

УДК: 531.36, 62-503.51

О стабилизации движения робота с деформируемыми колесами при неполной информации о состоянии

Д.Р. Каюмова

Аннотация

В работе рассматривается проблема реализации управления, стабилизирующего прямолинейное стационарное движение экипажа с деформируемыми колесами (простейшей модели планетохода) в условиях дефицита информации о состоянии. Для формирования управления в режиме реального времени необходимы текущие значения всех фазовых переменных, к которым относятся и параметры деформации колес. Проблема получения текущих значений всех фазовых переменных решена применением теории оценивания при неполной информации о состоянии.

Ключевые слова:

аналитическая механика; стабилизация; неполная информация о состоянии; колесный планетоход; дифференциальный привод; деформируемое колесо.

Введение

Планетоходы предназначены для передвижения по поверхности небесного тела. Существуют два способа управления ими: управляемые оператором и автономные планетоходы-роботы. В обоих случаях достаточно эффективно разбиение системы управления на два уровня: тактический и стратегический. В случае неавтономного планетохода стратегия определяется оператором. Даже при операторном управлении увеличение быстродействия тактического уровня управления может обеспечить адекватный ответ объекта (планетохода) в экстремальной ситуации, когда оператор (с учетом запаздывания в канале связи) еще не успевает среагировать. Эффективность системы управления планетоходом может быть существенно повышена за счет увеличения скорости обработки информации тактического уровня системы управления. К примеру, в системе

управления приводами при сохранении полноты модели увеличение скорости обработки реализуемо за счет сокращения объема измерительной информации построением системы оценивания.

В данной статье рассматривается модель колесного робота, которая может быть принята за основу для исследования динамики колесных планетоходов. Предполагается, что условия функционирования (температура, давление, ионизирующие излучения и т.п.) не влияют на динамику рассматриваемой модели. Особенный интерес представляет тот факт, что в процессе решения задачи управления таким роботом, приходится привлекать методы аналитической механики, теории управления, стабилизации и устойчивости. Это связано с тем, что мобильный робот как мехатронная система аккумулирует в себе компоненты различной физической природы. Важность исследований по динамике мобильных роботов, как и робототехнических систем вообще, определяется [1] исключительным значением робототехники как критической технологии, развитие которой формирует будущее науки и мира.

На сегодняшний день опубликовано много работ [2-7], посвященных исследованию различных моделей колесных роботов. Большой библиографический список имеется в [3]. Точность создаваемых моделей определяется, в первую очередь, постановкой задачи. При этом необходимо учитывать, что для построения адекватной математической модели различные составляющие робота необходимо описывать с примерно одинаковой точностью. Только в этом случае можно получить однородную модель без «перекосов».

Естественным продолжением задачи управления является вопрос реализации найденного управления. Так, уменьшение размерности вектора измерения достаточного для построения системы оценивания является актуальной задачей с точки зрения практического конструирования роботов. Во-первых, стоимость датчиков информации определяется их точностью. Во-вторых, измерение далеко не всех параметров системы возможно практически осуществить на реальном объекте (например, текущие значения возмущений параметров деформации колес). В-третьих, наличие датчиков в контуре управления может внести дополнительные погрешности в систему, поскольку каждый сенсор, строго говоря, является динамическим объектом со своим переходным процессом. Учет переходных процессов в датчиках неизбежно увеличит размерность системы и, тем самым, повысит сложность модели.

Уменьшение объема измерительной информации может проводиться двумя способами. Во-первых, определением минимально необходимого числа параметров системы.

Во-вторых, уменьшением размерности вектора измерения таким образом, чтобы рассматриваемая система оставалась наблюдаемой [8].

Первый способ уменьшения объема измерительной информации был применен к модели робота с дифференциальным приводом с учетом деформируемости колес в статье [9]. Однако применение найденного в [9] управления к реальному роботу осложняется тем, что для построения управления в режиме реального времени необходимы текущие значения фазовых переменных, к которым относятся и параметры деформации колес.

Вопросами измерения параметров деформируемого колеса занимались такие ученые, как В. Breuer, В.И. Поддубный [10, 11]. Техническая задача конструирования датчиков деформаций шины решена лишь частично. Так, существуют сенсоры, измеряющие боковое проскальзывание, поперечную деформацию [12, 13]. Для адекватного функционирования системы управления роботом с деформируемыми колесами нужна точная информация о деформации колес в режиме реального времени. При этом необходимо помнить, что стоимость датчиков одного функционального класса сильно варьируется в зависимости от их точности. На практике при конструировании мехатронных систем необходимо обращать внимание не только на точность реализуемых систем, но и на их стоимость. В связи с этим при построении исследуемой мехатронной системы будет выгоднее и целесообразнее построение стабилизирующего управления методами теории управления при неполной информации о состоянии [8].

В данной работе задача получения текущих значений параметров деформации колеса в реальном времени решается построением системы оценивания.

Постановка задачи

Считаем, что модель робота (рис. 1) состоит из трех твердых тел: платформы и двух колес. Передний край платформы опирается на шарик, который может крутиться во всех направлениях. Управляющие моменты формируются подачей напряжения на электродвигатели постоянного тока с независимым возбуждением. Будем предполагать, что качение колес происходит без проскальзывания и что влиянием шарика на динамику робота можно пренебречь.

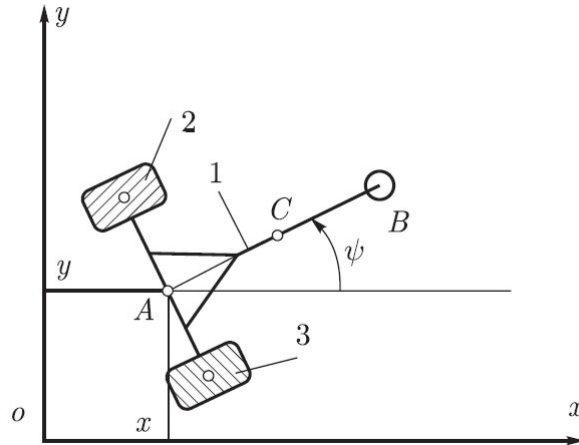


Рис. 1. Робот с дифференциальным приводом

Движение робота описывается следующими координатами: (x, y) координаты точки A , являющейся серединой оси, соединяющей колеса, углами φ_1 и φ_2 собственного вращения соответственного левого и правого колес, углом ψ между осью Ox и осью симметрии робота. Положительное направление вращения колес соответствует движению робота вперед. Положительное направление угла ψ – против часовой стрелки. Обозначим $AC = a$, расстояние от A до центров колес – l . Будем считать радиусы и массы обоих колес одинаковыми $r = r_1 = r_2$, $m_k = m_1 = m_2$. Из этого предположения следует равенство осевых и поперечных моментов левого и правого колес $J_{1y} = J_{2y} = J_{ky}$, $J_{1z} = J_{2z} = J_{kz}$.

В отличие от [4, 6] будем рассматривать модель робота с дифференциальным приводом с колесами, расположенными под постоянным углом к плоскости качения. Как было показано [9], этот параметр может оказывать существенное влияние на динамику системы. На практике наклон колес к опорной плоскости может быть конструктивно заложен, а может появляться вследствие люфтов на нагруженном колесном экипаже. Условимся, что в нашей модели абсолютные значения углов наклона колес одинаковые $|\chi_1| = |\chi_2| = |\chi|$.

При решении поставленной задачи в настоящей работе учитываются все три составляющие робота: механическая, электрическая и информационная. Здесь под учетом информационной составляющей понимаем анализ возможности формирования найденного управления с помощью реально существующих датчиков.

Деформируемость колес, как и в статье [9], будем учитывать обобщенной теорией М.В. Келдыша [14], предложенной Н.А. Фуфаевым [15]. Было показано [9], что для исследования стационарного прямолинейного движения робота с дифференциальным

приводом достаточно учитывать два параметра поперечной и один параметр продольной деформации колеса.

Учет динамики электроприводов

Усложним рассмотренную в статье [9] систему включением модели управляемых электроприводов. В качестве приводных двигателей выбраны двигатели постоянного тока с независимым возбуждением. Динамику двигателей постоянного тока с независимым возбуждением можно учитывать разными способами: уравнениями Лагранжа-Максвелла [3, 4], Воронца, Кирхгофа [16].

Преимущество уравнений Кирхгофа состоит в том, что законы Кирхгофа формулируются для электрических цепей постоянного и квазистационарного тока, а потому достаточно универсальны. При использовании уравнений Кирхгофа для описания электрической части системы, возникающие моменты и силы необходимо вносить в механическую часть вручную, в то время как эти же моменты и силы получаются автоматически при использовании аналитического подхода (формализм Лагранжа-Максвелла и Воронца).

Замечание 1.

Уравнения Лагранжа-Максвелла удобно использовать для электромеханической голономной системы, поскольку они являются обобщением уравнений Лагранжа. При рассмотрении динамики неголономной электромеханической системы с помощью уравнений Лагранжа-Максвелла требуется увеличение размерности системы за счет введения множителей Лагранжа, поэтому в этом случае удобнее использовать уравнения Воронца. Для составления уравнений движения электромеханической системы в аналитическом подходе требуется дополнительно учесть магнитную (1) и электрическую (2) энергии системы, диссипативную энергию электрической части системы (3).

$$W_m = \frac{1}{2} i^T L i + c_e n_e \varphi^T i \quad (1)$$

$$W_{el} = \frac{1}{2} e^T C^{-1} e \quad (2)$$

$$\Psi_{el} = \frac{1}{2} i^T R i \quad (3)$$

где L – матрица, компонентами которой являются индуктивности, C – диагональная матрица, элементами которой являются емкости контуров, R – диагональная матрица,

характеризующая омическое сопротивление системы, c_e – коэффициент электромеханического взаимодействия [4], n_e – передаточное число редуктора.

Результат применения всех описанных способов составления уравнения электрической части рассматриваемой модели робота с деформируемыми колесами оказывается одинаковым, поскольку уравнения Лагранжа-Максвелла получаются из уравнений Воронца для электромеханической голономной системы как частный случай¹, а уравнения Кирхгофа для цепи с постоянным током эквивалентны уравнениям Лагранжа для электрической системы.

Для простоты составления уравнений движения [17] при исследовании динамики робота с деформируемыми колесами будем описывать электрическую часть модели робота с дифференциальным приводом уравнениями Лагранжа-Максвелла [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \hat{L}}{\partial q} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}} &= \hat{Q} \\ \hat{L} &= T - \Pi + W_m + W_{el} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Psi = \Psi_{el}(i_k) + \Psi_m(q_j, \dot{q}_j)$$

$$q = (x, y, \psi, \varphi_1, \varphi_2, e_1, e_2)^T$$

$$\hat{Q} = (R_x, R_y, R_\psi, R_{\varphi_1}, R_{\varphi_2}, u_1, u_2)^T$$

Здесь через e_k обозначены заряды конденсаторов, i_k – ток, протекающий в k -м контуре, u_k – заданная сторонняя ЭДС, приложенная к k -му контуру. В рассматриваемой задаче кинетическая энергия не отличается от кинетической энергии робота с твердыми колесами [4]:

$$\begin{aligned} 2T &= m \left((\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - 2a\dot{\psi}(\dot{x} \sin \psi - \dot{y} \cos \psi) + a^2 \dot{\psi}^2 \right) + 2m_k \left((\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + l^2 \dot{\psi}^2 \right) + J\dot{\psi}^2 \\ &+ J_{ky}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2) + J_{kz} \left((\dot{\psi} \cos \chi_1)^2 + (\dot{\psi} \cos \chi_2)^2 \right) \end{aligned} \quad (5)$$

Потенциальная энергия деформируемой части пневматика [15] описывается выражением:

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 (c_{yi} \eta_{0i}^2 - 2v_{2i} N_i \eta_{0i} \chi_i + \rho_i N_i \chi_i^2 + c_{ti} \eta_{1i}^2 + c_{xi} \xi_{0i}^2) \quad (6)$$

Непотенциальные силы примут вид:

$$\begin{aligned} R_x &= (F_{x1} + F_{x2}) \cos \psi - (F_{y1} \cos \chi_1 + F_{y2} \cos \chi_2 + F_{z1} \sin \chi_1 + F_{z2} \sin \chi_2) \sin \psi \\ R_y &= (F_{x1} + F_{x2}) \sin \psi - (F_{y1} \cos \chi_1 + F_{y2} \cos \chi_2 + F_{z1} \sin \chi_1 + F_{z2} \sin \chi_2) \cos \psi \end{aligned} \quad (7)$$

¹ Известно [16], что при наличии объемных проводников со скользящими контактами применение уравнений Лагранжа 2-го рода приводит к заведомо неверным результатам.

$$R_\psi = l(F_{x2} - F_{x1}) - M_{y1} \sin \chi_1 + M_{z1} \cos \chi_1 - M_{y2} \sin \chi_2 + M_{z2} \cos \chi_2$$

$$R_{\varphi_1} = M_{y1} - r_1 F_{x1}$$

$$R_{\varphi_2} = M_{y2} - r_2 F_{x2}$$

Для рассматриваемой системы диссипация энергии в ее механической части (кроме шины) предполагается равной нулю. Диссипацию энергии в шине, реализуемую, в частности, силами сопротивления качению, будем учитывать [15, 18] дополнительным моментом M_t сопротивления качению (8) в свободном движении.

$$M_{ti} = r_i N f \left(1 + a_f (v_{kxi}^2 + v_{kyi}^2) \right) \quad (8)$$

Как и ранее, замыкаем уравнения (4) движения робота уравнениями, описывающими отсутствие проскальзывания деформируемых колес в поперечном (9) и продольном (10) направлениях.

$$-r_i \dot{\varphi}_i + \dot{\xi}_{0i} + (v_{kxi} \cos(\psi_i + \eta_{1i}) + v_{kyi} \sin(\psi_i + \eta_{1i})) \left(1 + \frac{\alpha_{1i}}{\beta_{1i}} \xi_{0i} - \frac{\gamma_{1i}}{\beta_{1i}} (r_i - r_i^*) \right) = 0 \quad (9)$$

$$v_{kxi} \sin(\psi_i + \eta_{1i}) - v_{kxi} \sin(\psi_i + \eta_{1i}) - \dot{\eta}_{0i} = 0 \quad (10)$$

$$\dot{\psi}_i + \dot{\eta}_{1i} - (v_{kxi} \cos(\psi_i + \eta_{1i}) + v_{kyi} \sin(\psi_i + \eta_{1i})) (\alpha_{2i} \eta_{0i} - \beta_{2i} \eta_{1i} - \gamma_{2i} \chi_i) = 0$$

Поскольку заряды e_k не входят явно в уравнения движения (являются циклическими координатами [19]), понизим порядок системы, выполнив замену $i_k = \frac{de_k}{dt}$. Таким образом, поскольку нас не интересует поведение зарядов электрических контуров, мы исключаем их из рассмотрения. Теперь вместо зарядов в вектор фазовых переменных системы входят их производные по времени – токи i_k контуров.

Рассмотрим в качестве невозмущенного стационарное движение робота вдоль прямой:

$$\begin{aligned} \eta_{01}^*(t) &= \eta_{010} & \eta_{02}^*(t) &= \eta_{020} & \eta_{11}^*(t) &= \eta_{110} \\ \eta_{12}^*(t) &= \eta_{120} & \xi_{01}^*(t) &= \xi_{010} & \xi_{02}^*(t) &= \xi_{020} \\ x^*(t) &= \dot{x}_0 t & y^*(t) &= \dot{y}_0 t & \psi^*(t) &= \psi_0 \\ \varphi_1^*(t) &= \dot{\varphi}_{10} t & \varphi_2^*(t) &= \dot{\varphi}_{20} t & \dot{x}^*(t) &= \dot{x}_0 \\ \dot{y}^*(t) &= \dot{y}_0 & \dot{\psi}^*(t) &= 0 & \dot{\varphi}_1^*(t) &= \dot{\varphi}_{10} \\ \dot{\varphi}_2^*(t) &= \dot{\varphi}_{20} & i_1^*(t) &= i_{10} & i_2^*(t) &= i_{20} \end{aligned} \quad (11)$$

Введем в рассмотрение вектор \bar{w} возмущений фазовых координат:

$$\begin{aligned} w_{\eta_{01}} &= \eta_{01} - \eta_{01}^* & w_{\eta_{11}} &= \eta_{11} - \eta_{11}^* & w_{\eta_{02}} &= \eta_{02} - \eta_{02}^* \\ w_{\eta_{12}} &= \eta_{12} - \eta_{12}^* & w_{\xi_{01}} &= \xi_{01} - \xi_{01}^* & w_{\xi_{02}} &= \xi_{02} - \xi_{02}^* \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{array}{lll}
w_x = x - x^* & w_y = y - y^* & w_\psi = \psi - \psi^* \\
w_{\varphi_1} = \varphi_1 - \varphi_1^* & w_{\varphi_2} = \varphi_2 - \varphi_2^* & w_{\dot{x}} = \dot{x} - \dot{x}^* \\
w_{\dot{y}} = \dot{y} - \dot{y}^* & w_{\dot{\psi}} = \dot{\psi} - \dot{\psi}^* & w_{\dot{\varphi}_1} = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_1^* \\
w_{\dot{\varphi}_2} = \dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_2^* & w_{i_1} = i_1 - i_1^* & w_{i_2} = i_2 - i_2^*
\end{array}$$

Составим уравнения возмущенного движения с выделенным первым приближением:

$$\dot{w} = Pw + Qu$$

$$\begin{array}{l}
w^T = (w_{\eta_{01}} \quad w_{\eta_{02}} \quad w_{\eta_{11}} \quad w_{\eta_{12}} \quad w_{\xi_{01}} \quad w_{\xi_{02}} \quad w_x \quad w_y \quad w_\psi \quad w_{\varphi_1} \quad w_{\varphi_2} \\
w_{\dot{x}} \quad w_{\dot{y}} \quad w_{\dot{\psi}} \quad w_{\dot{\varphi}_1} \quad w_{\dot{\varphi}_2} \quad w_{i_1} \quad w_{i_2})
\end{array} \quad (13)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Kw$$

В рассматриваемой постановке задачи компонентами вектора u являются управляющие напряжения для якорных цепей приводов.

Решение задачи стабилизации при неполной информации о состоянии

Введем значения параметров для численного исследования системы:

$$\begin{array}{ll}
\psi_0 = 0,52 \text{ рад} & \dot{\psi}_0 = 0 \text{ рад/с} \\
\xi_{0i0} = 0 \text{ м} & \dot{\varphi}_{i0} = 2,088 \text{ рад/с} \\
\dot{x}_0 = 0,866 \text{ м/с} & \dot{y}_0 = 0,5 \text{ м/с} \\
\eta_{010} = -\eta_{020} = -0,00034 \text{ м} & \dot{\eta}_{0i0} = \dot{\eta}_{1i0} = \dot{\xi}_{0i0} = 0 \\
\eta_{110} = -\eta_{120} = -0,000011 \text{ рад} & i_i = 0,0007 \text{ А}
\end{array} \quad (14)$$

$$\begin{array}{llll}
J_{kz} = 0,002 \text{ Т} \cdot \text{м}^2 & a = 0,35 \text{ м} & \alpha_{2i} = 88,7 \text{ 1/м}^2 & c_{ti} = 1,7 \text{ кН} \cdot \text{м/рад} \\
l = 1 \text{ м} & R = 0,479 \text{ м} & \beta_{2i} = 17,3 \text{ 1/м} & v_{2i} = 1 \\
m_k = 0,04 \text{ Т} & m = 1 \text{ Т} & \gamma_{2i} = 5 \text{ 1/м} & v_{1i} = 1 \\
J = 0,228 \text{ Т} \cdot \text{м}^2 & J_{ky} = 0,005 \text{ Т} \cdot \text{м}^2 & N_i = 5,5 \text{ кН} & \rho_i = 0,23 \\
dR_1 = -3 \cdot 10^{-5} \text{ м} & dR_2 = -3 \cdot 10^{-5} \text{ м} & c_{xi} = 325 \text{ кН/м} & \alpha_{1i} = 200 \text{ рад/м}^2 \\
\chi_1 = 0,006 \text{ рад} & \chi_2 = -0,006 \text{ рад} & c_{yi} = 147 \text{ кН/м} & \beta_{1i} = 24,6 \text{ 1/м} \\
f = 0,015 & a_f = 3 \cdot 10^{-4} & c_{zi} = 362 & \gamma_{1i} = 16,5 \text{ 1/м}
\end{array} \quad (15)$$

При рассмотрении электрической части системы возьмем численные параметры двигателя постоянного тока с независимым возбуждением 2П160МУХЛ4:

$$\begin{array}{llll}
U_1 = U_2 = 114,6 \text{ В} & L = 5 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} & c_e = 1,44 & n_e = 38,13 \\
U_{nom} = 110 \text{ В} & N_{nom} = 12,5 \text{ Вт} & M_{nom} = 38,2 \text{ Н} \cdot \text{м} & R_{om} = 1,008 \text{ Ом}
\end{array} \quad (16)$$

Отметим, что численные значения коэффициентов из (15), связанных с деформацией колес, взяты из [15].

Замечание 2.

Модель робота с деформируемыми колесами без учета электрической составляющей системы требует введения дополнительного программного управления [21] для компенсации момента сопротивления качению [15, 8]. Уточнение модели (учет переходных процессов в электродвигателях) приводит к тому, что роль позиционной координаты, компенсирующей диссипацию системы, играет напряжение (внешнее ЭДС) якорной цепи электродвигателя. Кроме того, напряжение выполняет функцию программного управления [21].

Матрицы коэффициентов при возмущениях фазовых переменных и управлениях в уравнениях (13) примут вид:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 88,7 & 0 & 17,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 88,7 & 0 & 17,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8,13 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8,13 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0,5 & -0,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & -0,87 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,87 & -0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,87 & -0,5 & -1 & 0 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & -92 & -92 & 0,9 & 0,9 & 96,4 & 424,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 159 & 159 & -1,5 & -1,5 & 434,9 & -134 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & -148 & -148 & 5,3 & 5,3 & -10^3 & 10^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & -0,9 & -0,9 & 0,03 & 0,03 & -3,5 & 6,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & \cdot 10^4 & & & & & & & & & & & & & \\
& & 0,9 & 0,9 & -0,03 & -0,03 & 6,1 & -3,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & & \cdot 10^4 & & & & & & & & & & & & \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
P_4 = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& 0 & 0 & -4 & -3 & 5 \cdot 10^{-3} & 0 & 0 & 10^4 & -6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & \cdot 10^{-3} & \cdot 10^{-3} & & & & & & & & & & & & & & & \cdot 10^{-3} \\
& 0 & 0 & -4 & -3 & -5 & 0 & 0 & -6 & 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & \cdot 10^{-3} & \cdot 10^{-3} & \cdot 10^{-3} & & & \cdot 10^{-3} & & & & & & & & & & & \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^4 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10^4 & 0 & -200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
Q^T = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 198,4 \\
& 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 198,4 & 0
\end{matrix}$$

Без приложения управления невозмущенное движение неустойчиво, поскольку действительные части некоторых корней характеристического уравнения положительны:

$$\begin{matrix}
0 & 0 & 0 & 0 & -100 & -100 \\
& & & & + 11417,6i & - 11417,6i \\
-100 & -100 & -3,9 & -3,9 & -4,1 + 24,2i & -4,1 - 24,2i \\
+ 11417,6i & - 11417,6i & + 46i & - 46i & & \\
-1,5 + 14,9i & -1,5 - 14,9i & -8,4e & 19,9 & 21,4 & -4,1 \\
& & - 16 & & &
\end{matrix}$$

Для рассматриваемой системы выполнено [17] достаточное условие стабилизируемости. Решение линейной квадратичной задачи стабилизации невозмущенного

движения по всем фазовым переменным до неасимптотической устойчивости методом Н.Н. Красовского привело [21] к случаю, близкому к критическому – система с приложенным к ней управлением имеет два корня, по модулю очень близких к нулю:

$-175,05$ $+ 11417,64i$	$-175,05$ $- 11417,64i$	$-175,05$ $+ 11417,65i$	$-175,05$ $- 11417,65i$	$-3,86 + 46i$	$-3,86 - 46i$
$-4,08$ $+ 24,19i$	$-4,08$ $- 24,19i$	$-1,54$ $+ 14,88i$	$-1,54$ $- 14,88i$	$-19,94$	$-21,44$
$-4,14$	$-3,5 \cdot 10^{-3}$ $+ 0,03i$	$-3,5 \cdot 10^{-3}$ $- 0,03i$	$-2,5 \cdot 10^{-3}$	$-5 \cdot 10^{-15}$	$3,5 \cdot 10^{-16}$

Для решения задачи устойчивости в критических случаях или в случаях, близких к критическим, необходимо привлечение теории критических случаев. Методы теории критических случаев предполагают анализ нелинейных членов, что не имеет смысла для рассматриваемой модели. Кроме того, достаточно большая размерность и сложная структура нелинейных членов делают такой метод решения вопроса об устойчивости достаточно трудоемким. Поэтому был применен подход [22] к решению задач стабилизации такого движения путем выделения управляемой подсистемы (без учета квазициклических [23, 24] координат φ_1, φ_2).

$$\dot{\tilde{w}} = A\tilde{w} + B\tilde{u}$$

$$\tilde{u} = K\tilde{w}$$

$$\tilde{w}^T = (w_{\eta_{01}} \quad w_{\eta_{02}} \quad w_{\eta_{11}} \quad w_{\eta_{12}} \quad w_{\xi_{01}} \quad w_{\xi_{02}} \quad w_x \quad w_y \quad w_\psi \quad w_{\varphi_1} \quad w_{\varphi_2} \quad w_{\dot{x}} \quad w_{\dot{y}} \quad w_{\dot{\psi}} \quad w_{\varphi_1} \quad w_{\varphi_2} \quad w_{i_1} \quad w_{i_2}) \quad (18)$$

Найдем матрицу \tilde{K} коэффициентов стабилизирующего управления для выделенной подсистемы. Учтем, что искомое управление \tilde{u} является линейной функцией всех фазовых переменных подсистемы, в том числе текущих значений параметров деформации:

$$K = (K_1 \quad K_2)$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{matrix} & 1,4 & -1,5 & 3,5 & -3,5 & -5 & -171 & 0,1 & -0,1 \\ K_1 & \cdot 10^8 & \cdot 10^8 & \cdot 10^7 & \cdot 10^7 & \cdot 10^3 & & & \\ = & 1,4 & -1,4 & 3,5 & -3,5 & -171 & -5 & -0,05 & 0,17 \\ & \cdot 10^8 & \cdot 10^8 & \cdot 10^7 & \cdot 10^7 & & \cdot 10^3 & & \end{matrix} & (19) \\
 & \begin{matrix} K_2 & -7 & -3 & 6 \cdot 10^4 & 2 \cdot 10^4 & -0,02 & 5 & -1 & -8 \\ = & \cdot 10^4 & \cdot 10^4 & & & & \cdot 10^{-3} & & \cdot 10^{-3} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
7 \cdot 10^4 & 3 \cdot 10^4 & -6 & -2 & 5 & -0,02 & -8 & -1 \\
& & \cdot 10^4 & \cdot 10^4 & \cdot 10^{-3} & & \cdot 10^{-3} &
\end{array}$$

Выделенная подсистема, замкнутая найденным управлением, асимптотически устойчива, поскольку действительные части всех собственных значений подсистемы отрицательны:

$$\begin{array}{cccc}
-175,05 & -175,05 & -175,05 & -175,05 \\
+ 11417,64i & - 11417,64i & + 11417,65i & - 11417,65i \\
-3,86 + 46i & -3,86 - 46i & -4,08 + 24,19i & -4,08 - 24,19i \\
-1,54 + 14,88i & -1,54 - 14,88i & -21,44 & -19,94 \\
-4,14 & -3,4 \cdot 10^{-4} & -0,005 + 0,04i & -0,005 - 0,04i
\end{array}$$

Устойчивость по отношению к квазициклическим координатам φ_1, φ_2 , не вошедшим в рассматриваемую подсистему, определим по поведению скоростей, соответствующих этим квазициклическим² координатам, после приложения стабилизирующего управления. Поскольку при приложении управления устойчивость по отношению к возмущениям этих скоростей становится асимптотической по первому приближению, относительно возмущений этих координат будет иметь место неасимптотическая устойчивость [25].

Аналогичный результат был получен [9] при рассмотрении модели робота с деформируемыми колесами без учета переходных процессов в электродвигателе. Таким образом, можно было бы считать поставленную задачу решенной. Однако необходимые для формирования управления текущие значения параметров деформации колеса получить весьма затруднительно, вследствие чего решение задачи нельзя считать законченным.³ Поэтому следует [8] заменить управление (13) на

$$u(\tau) = K\hat{w}(\tau), \quad (20)$$

где $\hat{w}(\tau)$ – вектор оценок состояния системы. Построим систему асимптотической оценки [8] состояния линейной подсистемы (18):

$$\dot{\hat{w}} = A\hat{w} + L(S\hat{w} - \sigma) + Qu, \quad (21)$$

где $\sigma = Sw$ – реально измеренный выход.

² Для некоторого класса задач динамики оказывается полезным обобщение определения циклических координат. Допустим, что в числе обобщенных координат имеются такие q_{m+1}, \dots, q_n , которые не входят в выражения кинетической энергии и обобщенных сил, но обобщенные силы Q_{m+1}, \dots, Q_n , к ним отнесенные (в отличие от случая циклических координат), не равны нулю. Такие координаты являются *квазициклическими* [23, 24].

³ Аналогичная проблема возникает при реализации законов управления в виде линейной обратной связи для моделей роботов с твердыми колесами [26].

Указанная система оценки называется линейным наблюдателем полного порядка [27]. Проверим наблюдаемость системы – свойство системы, показывающее, можно ли восстановить информацию о состоянии системы по выходу системы.⁴ Проверим выполнение критерия наблюдаемости для пары матриц (A, S) :

$$\text{Rank} [S', A'S', \dots, (A')^{n-1}S'] = n \quad (22)$$

Здесь n – размерность квадратной матрицы A , S – матрица $m \times n$ выходных сигналов, передающих информацию о состоянии системы. Поскольку мы рассматриваем задачу об управлении при неполной информации, в нашем случае $m < n$. В нашем примере матрица S измеряемых фазовых переменных имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для рассматриваемой системы критерий (22) выполнен, значит, мы можем построить систему асимптотической оценки. Для однозначного определения системы найдем матрицу L решением методом Н.Н. Красовского [21] дуальной задачи стабилизации системы:

$$\begin{aligned} \dot{\mu} &= A'\mu + S'v \\ v &= L'\mu \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mu = \hat{w} - w$. Для рассматриваемой модели найдем матрицу L :

$$L = \begin{pmatrix} 3476,2 & 2569,3 & -7752, & 92820,6 & 76983,6 & -2 & -655,9 & -94,3 & 31735,2 & 4849,9 \\ -3476 & -2569, & 7752,4 & -92815, & -76990, 2 & 655,9 & 94,3 & -31735, & -4849, \end{pmatrix} \cdot 10^5$$

⁴ Поскольку рассматриваемая система автономна, свойство наблюдаемости совпадает со свойством идентифицируемости.

74521,4	55078,8	-1,7	$2 \cdot 10^6$	1,7	-4,3	-14060,	-2021,8	6,8	10^5
		$\cdot 10^5$		$\cdot 10^6$	$\cdot 10^6$			$\cdot 10^5$	
-74517,	-55085,	1,7	-2	-1,7	4,3	14060,8	2021,8	-6,8	-10^5
		$\cdot 10^5$	$\cdot 10^6$	$\cdot 10^6$	$\cdot 10^6$			$\cdot 10^5$	
-0,02	-0,02	0,06	-0,8	-0,8	1,8	0,007	0,001	-0,4	-0,06
0,005	0,007	0,01	-0,3	-0,02	0,1	0,001	0,002	-0,06	-0,1
-1,2	0,05	0,1	-0,8	0,4	0,6	0,001	-0,0003	-0,05	0,01
0,05	-1,3	-0,1	0,4	-1,4	0,3	0,001	-0,0004	-0,05	0,02
0,1	-0,1	-1	0,3	0,9	-1,3	-0,004	-0,0008	0,2	0,04
-0,8	0,4	0,3	-27	12	13,2	0,05	0,01	-2,3	-0,8
0,4	-1,4	0,9	12	-45,1	13,8	0,05	0,0006	-2,4	-0,05
0,6	0,3	-1,3	13,2	13,8	-53	-0,1	-0,01	5,3	0,4
0,001	0,001	-0,004	0,05	0,05	-0,1	-0,03	-0,0000	0,02	0,003
-0,0003	-0,0004	-0,000	0,01	0,0006	-0,01	-0,0000	-0,03	0,003	0,006
-0,05	-0,05	0,2	-2,3	-2,4	5,3	0,02	0,003	-1,1	-0,2
0,01	0,02	0,04	-0,8	-0,05	0,4	0,003	0,006	-0,2	-0,3

В такой постановке определим регулятор как систему, состоящую из системы оценки состояния и закона управления [8]. Тогда система в целом (объект плюс регулятор) описывается системой уравнений:

$$\dot{w} = Aw + Bu$$

$$\sigma = S\hat{w}$$

$$\dot{\hat{w}} = A\hat{w} + L(S\hat{w} - \sigma) + Bu \tag{24}$$

$$u = K\hat{w}$$

Эта замкнутая система устойчива, что подтверждается отрицательностью всех действительных частей корней характеристического уравнения замкнутой подсистемы⁵:

⁵ Нахождение корней характеристического уравнения для рассматриваемой задачи осложняется достаточно большим численным разбросом элементов матрицы полной системы. Необходимо проведение анализа численной реализации алгоритмов нахождения собственных значений. Проверка показала, что разные алгоритмы, реализованные в программных библиотеках *numpy* (язык программирования *Python*), *sympy* (*Python*), *linalg* (среда *Maple*), *LinearAlgebra* (*Maple*), возвращают разные значения для одной и той же рассматриваемой системы. Это связано с тем, что вычислительные погрешности и учет малого числа знаков после запятой приводит к существенным искажениям при вычислении собственных значений. Алгоритм *LinearAlgebra* (*Maple*) при точности 20 знаков после запятой для рассматриваемой задачи дает ответ, полностью согласующийся с теорией, в отличие от *linalg* (*Maple*), которому этой точности недостаточно.

$-175,1 + 11417,64i$	$-175,1 - 11417,64i$	$-175,1 + 11417,65i$	$-175,1 - 11417,65i$
$-100 + 11417,6i$	$-100 - 11417,6i$	$-100 + 11417,6i$	$-100 - 11417,6i$
$-15,7 + 48,8i$	$-15,7 - 48,8i$	$-3,9 + 46i$	$-3,9 - 46i$
$-9,3 + 25,5i$	$-9,3 - 25,5i$	$-2,9 + 22,3i$	$-2,9 - 22,3i$
$-21,5 + 7,8i$	$-21,5 - 7,8i$	$-1,5 + 14,9i$	$-1,5 - 14,9i$
$-7,5 + 15,9i$	$-7,5 - 15,9i$	$-19,9$	$-19,3$
$-0,005 + 0,04i$	$-0,005 - 0,04i$	$-0,0007$	$-1,2$
$-1,3 + 0,2i$	$-1,3 - 0,2i$	$-4,1$	$-4,1$

Динамическое поведение этой системы есть прямая сумма динамического поведения контура регулирования (определяемого матрицей $A + BK$) и контура оценки состояния (определяемого матрицей $A + LS$). Таким образом, найденное управление $u = K\hat{w}$ позволит стабилизировать невозмущенное движение рассматриваемой системы. Это показывает, что возможность конструирования регулятора непосредственно получается из свойств управляемости и идентифицируемости системы [8].

Замечание 3.

Наличие циклических координат в системе и применение подхода [22] к решению задачи об устойчивости движения позволило уменьшить число наблюдаемых фазовых переменных.

Попробуем дальше уменьшать размерность объема измеряемой информации. Пусть

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, формировать оценки полного вектора фазовых переменных будем по выходным данным $x, y, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2$. Необходимость измерения фазовых переменных x, y определяется постановкой задачи стабилизации заданного прямолинейного движения. Найдем матрицу L решением дуальной квадратичной задачи методом Н.Н. Красовского [21].

$$L = \begin{pmatrix} 6,9 \cdot 10^6 & 4,1 \cdot 10^6 & -6,1 \cdot 10^5 & -1,6 \cdot 10^5 \\ -6,9 \cdot 10^6 & -4,1 \cdot 10^6 & 6,1 \cdot 10^5 & 1,6 \cdot 10^5 \\ 1,5 \cdot 10^8 & 8,8 \cdot 10^7 & -1,3 \cdot 10^7 & -3,5 \cdot 10^6 \\ -1,5 \cdot 10^8 & -8,8 \cdot 10^7 & 1,3 \cdot 10^7 & 3,5 \cdot 10^6 \\ -46,07 & -28,97 & 4,14 & 1,1 \end{pmatrix}$$

-13,1	-6,1	1,1	0,3
-42,96	-1,06	2,74	0,78
-1,06	-42,87	1,72	0,37
68,07	39,46	-5,98	-1,59
-926,7	-37,96	61,47	17,5
-58,4	-920,67	40,39	8,7
1470,6	825,56	-128,01	-34,16
2,7	1,7	-0,3	-0,07
0,8	0,4	-0,07	-0,05
-134,8	-84,78	12,1	3,2
-38,4	-17,97	3,21	0,87

Регулятор, замкнутый таким идентификатором, является устойчивым. Это подтверждается численным экспериментом: все действительные части корней соответствующего характеристического уравнения отрицательны.

$-175,1 + 11417,56i$	$-175,1 - 11417,56i$	$-175,1 + 11417,65i$	$-175,1 - 11417,65i$
$-100 + 11417,7i$	$-100 - 11417,7i$	$-100 + 11417,6i$	$-100 - 11417,6i$
$-3,9 + 46i$	$-3,9 - 46i$	$-3,9 + 46i$	$-3,9 - 46i$
$-19,8 + 3,6i$	$-19,8 - 3,6i$	$-4,1 + 24,1i$	$-4,1 - 24,1i$
$-4,1 + 24,3i$	$-4,1 - 24,3i$	$-1,6 + 15,1i$	$-1,6 - 15,1i$
$-1,5 + 14,9i$	$-1,5 - 14,9i$	-24	$-19,9$
$-0,005 + 0,04i$	$-0,005 - 0,04i$	$-1,2$	$-0,03$
$-0,5 + 2,1i$	$-0,5 - 2,1i$	$-4,1$	$-4,1$

Таким образом, вектор измерения уменьшен до четырех фазовых переменных: x, y, ϕ_1, ϕ_2 .

Выводы

До конца решена задача стабилизации невозмущенного прямолинейного стационарного движения робота с деформируемыми колесами с учетом переходных процессов в электроприводе. Задача получения значений параметров деформации колеса в реальном времени решена построением системы оценивания. Теперь стабилизирующее управление является функцией оценок возмущений фазовых переменных.

Показано, что учет динамики электроприводов позволил реализовать программное управление, обеспечивающее существование заданного стационарного движения, приложением постоянного напряжения.

Наличие квазициклических координат в системе и применение подхода [22] к решению задачи об устойчивости движения позволили уменьшить число наблюдаемых фазовых переменных.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования динамики более сложных моделей колесных планетоходов.

Библиографический список

1. Нелинейная динамика: Мобильные роботы (специальный выпуск и новый проект «НД») // Нелинейная динамика. 2011. Т.7, №4. С. 729–732. (От редакторов).
2. Буданов В.М., Девянин Е.А. О движении колесных роботов // ПММ. 2003. Т. 67, №2. С. 244–255.
3. Охоцимский Д.Е., Мартыненко Ю.Г. Новые задачи динамики и управления движением мобильных колесных роботов // Успехи механики. 2003. Т.1. С.3–46.
4. Мартыненко Ю.Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундаментальная и прикладная математика. 2005. Т.11, №8. С.29–80.
5. Карапетян А.В., Салмина М.А. Параметрический анализ динамики несимметричного трехколесного робота // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. 2006 С. 3–11.
6. Павловский В.Е., Евграфов В.В., Павловский В.В., Петровская Н.В. Динамика, моделирование, управление мобильными роботами // Материалы Поспеловских чтений. 2007. 18 с. URL: <http://posp.raai.org/data/posp2007/SIR/vlpavl.doc>.
7. Рапопорт Л.Б., Морозов Ю.В. Оценка области притяжения инвариантного множества в задаче управления колесным роботом // Автоматика и телемеханика. 2008. № 11. С. 48–61.
8. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: УРСС, 2010. 400 с.
9. Красинский А.Я., Каюмова Д.Р. О влиянии деформируемости колес на динамику робота с дифференциальным приводом // Нелинейная динамика. 2011. Т. 7, №4. С. 803–822.
10. Поддубный В.И. Применение сенсоров для исследования взаимодействия шин с опорной поверхностью // Ползуновский альманах. 2000. Т.4. С.34–38.

11. Bert Breuer et al. Der Darmstädter Reifensensor—Ein Instrument Zur Messung Dynamischer Grössen Im Rotierenden Rad [the Darmstadt tire sensor—an instrument for measuring dynamic values in a rotating wheel] // TU Darmstadt, Thema Forschung. No. 1/98, pp. 24–31.
12. Павлюк А.С., Поддубный В.И. А.с. 114275I СССР, G01 М 17/02. Устройство для измерения поперечной деформации шины колеса транспортного средства. 1985. № 3574726/27-11; заявл. 07.04.83; опубл. 28.02.85. Бюл. №8 – 4 с.
13. Поддубный В.И., Павлюк А.С. Пат. 2262090. Российская Федерация, C1 G 01 М 17/02. Устройство для измерения напряжений в контакте протектора шины с опорной поверхностью. 2005. Заявл. 01.03.2004; опубл. 10.10.2005. Бюл. №28.
14. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Труды ЦАГИ. 1945. Т.564. 34 с.
15. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 269 с.
16. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неголономных систем. М.: Физматлит, 1967. 520 с.
17. Красинский А.Я., Халиков А.А., Иофе В.В., Каюмова Д.Р. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2011615362. Российская Федерация. Программное составление уравнений движения и исследование стабилизации механических движений. 2011. Правообладатель: ГОУ ВПО «Московский государственный университет прикладной биотехнологии». – Заявка №2011613568; зарегистрирована в Реестре программ для ЭВМ 23 мая 2011 г.
18. Sharp R.S., Alstead C.J. The Influence of Structural Flexibilities on the Straight-running Stability of Motorcycles // Vehicle System Dynamics, 1980. Vol. 9. Pp. 327–357.
19. Румянцев В.В., Карапетян А.В. Устойчивость движений неголономных систем // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Общая механика. 1976. Т. 3. С. 5–42.
20. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 475 с.
21. Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // И.Г. Малкин. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. С. 475–514.
22. Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации неизолированных установившихся движений механических систем // Изб. тр. VIII Межд. семинара «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». ИПУ РАН. 2004. С. 97–103.
23. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: ГИФМЛ, 1961. 824 с.

24. Румянцев В.В. Об управлении и стабилизации систем с циклическими координатами // ПММ. 1972. Т. 36, №6. С. 966–976.
25. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Курс математического анализа. М.: УРСС, 2005. Т. 1. 648 с.
26. Белотелов В.Н. Задача определения угла наклона маятника на цилиндре // Нелинейная динамика. 2011. Т.7, №4. С. 837–844.
27. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 263 с.

Сведения об авторах

Каюмова Динара Рифатовна, инженер Московского авиационного института (национального исследовательского университета), E-mail:dina.kayumova@gmail.com