

Продольные волны в соосных упругих оболочках с учетом конструкционного демпфирования и с жидкостью внутри

Блинков Ю.А.^{1*}, Иванов С.В.^{1}, Могилевич Л.И.^{2***},
Попов В.С.^{2,3****}, Попова Е.В.^{1*****}**

¹*Саратовский национальный исследовательский государственный университет им.
Н.Г. Чернышевского, ул. Астраханская, 83, Саратов, 410012, Россия*

²*Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,
ул. Политехническая, 77, Саратов, 410054, Россия*

³*Институт проблем точной механики и управления РАН,
ул. Рабочая, 24, Саратов, 410028, Россия*

**e-mail: blinkovua@gmail.com*

***e-mail: evilgraywolf@gmail.com*

****e-mail: mogilevichli@gmail.com*

*****e-mail: vic_p@bk.ru*

******e-mail: elizaveta.popova.97@bk.ru*

Статья поступила 02.03.2021

Аннотация

В данной статье исследуются продольные волны деформации в соосных упругих оболочках с мягкой кубической нелинейностью, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и во внутренней оболочке. Учтено влияние, конструкционного демпфирования материала оболочек как в продольном, так и в нормальном направлениях и окружающей внешнюю оболочку среды на амплитуду и скорость волны. При этом необходимо использовать численные методы. В данной работе получена математическая модель в виде системы уравнений, которая исследуется численно с помощью разностной схемы Кранка-

Николсона. При отсутствии влияния жидкости внутри оболочки, конструкционного демпфирования в продольном направлении и окружающей упругой среды, скорости и амплитуды волн, имеющих в оболочках, не меняются. Движение происходит в отрицательном направлении оси абсцисс. Это означает, что найденная нелинейная добавка к скоростям волн в линейном приближении (скорости звука) уменьшает скорости волн и они становятся дозвуковыми. Результат вычислительного эксперимента в этом случае совпадает с точным решением, следовательно, разностная схема и система обобщенных модифицированных уравнений Кортевега - де Вриза - Бюргера (МКДВ-Б) адекватны. Наличие влияния инерции движения жидкости во внутренней оболочке приводит к уменьшению скорости волн деформации, а наличие окружающей внешнюю оболочку упругой среды приводит к увеличению скорости. Вязкостное напряжение жидкости во внутренней оболочке и конструкционное демпфирование материала оболочек в продольном направлении приводят к уменьшению амплитуд волн. Конструкционное демпфирование в нормальном направлении увеличивает амплитуду волны на постоянную величину волну и уменьшает ее скорость.

Ключевые слова: волны деформаций, упругие соосные цилиндрические оболочки, вычислительный эксперимент, вязкая несжимаемая жидкость.

Введение

Изучение вопросов связанных с распространением волн в сплошных средах и упругих элементах конструкций широко применяется во многих технических областях. Например, в [1] проведено изучение особенностей волнового процесса в

стержне, материал которого имеет поврежденность, при распространении в нем продольных упругих волн. Эволюция нестационарных возмущений от поверхности шара, внутри которого находится псевдоконтинуумом Коссера, в осесимметричной постановке рассмотрена в [2]. Задача о распространения продольного волнового пучка в однородной, нелинейно-упругой проводящей среде, находящейся во внешнем магнитном поле поставлена и решена в [3]. В [4-7] проводится исследование поведения волн деформации в упругих, вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках, однако случаи взаимодействия оболочек с вязкой несжимаемой жидкостью в этих работах не рассматривается. В [8-12] исследуются случаи, когда упругие тонкостенные конструкции взаимодействуют с вязкой несжимаемой жидкостью, но при этом не учитываются волновые явления, влияние локальных членов инерции также не учитывается.

В данной статье проводится исследование волнового процесса, протекающего в двух бесконечно длинных соосных цилиндрических оболочках с мягкой кубической нелинейностью. При помощи метода возмущений по малому параметру задачи строится математическая модель. Полученная в данной работе модель отличается от уже известных тем, что в ней учитывается наличие вязкой несжимаемой жидкости между оболочками и во внутренней оболочке, влияние конструкционного демпфирования оболочек в продольном, и в нормальном направлениях, а также наличие упругой среды окружающей внешнюю оболочку. Эти модели получены в виде системы обобщенных модифицированных уравнений Кортевега – де Вриза - Бюргерса (МКДВ-Б). Выявлены эффекты влияния

окружающей внешней оболочку среды и конструкционного демпфирования как в продольном, так и в нормальном направлениях.

Построенная в данной работе математическая модель исследуется с помощью разностной схемы Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности.

Основные определения и соотношения

Компоненты тензора напряжений σ_x , σ_Θ связаны компонентами тензора деформаций ε_x , ε_Θ и квадратом интенсивности деформаций ε_u , согласно деформационной теории пластичности А. А. Ильюшина [13,14], соотношениями (1) [15,16].

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_x^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_\Theta^{(i)}) \left(1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right), \sigma_\Theta^{(i)} = \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_\Theta^{(i)} + \mu_0 \varepsilon_x^{(i)}) \left(1 - \frac{m}{E} \varepsilon_u^{(i)2} \right) \quad (1)$$

$$\varepsilon_u^{(i)2} = \frac{4}{9} (\mu_1 (\varepsilon_x^{(i)2} + \varepsilon_\Theta^{(i)2}) - \mu_2 \varepsilon_x^{(i)} \varepsilon_\Theta^{(i)}), \mu_1 = \left[1 + \frac{\mu_0 (2\mu_0 - 1)}{(1-\mu_0)^2} \right], \mu_2 = \left[1 - \frac{2\mu_0 (2\mu_0 - 1)}{(1-\mu_0)^2} \right].$$

Здесь μ_0 – коэффициент Пуассона материала оболочки, m – константа материала, получаемая из опытов на сжатие или растяжение, E – модуль Юнга. Рассмотрим осесимметричные соосные цилиндрические оболочки. Обозначим: R_1 – радиус внутренней поверхности внешней оболочки; R_2 – радиус внешней поверхности внутренней оболочки; R_3 – радиус внутренней поверхности внутренней оболочки; $R^{(i)}$ – радиусы срединных поверхностей; $h_0^{(i)}$ – толщины оболочки; $U^{(i)}$ – продольное упругое перемещение; $W^{(i)}$ – прогиб, направленный к центру кривизны ($i=1$ для внешней, $i=2$ для внутренней оболочек). Связь компонент деформаций с упругими перемещениями представим в виде [17]

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\Theta^{(i)} = -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}}. \quad (2)$$

Здесь продольная координата на срединной поверхности обозначена через x , а нормальная координата в оболочке через z , при этом $\left(-\frac{h_0^{(i)}}{2} \leq z \leq \frac{h_0^{(i)}}{2}\right)$. Квадрат

интенсивности деформаций запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_u^{(i)2} = & \frac{4}{9} \left\langle \mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right]^2 + \frac{W^{(i)2}}{R^{(i)2}} \right\rangle + \\ & + \mu_2 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Определим усилия в срединной поверхности оболочки и момент по следующим формулам

$$N_x^{(i)} = \int_{-\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_x^{(i)} dz, \quad N_\Theta^{(i)} = \int_{-\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_\Theta^{(i)} dz, \quad M_x^{(i)} = \int_{-\frac{h_0^{(i)}}{2}}^{\frac{h_0^{(i)}}{2}} \sigma_x^{(i)} z dz \quad (4)$$

Подставляя (1) - (3) в (4) находим

$$\begin{aligned} N_x^{(i)} = & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{9E} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \right. \right. \\ & - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left. \right] \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \\ & + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left. \right\rangle \\ N_\Theta^{(i)} = & \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \left\langle \mu_0 \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{9E} \left[\mu_0 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \right. \right. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R} \right] + \\
& + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \mu_0 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \Bigg\} \\
M_x^{(i)} = & -\frac{E h_0^{(i)3}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left\langle 1 - \frac{4m}{9E} \left\{ 3\mu_1 \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right]^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2(\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + 3 \frac{h_0^{(i)2}}{20} \mu_1 \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right\rangle
\end{aligned}$$

Уравнения динамики для оболочек запишем также, как и в физически линейной теории

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} = & \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} - \\
& - \left[q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}, \quad (6) \\
\frac{\partial^2 M_x^{(i)}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} N_x^{(i)} \right) + \frac{1}{R^{(i)}} N_\theta^{(i)} = & \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{l}{R^{(i)2}} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} + \\
& + k_1 \frac{h_0}{R^{(i)3}} \rho_0 h_0^{(i)} \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)} W(2-i) - \\
& - \left[(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}}
\end{aligned}$$

где t – время; $\rho_0^{(i)}$ – плотность материала оболочки; $q_x^{(i)}$, q_n – напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри кольцевого сечения; r , x – цилиндрические координаты; \tilde{q}_x , \tilde{q}_n – напряжения со стороны жидкости, находящейся во внутренней оболочке, k_l – безразмерный коэффициент постели окружающей среды; ε_1 , ε_2 – безразмерные коэффициенты демпфирования материала оболочки.

Подставляя (5) в (6) получим уравнения в перемещениях

$$\begin{aligned}
& \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{4m}{9E} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right. \\
& \left. \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\
& \left. \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial t^2} + \varepsilon_1 \frac{1}{l} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} - \\
& - \left[q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}} \\
& - \frac{Eh_0^{(i)3}}{12(1-\mu_0^2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\langle \frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \left[1 - \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2(\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} + (\mu_1 - \mu_2 \mu_0) \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + 3 \frac{h_0^{(i)2}}{20} \mu_1 \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right] \right] \right\rangle + \quad (7) \\
& + \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 - \right. \right. \right. \\
& - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \left. \left. \left. \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \left[3\mu_1 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) + (\mu_2 - \mu_1 \mu_0) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right] \right\rangle + \\
& + \frac{Eh_0^{(i)}}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R^{(i)}} \left\langle \mu_0 \left[\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} - \frac{m}{E} \frac{4}{9} \left[\mu_0 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right. \\
& \left. \left[\mu_1 \left[\left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 \right] + \mu_2 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] + \frac{h_0^{(i)2}}{12} \left(\frac{\partial^2 W^{(i)}}{\partial x^2} \right)^2 \right. \\
& \left. \left[3\mu_1 \mu_0 \left(\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right) - \left(\mu_1 - \mu_2 \mu_0 \right) \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right] \right\rangle = \rho_0 h_0^{(i)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \varepsilon_2 \frac{l}{R^2} \rho_0 h_0^{(i)} \sqrt{\frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)}} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} + \\
& + k_1 \frac{h_0}{R^{(i)3}} \rho_0 h_0^{(i)} \frac{E}{\rho_0(1-\mu_0^2)} W(2-i) - \\
& - \left[(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1) - W^{(i)} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial r} + U^{(i)} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial x} \right]_{R^{(i)}} .
\end{aligned}$$

Асимптотический метод исследования уравнений оболочек с жидкостью

Для волновых задач оболочку считаем бесконечной. Введем следующие безразмерные параметры и переменные, а также обозначения для исследования продольных волн в оболочке. За характерную длину l принимаем длину волны. Характерные значения упругих перемещений обозначим через u_m, w_m .

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, x^* = \frac{x}{l}, t^* = \frac{c_0}{l} t, r^* = \frac{r}{R^{(i)}}, w_m = h_0, u_m = \frac{h_0 l}{R^{(i)}}. \quad (8)$$

$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\mu_0)}}$ - скорость распространения продольных упругих волн в оболочке.

Положим

$$\frac{u_m}{l} \frac{R^{(i)}}{h_0^{(i)}} = O(1), k_1 = O(1), \varepsilon_1 = O(\varepsilon), \varepsilon_2 = O(\varepsilon), \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = \varepsilon \ll 1, \frac{R^{(i)2}}{l^2} = O(\varepsilon), \frac{w_m}{h_0^{(i)}} = O(1), \frac{m\varepsilon}{E} = O(1) \quad (9)$$

где ε - малый параметр задачи.

Введем независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \tau = \varepsilon t^* \quad (10)$$

где τ - медленное время; c – скорость волны.

Зависимые переменные представим в виде асимптотического разложения

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots \quad (11)$$

В переменных (8)-(11), оставляя в уравнениях (7) члены порядка ε и отбрасывая члены с более высокими степенями, получим уравнения

$$\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}, c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (12)$$

Таким образом $u_{10}^{(i)}$ – является произвольной функцией, а безразмерная скорость волны $c = (1 - \mu_0^2)^{\frac{1}{2}}$. Далее получим систему уравнений в приближении ε^2 с

учетом (12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^4} + \\ + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^3} + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} (2-i) = \end{aligned} \quad (13)$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \left[(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)) - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial((-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1))}{\partial \xi} \right]$$

Полученные уравнения есть обобщенные модифицированные уравнения Кортевега – де Вриза - Бюргерса (МКДВ-Б) для $\frac{\partial u_{10}^{(i)}}{\partial \xi}$. В уравнениях (13) правые части при отсутствии жидкости равны нулю, таким образом эти уравнения принимают вид модифицированных уравнений Кортевега-де Вриза - Бюргерса (МКДВ-Б). Правые части можно получить, решая уравнения гидродинамики.

Исследование напряжений, действующих на оболочку со стороны жидкости, находящейся внутри

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки, заполненные вязкой несжимаемой жидкостью (рис. 1). Ширина щели, занимаемой жидкостью $\delta = R_1 - R_2$.

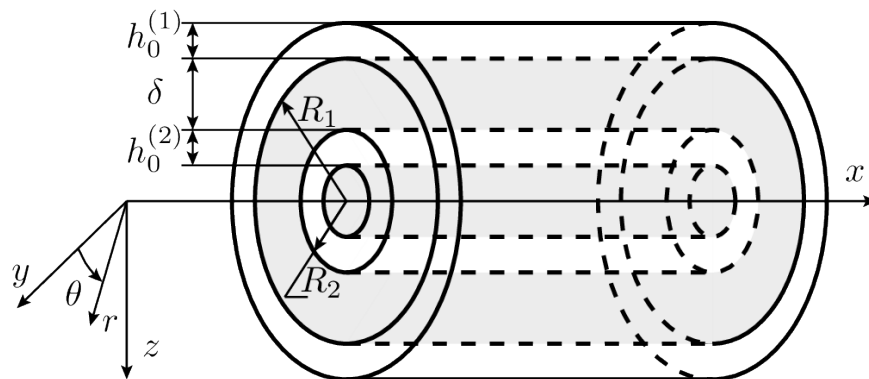


Рис.1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат (r, Θ, x) в случае осесимметричного течения [18] записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right) \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На границе оболочек и жидкости на рис. 1 при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости [18]

$$V_x = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}, \quad V_r = -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t}, \quad (15)$$

где V_r, V_x - проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости; p - давление в жидкости; ρ - плотность жидкости; ν - кинематический коэффициент вязкости.

$$\begin{aligned} q_n &= \left[P_{rr} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{rx} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) \right]_{r=R_i - W^{(i)}} \\ q_x &= - \left[P_{rx} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r \right) + P_{xx} \cos \left(-\bar{n}^{(i)}, \bar{i} \right) \right]_{r=R_i - W^{(i)}} \\ P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}; P_{rx} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right); P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}, \end{aligned} \quad (16)$$

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами 16, где $\bar{n}_r, \bar{n}_\Theta, \bar{i}$ - орты базиса (r, Θ, x) цилиндрической системы координат с центром на геометрической оси, \bar{n} - нормаль к срединной поверхности i -ой оболочки. Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочки, то можно считать –

$\bar{n} = \bar{n}_r$ и $\cos\left(-\bar{n}, \bar{n}_r\right) = 1$, $\cos\left(-\bar{n}, \bar{i}\right) = 0$. Напряжения \tilde{q}_x , \tilde{q}_n со стороны жидкости,

которая находится во внутренней оболочке определяется теми же формулами (6), в которых плотность жидкости $\tilde{\rho}$, коэффициент кинематической вязкости $\tilde{\nu}$.

Кольцевое сечение

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, r = R_2 + \delta r^*, t^* = \frac{c_0}{l} t, x^* = \frac{x}{l} \\ p &= \frac{\rho \nu c_0 R_i w_m}{\delta^3} P + p_0, \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \lambda = \frac{w_m}{\delta} = o(1) \\ \frac{w_m}{R_2} &= \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_2} = \lambda \psi, \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (17)$$

Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ , с учетом (17)

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots \quad (18)$$

и, полагая $\frac{\delta}{l} = 0$, $\frac{\delta}{R_2} = 0$ (нулевое приближение по $\frac{\delta}{l}$ - гидродинамическая теория

смазки), получим из (14) уравнение гидродинамики для первых членов разложения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \tilde{\text{Re}} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0, \quad \tilde{\text{Re}} = \frac{\delta}{l} \frac{\delta c_0}{\nu} \quad (19)$$

из (15) получим граничные условия:

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0 \quad \text{где} \quad r^* = 1; \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0 \quad \text{где} \quad r^* = 0 \quad (20)$$

С точностью до ψ , λ из (16) получим

$$q_x^{(i)} \approx -\rho \nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}^{r^*=0}, \quad q_n \approx -\frac{\rho \nu c_0 l w_m}{\delta^3} P^0 \quad (21)$$

В [19] задача (19), (20) решалась методом итерации, в результате, найдены выражения, входящие в правую часть уравнений (13). Учитывая, что $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$ и полагая $R^{(1)} = R^{(2)} = R$, $h_0^{(1)} = h_0^{(2)} = h_0$ в силу малости ψ, λ для первого уравнения имеем

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right) \right] \quad (22)$$

Для второго уравнения имеем

$$-6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1 - \mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \right] \quad (23)$$

Круговое сечение

Рассматривая круговое сечение, введем безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r; V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x; r^* = \frac{r}{R_3}; t^* = \frac{c_0}{l} t; x^* = \frac{1}{l} x \quad (24)$$

$$p = \frac{\tilde{\rho} \tilde{v} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0; \frac{R_3}{l} = \psi = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right); \tilde{\lambda} = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon)$$

Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ с учетом (24)

$$P = P^0 + \tilde{\lambda} P^1 + \dots, v_x = v_x^0 + \tilde{\lambda} v_x^1 + \dots, v_r = v_r^0 + \tilde{\lambda} v_r^1 + \dots \quad (25)$$

и полагая $\psi = 0$ (нулевое приближение по ψ - гидродинамическая теория сазки) из уравнений (14) для первых членов разложений получим

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{v}} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (26)$$

и граничные условия вида

$$\begin{aligned} v_r^0 &= -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \quad \text{при } r^* = 1 \\ r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} &= 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \quad \text{при } r^* = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

Определим в этих переменных напряжения со стороны жидкости на оболочке. С точностью до λ , ψ из (16) получаем

$$\tilde{q}_x = -\tilde{\lambda} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, \quad \tilde{q}_n = -\frac{\tilde{\lambda}}{\psi} \frac{\tilde{v}}{R_3 c_0} \tilde{\rho}_0 c_0^2 P \quad (28)$$

В [19] задача (26), (27) решалась методом итерации в результате, найдены выражения, входящие в правую часть уравнений (13). учитывая, что $\frac{w_m l}{u_m R_3} u_{30}^{(2)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(2)}$

при $R_3 = R^{(2)} = R$ в силу малости ψ , λ получаем

$$\begin{aligned} \tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} &= \frac{\tilde{v}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1-\mu_0^2} [1-2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \\ &- \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1-\mu_0^2) [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (29)$$

Уравнения динамики соосных оболочек

Система уравнений (13) с учетом найденных правых частей (22), (23), (29) становится такой

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l}\right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^4} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^3} + k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{\partial^2 u_{10}^{(i)}}{\partial \xi^2} = \\ &= -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{10} \tilde{\text{Re}} \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi \partial \tau} - \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 2\sqrt{1-\mu_0^2} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2) \left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^4} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^3} = \\
& = -6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[\left(\frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{10}^{(1)}}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{10} \tilde{R} e \sqrt{1-\mu_0^2} \left(\frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_{10}^{(1)}}{\partial \xi^2} \right) \right] - \\
& - \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left\{ \frac{\tilde{\nu}}{R c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4\sqrt{1-\mu_0^2} [1-2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi} - \right. \\
& \left. - \frac{R}{l} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{1}{6} (1-\mu_0^2) [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}^{(2)}}{\partial \xi^2} \right\}
\end{aligned} \tag{30}$$

Можно ввести обозначения $u_{10\xi}^{(1)} = c_3 \phi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = c_3 \phi^{(2)}$, $\eta = c_1 \xi$, $t = c_2 \tau$, где

$$\begin{aligned}
c_2 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \frac{\nu}{\delta c_0}, c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}} \right]^{\frac{1}{3}} \\
c_3 &= \left[\frac{c_2}{c_1} \frac{E\varepsilon}{m} \left(\frac{l}{u_m} \right)^2 \frac{1}{2\sqrt{1-\mu^2} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2)} \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \left(\frac{R}{\delta} \right)^2 \frac{\delta}{l} \frac{1}{\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{10} \frac{c_1}{c_2}; \quad \sigma_2 = \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{\nu}}{\varepsilon R c_0} 2(1-2\mu_0)^2 \frac{1}{c_2}; \quad \sigma_4 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \frac{1}{2} \frac{1}{c_2} \\
\sigma_3 &= \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{R}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{12} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{c_1}{c_2}; \quad \sigma_5 = k_1 \frac{\mu_0^2}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \frac{1}{\varepsilon} \frac{h_0}{R} \frac{c_1^2}{c_2}; \quad \sigma_6 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{c_1^2}{c_2}
\end{aligned}$$

и получаем систему уравнений

$$\begin{aligned}
\phi_t^{(1)} - 6\phi^{(1)2} \phi_\eta^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} - \sigma_1 (\phi_\eta^{(1)} - \phi_\eta^{(2)}) + \sigma_4 \phi^{(1)} + \sigma_5 \phi_\eta^{(1)} - \sigma_6 \phi_{\eta\eta}^{(1)} &= 0 \\
\phi_t^{(2)} - 6\phi^{(2)2} \phi_\eta^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma_1 (\phi_\eta^{(2)} - \phi_\eta^{(1)}) + \sigma_2 \phi^{(2)} - \sigma_3 \phi_\eta^{(2)} + \sigma_4 \phi^{(2)} - \sigma_6 \phi_{\eta\eta}^{(2)} &= 0
\end{aligned} \tag{31}$$

Система уравнений (31) имеет в качестве точного решения при $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

(отсутствие жидкости во внутренней оболочке) и $\sigma_4 = \sigma_5 = 0$ (отсутствие конструкционного демпфирования в продольном направлении и окружающей среды) следующее решение в виде кинка на пьедестале

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = \frac{\sigma_6}{6} + kth \left\{ k\eta + \left(2k^3 + k \frac{\sigma_6^2}{6} \right) t \right\} \quad (32)$$

Из этих формул следует, что скорость волны деформации дозвуковая. Фазовая скорость волны отрицательна для решения (32) и имеет вид $-\left(2k^2 + \frac{\sigma_6^2}{6} \right)$. В случае наличия жидкости во внутренней оболочке необходимо численное решение системы уравнений (40). В качестве начального условия ($t=0$) можно взять, например

$$\phi^{(1)} = \frac{\sigma_6}{6} + kth\{k\eta\} \quad \phi^{(2)} = \frac{\sigma_6}{6} + kth\{k\eta\} \quad (33)$$

или

$$\phi^{(1)} = \frac{\sigma_6}{6} + kth\{k\eta\}, \quad \phi^{(2)} = 0 \quad (34)$$

Численный эксперимент

Используем разностную схему для уравнений (40), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности [20] для проведения вычислительного эксперимента

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(1)n+1}_j - u^{(1)n}_j}{\tau} - 2 \frac{(u^{(1)3n+1}_{j+1} - u^{(1)3n+1}_{j-1}) + (u^{(1)3n}_{j+1} - u^{(1)3n}_{j-1})}{4h} + \\ & + \frac{(u^{(1)n+1}_{j+2} - 2u^{(1)n+1}_{j+1} + 2u^{(1)n+1}_{j-1} - u^{(1)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\ & + \frac{(u^{(1)n}_{j+2} - 2u^{(1)n}_{j+1} + 2u^{(1)n}_{j-1} - u^{(1)n}_{j-2})}{4h^3} + \\ & + \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \\ & - \sigma_1 \left(\frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} \right) + \\ & + \sigma_4 \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} + \sigma_5 \frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u^{(2)n+1}_j - u^{(2)n}_j}{\tau} - 2 \frac{(u^{(2)3n+1}_{j+1} - u^{(2)3n+1}_{j-1}) + (u^{(2)3n}_{j+1} - u^{(2)3n}_{j-1})}{4h} + \\
& + \frac{(u^{(2)n+1}_{j+2} - 2u^{(2)n+1}_{j+1} + 2u^{(2)n+1}_{j-1} - u^{(2)n+1}_{j-2})}{4h^3} + \\
& + \frac{(u^{(2)n}_{j+2} - 2u^{(2)n}_{j+1} + 2u^{(2)n}_{j-1} - u^{(2)n}_{j-2})}{4h^3} - \\
& + \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \frac{u^{(1)n+1}_j + u^{(1)n}_j}{2} - \\
& - \sigma_1 \left(\frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} - \frac{(u^{(1)n+1}_{j+1} - u^{(1)n+1}_{j-1}) + (u^{(1)n}_{j+1} - u^{(1)n}_{j-1})}{4h} \right) + \\
& + (\sigma_2 + \sigma_4) \frac{u^{(2)n+1}_j + u^{(2)n}_j}{2} - \sigma_3 \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} - \\
& - \sigma_3 \frac{(u^{(2)n+1}_{j+1} - u^{(2)n+1}_{j-1}) + (u^{(2)n}_{j+1} - u^{(2)n}_{j-1})}{4h} = 0.
\end{aligned}$$

Вычислительные эксперименты, выполненные в [19] позволили оценить поведение нелинейной волны деформации при наличии вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке, а также между внутренней и внешней оболочками с учетом инерции жидкости. Графики численного решения уравнений (31) с начальными условиями (43) или (44) представлены на рисунках 2 - 5.

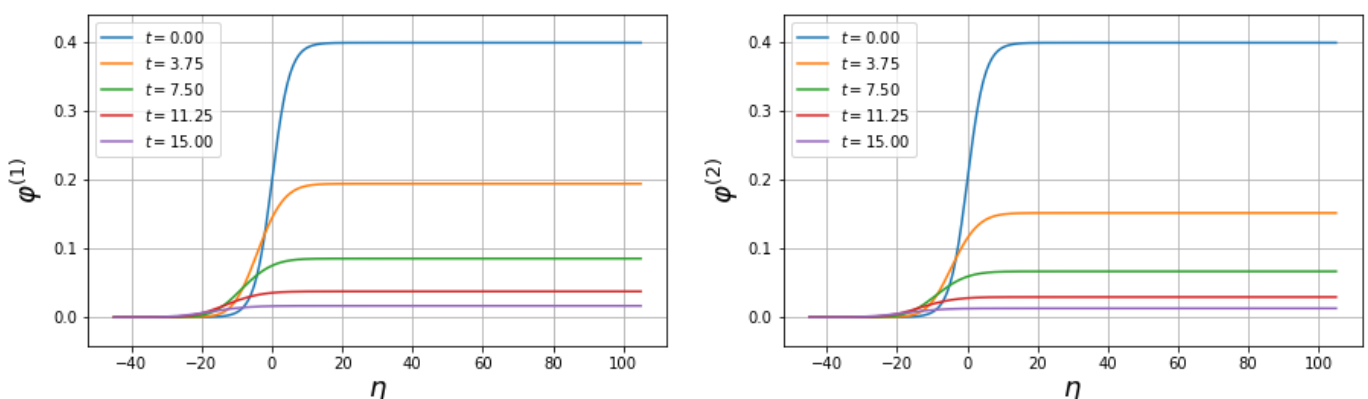


Рис. 2. $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.5$, $\sigma_3 = 0.5$, $\sigma_4 = 0$, $\sigma_5 = 0$, $\sigma_6 = 1.2$, $k = \delta_6/6$, начальное условие (32).

На рисунке 2 показан случай отсутствия конструкционного демпфирования в продольном направлении и окружающей среды, волна движется влево.

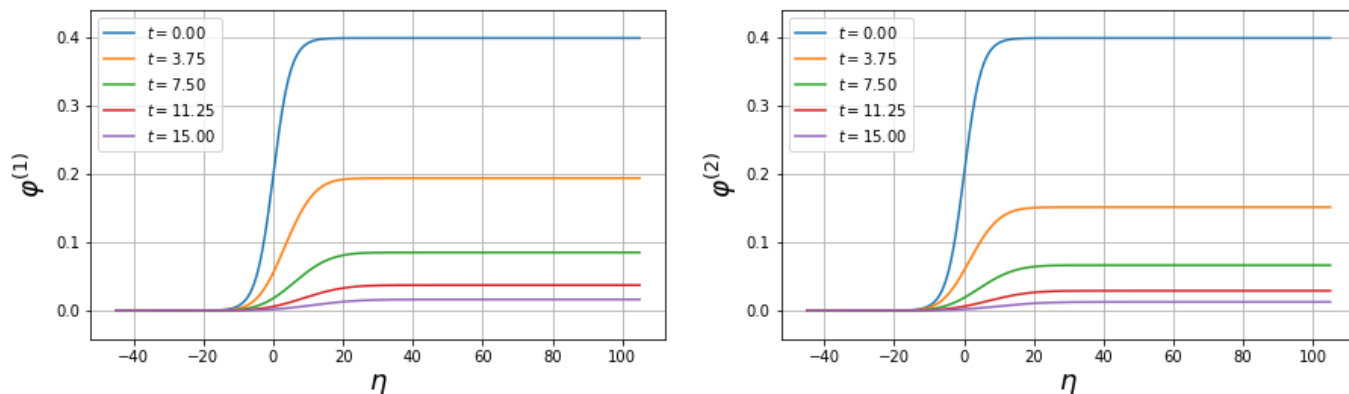


Рис. 3. $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0.5$, $\sigma_3=0.5$, $\sigma_4=0$, $\sigma_5=3$, $\sigma_6=1.2$, $k=\delta_6/6$, начальное условие (32)

На рисунке 3 показан случай отсутствия конструкционного демпфирования в продольном направлении, волна движется вправо, скорость волны увеличина, по сравнению с рисунком 2.

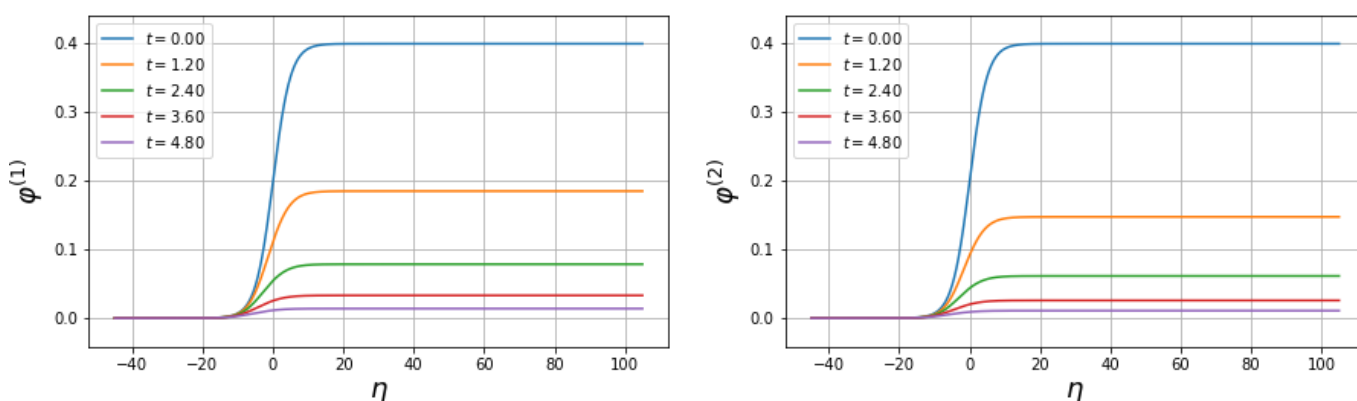


Рис. 4. $\sigma_1=1$, $\sigma_2=0.5$, $\sigma_3=0.5$, $\sigma_4=0.5$, $\sigma_5=0$, $\sigma_6=1.2$, $k=\delta_6/6$, начальное условие (32)

На рисунке 4 показан случай отсутствия окружающей среды, амплитуда волны падает быстрее, чем на рисунке 2.

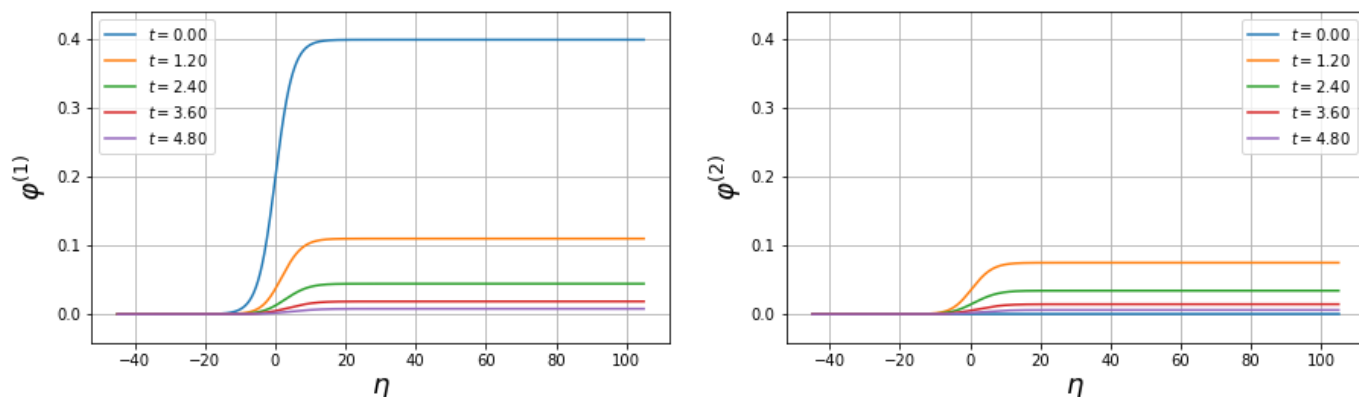


Рис. 5. $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 0.5$, $\sigma_3 = 0.5$, $\sigma_4 = 0.5$, $\sigma_5 = 3$, $\sigma_6 = 1.2$, $k = \delta_6/6$, начальное условие (33).

На рисунке 5 присутствует конструктивное демпфирование в продольном и нормальном направлении, а также влияние окружающей среды, волны сдвигаются вправо, их скорости увеличены, как на рисунке 3. Наблюдается падение амплитуды волны и появление волны во внутренней оболочке, затем резкое падение амплитуд в обеих оболочках.

Выводы

Если в начальный момент времени (при $t=0$) во внешней оболочке присутствует волна деформации с заданной амплитудой, то возмущение передается во внутреннюю не деформированную в начальный момент времени оболочку через слой жидкости, при этом, со временем, падает амплитуда волны во внешней оболочке и, ее скорость снижается.

При этом во внутренней оболочке происходит увеличение амплитуды волны до некоторой величины, а затем наблюдается падение амплитуд волн в обеих

оболочках. Влияние упругой окружающей внешнюю оболочку среды приводит к увеличению скорости волны в этой оболочке и, как следствие, к увеличению скорости волны во внутренней оболочке. Конструкционное демпфирование в нормальном направлении уменьшает скорость волн и увеличивает амплитуды волн на постоянную величину, а конструкционное демпфирование в продольном направлении приводит к дополнительному снижению амплитуд волн, которое происходило под влиянием вязкого трения жидкости во внутренней оболочке.

Выполнено при поддержке гранта РФФИ 19-01-00014а.

Библиографический список

1. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Никитина Е.А. Учет влияния поврежденности материала на скорость распространения в нем упругой волны // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=22861>
2. Лай Т.Т., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
3. Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Морозов А.Н. Локализация волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=22860>
4. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Известия Вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3. № 1. С. 52 - 58.

5. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48. № 6. С. 725 - 740.
6. Аршинов Г.А. Дисперсионные волны в нелинейно-вязкоупругих цилиндрических оболочках // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Технические науки. Приложение. 2003. № 3. С. 76 - 80.
7. Доронин А.М., Ерофеев В.И. Трехволновое резонансное взаимодействие в упругопластической среде // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 3. С. 52 – 62.
8. Агеев Р.В., Кузнецова Е.Л., Куликов Н.И., Могилевич Л.И., Попов В.С. Математическая модель движения пульсирующего слоя вязкой жидкости в канале с упругой стенкой // Вестник ПНИПУ. Механика. 2014. № 3. С. 17 – 35.
9. Лекомцев С.В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 2. С. 233 - 243.
10. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 1. С. 94 - 102.
11. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. - М.: Наука, 1979. - 320 с.
12. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи аэроупругости. - М.: Наука, 1976. - 416 с.
13. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. - М.: МГУ, 1990. - 310 с.

14. Овчаров А.А., Брылев И.С. Математическая модель деформирования нелинейно упругих подкрепленных конических оболочек при динамическом нагружении // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 3. URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/viewid=13235>
15. Каудерер К. Нелинейная механика. - М.: Издательство иностранной литературы, 1961. - 778 с.
16. Фельдштейн В.А. Упруго пластические деформации цилиндрической оболочки при продольном ударе. Волны в неупругих средах: сборник статей. – Кишинев: Изд-во АН МолССР, 1970. С. 199 - 204.
17. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. - М.: Юрайт, 2018. - 439 с.
18. Loitsyanskii L.G. Mechanics of Liquids and Gases, Oxford, Pergamon Press, 1966, 802 p.
19. Mogilevich L., Ivanov S. Longitudinal Waves in Two Coaxial Elastic Shells with Hard Cubic Nonlinearity and Filled with a Viscous Incompressible Fluid // Studies in Systems, Decision and Control, 2021, vol. 337, pp. 14 - 26. DOI: [10.1007/978-3-030-65283-8_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8_2)
20. Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Generation of difference schemes for the burgers equation by constructing Gröbner bases // Programming and Computer Software, 2006, vol. 32, no. 2, pp. 114 - 117. DOI: [10.1134/S0361768806020095](https://doi.org/10.1134/S0361768806020095)

Longitudinal waves in coaxial elastic shells with account for structural damping and with fluid inside

Blinkov Y.A.^{1*}, Ivanov S.V.^{1}, Mogilevich L.I.^{2***}, Popov V.S.^{2,3****}, Popova E.V.^{1*****}**

¹Saratov State University, 83, Astrakhanskaya str., Saratov, 410012, Russia

*²Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,
77, Politechnicheskaya str., Saratov, 410054, Russia*

*³Institute of Precision Mechanics and Control of the Russian Academy of Sciences,
24, Rabochaya str., Saratov, 410028, Russia*

** e-mail: blinkovua@gmail.com*

*** e-mail: evilgraywolf@gmail.com*

**** e-mail: mogilevichli@gmail.com*

***** e-mail: vic_p@bk.ru*

****** e-mail: elizaveta.popova.97@bk.ru*

Abstract

This article studies longitudinal deformation waves in coaxial elastic shells with soft cubic nonlinearity, containing a viscous incompressible fluid, both between them and in the inner shell. The structural damping effect of the shell material in both longitudinal and normal directions and the environment surrounding the outer shell on the wave amplitude and speed was accounted for. The article demonstrates that this leads to the need for numerical methods application to study the nonlinear wave process. The numerical study of the model obtained in the course of this work being performed employing a difference scheme for equations similar to the Crank-Nicholson scheme. In the absence of liquid inside the shell, structural damping in the longitudinal direction as well as surrounding elastic medium, the velocity and amplitude of the waves, propagated in the shells, do not change. Computations show that the waves' movement takes place in the introduced

moving coordinates system in the negative direction of the abscissa axis. This means that the found nonlinear addition to the wave velocities in the linear approximation (the speed of sound) decreases the waves velocities and they become subsonic. The result of the computational experiment in this case coincides with the exact solution; therefore, the difference scheme and the system of generalized modified Korteweg - de Vries - Burgers (MCdV-B) equations proposed in this work are adequate. At accounting for the impact of inertia of the liquid motion in the inner shell, a velocity decrease of the deformation waves occurs, while the presence of the elastic medium surrounding the outer shell leads to their velocity increase. The liquid viscous stress in the inner shell and structural damping of the shells' material in the longitudinal direction leads to the waves amplitudes decrease. Structural damping in the normal direction increases the wave amplitude by a constant value and decreases its velocity.

Keywords: non-linear waves; elastic cylindrical shells; viscous incompressible fluid; Crank-Nicholson difference scheme.

References

1. Erofeev V.I., Morozov A.N., Nikitina E.A. *Trudy MAI*, 2010, no. 40. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=22861>
2. Lai T.T., Tarlakovskii D.V. *Trudy MAI*, 2012, no. 53. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29267>

3. Erofeev V.I., Mal'khanov A.O., Morozov A.N. *Trudy MAI*, 2010, no. 40. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=22860>
4. Zemlyanukhin A.I., Mogilevich L.I. *Izvestiya Vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika*, 1995, vol. 3, no. 1, pp. 52 - 58.
5. Erofeev V.I., Klyueva N.V. *Akusticheskii zhurnal*, 2002, vol. 48, no. 6, pp. 725 - 740.
6. Arshinov G.A. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Tekhnicheskie nauki. Prilozhenie*, 2003, no. 3, pp. 76 - 80.
7. Doronin A.M., Erofeev V.I. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2015, no. 3, pp. 52 – 62.
8. Ageev R.V., Kuznetsova E.L., Kulikov N.I., Mogilevich L.I., Popov V.S. *Vestnik PNIPU. Mekhanika*, 2014, no. 3, pp. 17 – 35.
9. Lekomtsev S.V. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2012, vol. 5, no. 2, pp. 233 - 243.
10. Bochkarev S.A., Matveenko V.P. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2013, vol. 6, no. 1, pp. 94 - 102.
11. Vol'mir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza: zadachi gidrouprugosti* (Shells in liquid and gas flow: hydroelasticity problems), Moscow, Nauka, 1979, 320 p.
12. Vol'mir A.S. *Obolochki v potoke zhidkosti i gaza: zadachi aerouprugosti* (Shells in the flow of liquid and gas: problems of aeroelasticity), Moscow, Nauka, 1976, 416 p.
13. Il'yushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy* (Continuum mechanics), Moscow, MGU, 1990, 310 p.
14. Ovcharov A.A., Brylev I.S. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 2014, no. 3, URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/viewid=13235>

15. Kauderer K. *Nelineinaya mekhanika* (Nonlinear mechanics), Moscow, Izdatel'stvo inostranoi literatury, 1961, 778 p.
16. Fel'dshtein V.A. *Uprugo plasticheskie deformatsii tsilindricheskoi obolochki pri prodol'nom udare. Volny v neuprugikh sredakh. Sbornik statei* (Elastic-plastic strain of cylindrical shell at longitudinal impact. Waves in inelastic media). Kishinev, Izd-vo AN MolSSR, 1970, pp. 199 - 204.
17. Vol'mir A.S. *Nelineinaya dinamika platinok i obolochek* (Nonlinear dynamics of plates and shells), Moscow, Yurait, 2018, 439 p.
18. Loitsyanskii L.G. *Mechanics of Liquids and Gases*, Oxford, Pergamon Press, 1966, 802 p.
19. Mogilevich L., Ivanov S. Longitudinal Waves in Two Coaxial Elastic Shells with Hard Cubic Nonlinearity and Filled with a Viscous Incompressible Fluid, *Studies in Systems, Decision and Control*, 2021, vol. 337, pp. 14 - 26. DOI: [10.1007/978-3-030-65283-8_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-65283-8_2)
20. Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V. Generation of difference schemes for the burgers equation by constructing Gröbner bases, *Programming and Computer Software*, 2006, vol. 32, no. 2, pp. 114 - 117. DOI: [10.1134/S0361768806020095](https://doi.org/10.1134/S0361768806020095)