psi_0 K. \qquad (5.8)$$

$$\omega = 2\Omega_п K. \qquad (5.9)$$

Измеренные значения ($\Omega_{изм}$) скорости $\Omega$ определяются (как указано вначале) цифровым дифференцированием последовательности значений $\psi_{изм}(t)$ по времени. Проводя математическое дифференцирование (5.7), в соответствии с (2.3), получаем функцию $\Omega_{изм}(t)$ и, с учётом (5.8), (5.9), имеем:

$$\Omega_{изм}(t) = \Omega_п + \omega\cdot\Delta\psi_{им1}\cdot\cos(\omega t + \varphi_1) + 2\omega\cdot\Delta\psi_{им2}\cdot\cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots =$$

$=\Omega_п + \Omega_{им1} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + \Omega_{им2} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots,$

(5.10)

где: $\Omega_{им1}, \Omega_{им2}$ – амплитуды [рад/с] первых двух гармоник периодической составляющей функции $\Omega_{изм}(t)$; используем (4.13), (5.3).

$$\Omega_{им1} = \omega \cdot \Delta\psi_{им1} = 2\Omega_п K \cdot \Delta\psi_{им1} = m \cdot \Omega_п; \qquad (5.11)$$

$$\Omega_{им2} = 2\omega \cdot \Delta\psi_{им2} = 4\Omega_п K \cdot \Delta\psi_{им2} = \gamma \cdot \Omega_п. \qquad (5.12)$$

Соответственно из (2.5), (5.6), (5.10), имеем

$$\delta\psi_{изм}(t) \approx T_ц \cdot \Omega_п + T_ц \cdot \Omega_{им1} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + T_ц \cdot \Omega_{им2} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots =$$

$$= \delta\psi_п + \delta\psi_{им1} \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + \delta\psi_{им2} \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2) + \ldots, \qquad (5.13)$$

где $\delta\psi_{им1}, \delta\psi_{им2}$ – амплитуды [рад] первых двух гармоник периодической составляющей функции $\delta\psi_{изм}(t)$.

Из (5.13) с учётом (5.11), (5.12)

$$\delta\psi_{им1} = T_ц \cdot \Omega_{им1} = T_ц \cdot m \cdot \Omega_п, \ \delta\psi_{им2} = T_ц \cdot \Omega_{им2} = T_ц \cdot \gamma \cdot \Omega_п. \qquad (5.14)$$

Так что погрешности зависимостей $\Omega_{изм}(t)$ и $\delta\psi_{изм}(t)$ в основном обусловлены величиной параметров $m$ (4.6), (4.7), (4.13) и $\gamma$ (4.5). Причём из (5.6), (5.11) и (5.14) отношения

$$\Omega_{им1}/\Omega_п = \delta\psi_{им1}/\delta\psi_п = m, \ \Omega_{им2}/\Omega_п = \delta\psi_{им2}/\delta\psi_п = \gamma. \qquad (5.15)$$

## 6.Анализ результатов измерений

Возвращаемся к условиям постановки задачи. При испытаниях опытных приборов полученное значение угловой частоты $\omega_q$ в каналах ВТГ-ИГД может принадлежать двум гармоникам из (5.10): $\omega_{q=1} = \omega$ или $\omega_{q=2} = 2\omega$. Из (5.9) $K = \omega/(2\Omega_п)$. Соответственно для первого варианта $K(q=1) = \omega_{q=1}/(2\Omega_п)$, для второго $K(q=2) = \omega_{q=2}/(4\Omega_п)$.

Для первого прибора. Поскольку из исходных данных $\omega_q/\Omega_п \approx 1{,}09$ (или $\omega_q \approx 1{,}09\ \Omega_п$), то при $\omega_q = \omega_{q=1}$, $K(q=1) \approx 1{,}09\Omega_п/(2\Omega_п) = 0{,}54$, а при $\omega_q = \omega_{q=2}$, $K(q=2) \approx 1{,}09\Omega_п/(4\Omega_п) = 0{,}27$. В соответствии с возможным диапазоном K, указанным при (1.1), первый вариант исключается. То есть q=2; $\omega_q = \omega_{q=2} = 2\omega$ и $K = K(q=2) \approx 0{,}27$. Из (5.15) при данных $\Omega_{имq}/\Omega_п \approx 0{,}0066$ следует $\gamma = 0{,}0066$. Амплитуда гармоники q=2 периодической составляющей функции $\psi_{изм}$ из (5.3) $\Delta\psi_{им2} = 0{,}25 \cdot 0{,}0066/0{,}27 = 0{,}0061$рад$=0{,}35°$

Аналогично для второго прибора при $\omega_q/\Omega_п \approx 1{,}19$ (или $\omega_q \approx 1{,}19\ \Omega_п$) $\omega_q = \omega_{q=2} = 2\omega$ и К= К(q=2) $\approx 1{,}19\,\Omega_п/(4\Omega_п)$ =0,30. То есть однозначно q=2. Из (5.15) при данных $\Omega_{имq}/\Omega_п \approx$ 0,013 $\gamma$=0,013. Из (5.3) $\Delta\psi_{им2}$=0,25·0,013/0,30= 0,011рад=0,62°.

Поскольку в периодической помехе испытанных приборов амплитуда гармоники с $\omega_{q=2}=2\omega$ преобладающая и достаточная для её фиксации, то возможно использование этой помехи для точного определения масштабного коэффициента ВТГ-ИГД аналогично [4].

**7. Выводы**

7.1 Рассмотрена взаимосвязь между физическими параметрами углового перемещения ВТГ-ИГД ($\psi$ – углом поворота основания гироскопа вокруг его оси чувствительности относительно инерциального пространства, $\delta\psi$ – приращением угла $\psi$ за время $T_ц$, $\Omega$ – мгновенной угловой скоростью изменения угла $\psi$) и соответствующими параметрами, формируемыми ВТГ-ИГД ($\psi_{изм}$ – измеренным значением угла $\psi$, $\delta\psi_{изм}$ – приращением значений $\psi_{изм}$ за время $T_ц$, $\Omega_{изм}$ – измеренным мгновенным значением угловой скорости изменения угла $\psi$). Показано, что зависимости $\Omega(t)$, $\Omega_{изм}(t)$ соответственно пропорциональны функциям $\delta\psi(t)$, $\delta\psi_{изм}(t)$.

7.2 Приведёно описание алгоритма вычисления угла ($\theta$) положения стоячей волны относительно основания гироскопа. В процессе значительных угловых перемещений ВТГ-ИГД угол $\theta$ изменяется, проходя нечётные и чётные диапазоны этого угла. Длительность диапазонов составляет ≈45°. Для нечётных диапазонов в вычислительном блоке анализируются значения В = =$A_s/A_c$ (где $A_s$, $A_c$ – значения выходных сигналов соответственно по синусному и косинусному информационным каналам) с нахождением измеренных (подсчитанных) значений ($\theta_{изм}$) угла $\theta$ по формуле (3.3). Для чётных – анализируются значения 1/В с нахождением $\theta_{изм}$ по 3.5).

7.3 Допускается, что из-за различия параметров датчиков перемещения, различия коэффициентов передачи и наличия нулевых сигналов преобразовательных блоков в каналах «As» и «Ac», в функциях сигналов $A_s(\sin 2\theta)$, $A_c(\cos 2\theta)$ имеются различные коэффициенты пропорциональности $A_1$, $A_2$ и нулевые сигналы $c_1$, $c_2$ не равные нулю: $A_s = A_1\cdot\sin 2\theta + c_1$; $A_c = A_2\cdot\cos 2\theta + c_2$. Если выполняется хотя бы одно из условий: $A_1 \neq A_2$, $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, то будет иметь место методическая ошибка ($\Delta\theta$) измерения угла $\theta$.

7.4 Определена функция $\Delta\theta(\theta)$ методической ошибки, представляющая собой периодическую функцию (4.22). При этом амплитуда четвёртой гармоники по углу $\theta$ помехи $\Delta\theta(\theta)$ –

пропорциональна значению $\gamma$ (4.5) (относительной разности коэффициентов А1 и А2), а амплитуда второй гармоники – пропорциональна значению $m$ (4.13) (то есть с учётом (4.6) прямо пропорциональна среднеквадратичному значению нулевых сигналов $c_1$, $c_2$ и обратно пропорциональна среднему значению коэффициентов А1, А2).

7.5 С учётом функции $\Delta\theta(\theta)$ получены зависимости $\theta_{изм}(\theta)$, $\psi_{изм}(\theta)$, $\psi_{изм}(\psi)$.

7.6 При задании ВТГ-ИГД угловой скорости $\Omega$ с постоянным значением $\Omega_{п}$ (то есть $\psi(t) = \psi_0 + \Omega_{п} t$, где $\psi_0$ – начальное значение угла $\psi$) определены функции $\psi_{изм}(t)$, $\Omega_{изм}(t)$ и $\delta\psi_{изм}(t)$. Погрешности зависимостей $\Omega_{изм}(t)$ и $\delta\psi_{изм}(t)$ относительно $\Omega_{п}$ и $\delta\psi(t)$ в основном обусловлены величиной значений $m$ и $\gamma$.

7.7 Проведён анализ результатов измерений параметров периодической помехи на опытных приборах ВТГ-ИГД. Определены преобладающая гармоника помехи и амплитуды этой гармоники в функциях $\psi_{изм}(\theta)$, $\psi_{изм}(\psi)$, $\psi_{изм}(t)$.

## Библиографический список


1. Матвеев В.А., Лунин Б.С., Басараб М.А. Навигационные системы на волновых твердотельных гироскопах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.- 240 с.
2. Пельпор Д.С. и др. Гироскопические приборы и системы. – М.: Высш. шк., 1988.-424 с.
3. Матвеев В.А., Липатников В.И., Алехин А.В. Проектирование волнового твердотельного гироскопа. – М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1998.- 168 с.
4. Захаров А.А. Способ экспериментального определения масштабного коэффициента волнового твердотельного гироскопа с цифровым дифференцированием. //Электронный журнал «Труды МАИ», вып. 40. – http://www.mai.ru (1.10.10).
5. Захарин А.В. и др. Твердотельный волновой гироскоп// Патент РФ. 7G01C 19/56. RU 2362975. (2006).


## Сведения об авторе


Захаров Александр Александрович, ведущий инженер ОАО «ГосНИИП», 129226, Москва, проспект Мира, 125, телетайп 112654, факс: (499) 181-33-70,e-mail: e-mail: corund@netbynet.ru