

ТЕПЛОВЫЕ, ЭЛЕКТРОРАКЕТНЫЕ ДВИГАТЕЛИ И ЭНЕРГОУСТАНОВКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

УДК 621.454.2

DOI: 10.34759/vst-2021-1-45-60

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УРАВНЕНИЙ ИМПУЛЬСОВ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРИ ТЕЧЕНИИ В МЕЖЛОПАТОЧНОМ КАНАЛЕ ГАЗОВЫХ ТУРБИН

Кишкин А.А.* , Зуев А.А. , Делков А.В.*** , Шевченко Ю.Н.******

*Сибирский государственный университет науки и технологий имени академика М.Ф. Решетнева,
проспект им. газеты «Красноярский рабочий», 31, Красноярск, 660037, Россия*

** e-mail: spsp99@mail.ru*

*** e-mail: dla2011@inbox.ru*

**** e-mail: delkov-mx01@mail.ru*

***** e-mail: gift_23j@mail.ru*

Статья поступила в редакцию 20.10.2020

Рассмотрен аналитический подход к интегрированию уравнений импульсов динамического пространственного пограничного слоя для поверхностей обтекания криволинейной формы в естественной криволинейной ортогональной системе координат с наличием поперечного градиента давления. Получены уравнения импульсов параболического типа, пригодные для решения задачи течения в радиальном секторе межлопаточного канала газовых турбин. Представлены уравнения в более общем виде, в отличие от известных частных решений. Отмечено, что при рассмотрении задачи течения с теплообменом (что наиболее актуально для межлопаточного канала неохлаждаемых газовых турбин) необходимо совместное решение полученных уравнений импульсов с интегральным соотношением уравнения энергии температурного и динамического пространственного пограничного слоя. Для рассматриваемого радиального сектора межлопаточного канала уравнения решены конечно-разностным методом. Используемый подход подтверждается верификацией результатов моделирования и визуализации донных линий тока в круговом радиальном модельном канале.

Ключевые слова: динамический пограничный слой, уравнения импульсов, межлопаточный канал, проточная часть турбонасосного агрегата, газовая турбина.

Введение

К проектированию проточных частей газовых турбин предъявляются высокие требования по энергетическим и эксплуатационным параметрам. Наиболее ответственным элементом является межлопаточный канал. В турбинах жидкостных ракетных двигателей (ЖРД) используются неохлаждаемые лопатки. В схемах без дожигания генераторного газа применяются активные турбины, а в схемах с дожиганием — реактивные турбины. Данные типы турбин характеризуются различными профилями межлопаточного канала. Известно, что чем выше температура рабочего тела, поступающего на турбину, тем больше адиабатная работа. Из-за конструктивных особенностей и применяемых материалов температура рабочего тела перед неохлаждаемой турбиной ограничивается, как правило, для восстановительного газа 1000—1200 °С, для окислительного газа 700—900 °С [1].

На теплоотдачу от рабочего тела к конструктивным элементам существенно влияет распределение скоростей по длине межлопаточного канала, а на распределение эпюры температурного пограничного слоя прежде всего оказывает влияние распределение эпюры скорости и давления. Необходимо учитывать особенности течения в межлопаточном канале (на входном участке неустановившегося течения толщина пограничного слоя возрастает, динамические пограничные слои не сомкнуты на оси канала), где на ядро потока оказывает влияние толщина вытеснения пограничного слоя. В данном радиальном канале реализуются криволинейные, незамкнутые линии тока с поперечным градиентом давления, которые существенно влияют на скос донных линий тока.

Особенности течения с теплоотдачей в радиальном межлопаточном канале газовых турбин в основном учитываются следующими методами: с использованием эмпирических зависимостей, численными и аналитическими методами [2].

Использование эмпирических зависимостей не всегда обеспечивает необходимую точность расчета в целях анализа энергетических и эксплуатационных параметров, что требует, как правило, дополнительных экспериментальных исследований и, соответственно, внесения корректирующих коэффициентов в используемые уравнения. Это влечет за собой дополнительные временные и материальные затраты на доводку новых образцов проектируемых агрегатов.

Численные методы достаточно сложны в использовании при проведении инженерных расче-

тов и требуют реализации их в специализированном программном обеспечении. Численные методы исследования используют различные подходы: прямое численное моделирование (метод DNS), усредненные уравнения Навье—Стокса и Рейнольдса (метод RANS). Выбор метода зависит от сложности конструкции и требуемой точности результатов расчета. Достаточно часто применяется метод RANS с использованием моделей $k-\omega$ - и $k-\epsilon$ -турбулентности [3—8]. Вопросы теплоотдачи при обтекании криволинейной поверхности с продольной кривизной потоком рабочего тела также рассмотрены в [9—11], где исследованы случаи обтекания лопаток газовых турбин.

Аналитический метод позволяет получить зависимости, применимые для инженерных расчетов в широком диапазоне возможных вариаций конструктивных и режимных параметров. Аналитические методы, как правило разрабатывались для прямолинейного равномерного течения и имеют ряд ограничений. Одно из ранних исследований — это работа Е.Л. Кнута [12], в которой анализ основан на расширенной аналогии Рейнольдса с передачей тепла, массы и импульса в развитом турбулентном потоке в трубе. Использование профиля распределения скорости и температуры в пограничном слое предложено В.Д. Ранни [13] и модифицировано Д.Л. Туркоттом [14]. Анализ подслоя, проведенный Туркоттом, учитывал влияние теплообмена на турбулентность. Аналитические методы определения коэффициентов теплоотдачи, предложенные в [15, 16], учитывают конвективный перенос тепла в камерах ЖРД при прямолинейном турбулентном течении. Одномерная модель для докритических условий также предложена С.Р. Шайном [17].

В [1, 18—20] показан аналитический подход к определению гидродинамических и тепловых параметров в полостях вращения газовых турбин с замкнутыми кольцевыми линиями тока и поперечным градиентом давления, однако в радиальных полостях межлопаточного канала линия тока не замкнута и решение уравнений динамики и энергии значительно усложняется.

Постановка задачи исследования

Для рассматриваемого радиального сектора межлопаточного канала необходимо совместное решение уравнений импульсов и энергии пространственного пограничного слоя, что представляет актуальную научную и инженерную задачу.

Необходимо отдельно рассмотреть решения уравнений движения в виде уравнений импульсов

пространственного (трёхмерного) пограничного слоя в проекциях на оси естественных криволинейных координат, отличающиеся от известных частных решений [22, 23] в общем виде. Такая запись позволяет получать решения по поверхности любой формы как для потенциальных течений с начальными условиями (для межлопаточного канала радиальной формы), так и для вихревых (вращательных) течений.

Исследование уравнений импульсов динамического пространственного пограничного слоя

При исследовании уравнений динамики пространственных течений при обтекании криволинейных поверхностей с наличием градиента давления используются различные системы координат. Данный подход упрощает описание картины течения, он необходим для получения аналитического решения (от корректного выбора системы координат зависит возможность разделения переменных в дифференциальных уравнениях [22, 24]).

Используем для анализа ортогональную естественную систему координат φ, ψ, y (рис. 1). Ось y направлена по нормали к поверхности обтекания, ось φ совпадает с нормальной к стенке линией тока ядра течения на толщине динамического пограничного слоя δ , ось ψ перпендикулярна оси φ [22].

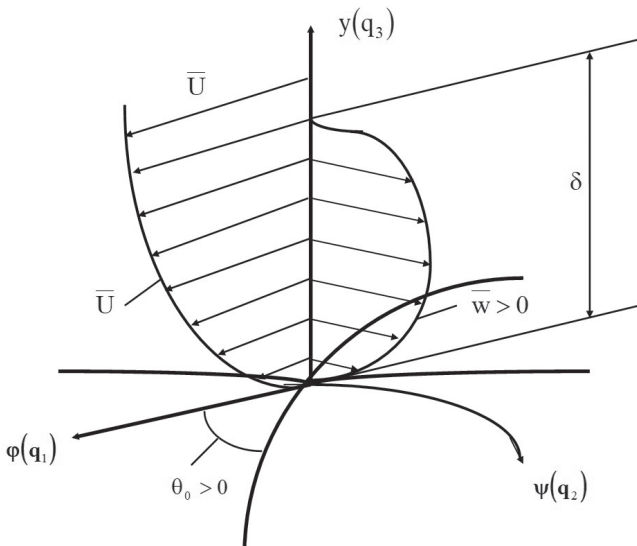


Рис. 1. Схема обтекания поверхности в ортогональной естественной системе координат

Рассмотрим исходную систему дифференциальных уравнений движения пространственного пограничного слоя для криволинейных поверхно-

стей обтекания конструктивных элементов в общем случае с наличием поперечного и продольного градиентов давления:

$$\begin{aligned} & \frac{u}{H_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{w}{H_\psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{uw}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} - \\ & - \frac{w^2}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho H_\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial y}, \\ & \frac{u}{H_\varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + v \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{w}{H_\psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{uw}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} - \\ & - \frac{u^2}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho H_\psi} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\psi}{\partial y}, \quad (1) \\ & \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \\ & \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial (H_\psi u)}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial (H_\varphi w)}{\partial \psi} = 0. \end{aligned}$$

Здесь v, w, u — проекции скоростей на соответствующие оси естественной системы ортогональных координат φ, ψ, y , называемые вертикальной, поперечной и продольной скоростями; H_φ, H_ψ, H_y — коэффициенты Ламе, соответствующие координатам; p — статическое давление в ядре течения; ρ — плотность рабочего тела; τ — касательное напряжение трения.

Аналитический подход к интегрированию системы уравнений (1) возможен только для ламинарного пограничного слоя (с известным распределением функции скорости $U = f(\varphi; \psi)$) и для некоторых частных случаев с использованием большего количества допущений.

При анализе и решении уравнений импульсов для динамического пространственного пограничного слоя, соответствующих первым двум уравнениям системы (1), необходимо проинтегрировать их по координате y в пределах от поверхности обтекания $y = 0$ до толщины динамического пространственного пограничного слоя $y = \delta$. Проведем замену для вертикальной компоненты скорости потока v с учетом уравнения неразрывности:

$$v = - \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \left[\int_0^y \frac{\partial (H_\psi u)}{\partial \varphi} dy + \int_0^y \frac{\partial (H_\varphi w)}{\partial \psi} dy \right]. \quad (2)$$

Тогда из первого уравнение системы (1) с учётом выражения для вертикальной скорости потока (2) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{u}{H_\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \left[\int_0^y \frac{\partial(H_\psi u)}{\partial \varphi} dy + \int_0^y \frac{\partial(H_\varphi w)}{\partial \psi} dy \right] \frac{\partial u}{\partial y} + \\ & + \frac{w}{H_\psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} + \frac{uw}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} - \frac{w^2}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} = \\ & = -\frac{1}{\rho H_\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau \varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Каждый член уравнения (3) рассмотрим и проинтегрируем отдельно. Учтем, что коэффициент Ламе является постоянной величиной при интегрировании по координате y , запишем выражение для интеграла первого члена:

$$A_1 = \int_0^\delta \frac{u}{H_\varphi} \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2H_\varphi} \int_0^\delta 2u \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2H_\varphi} \int_0^\delta \frac{\partial u^2}{\partial y} dy.$$

Изменив последовательность знаков дифференцирования и интеграла, окончательно получим:

$$A_1 = \frac{1}{2H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\int_0^\delta u^2 dy \right]. \quad (4)$$

Интеграл второго члена уравнения (3) необходимо определить по частям:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \int_0^\delta \left[\int_0^y \frac{\partial(H_\psi u)}{\partial \varphi} dy + \int_0^y \frac{\partial(H_\varphi w)}{\partial \psi} dy \right] \frac{\partial u}{\partial y} dy = \\ &= \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \left[\left(\int_0^\delta \frac{\partial(H_\psi u)}{\partial \varphi} dy + \int_0^\delta \frac{\partial(H_\varphi w)}{\partial \psi} dy \right) u \right]_0^\delta - \\ & - \int_0^\delta u \left(\frac{\partial(H_\psi u)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(H_\varphi w)}{\partial \psi} \right) dy. \end{aligned}$$

Учитывая границы интегрирования, необходимо расписать производную от произведения функций и учесть, что частные производные коэффициентов Ламе по соответствующим координатам $\partial H_\psi / \partial \varphi$, $\partial H_\varphi / \partial \psi$ постоянны при интегрировании по оси y и в границах $u \Big|_0^\delta = U$:

$$u \Big|_0^\delta = U :$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \left[U \left\{ \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} \int_0^\delta u dy + H_\psi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^\delta u dy \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \int_0^\delta w dy + H_\varphi \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^\delta w dy \right) \right\} - \right. \\ & \left. - \int_0^\delta u \left(u \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} + H_\psi \frac{\partial u}{\partial \varphi} + w \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} + H_\varphi \frac{\partial w}{\partial \psi} \right) dy \right]. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и произведя преобразования, получим:

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{U}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} \int_0^\delta u dy + \frac{U}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^\delta u dy \right) + \\ & + \frac{U}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \int_0^\delta w dy + \frac{U}{H_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^\delta w dy \right) - \\ & - \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} \int_0^\delta u^2 dy - \frac{1}{2H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^\delta u^2 dy \right) - \\ & - \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \int_0^\delta u w dy - \frac{1}{H_\psi} \int_0^\delta u \frac{\partial w}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (5)$$

При интегрировании третьего члена уравнения (3) необходимо учесть, что постоянным множителем является только коэффициент Ламе, тогда

$$A_3 = \int_0^\delta \frac{w}{H_\psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} dy = \frac{1}{H_\psi} \int_0^\delta w \frac{\partial u}{\partial \psi} dy. \quad (6)$$

В двух следующих выражениях константами являются коэффициенты Ламе и их производные:

$$A_4 = \int_0^\delta \frac{uw}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} dy = \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \int_0^\delta u w dy; \quad (7)$$

$$A_5 = \int_0^\delta \frac{w^2}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} dy = \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \varphi} \int_0^\delta w^2 dy. \quad (8)$$

Учитывая последнее уравнение в системе (1), для следующего члена уравнения (3) получим выражение

$$A_6 = \int_0^\delta \frac{1}{\rho H_\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} dy = \frac{1}{\rho H_\varphi} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \int_0^\delta dy. \quad (9)$$

Для последнего члена уравнения (3) необходимо взять определённый интеграл от производной касательного напряжения трения. Тогда получим последнее выражение для уравнения (3):

$$A_7 = \int_0^{\delta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\varphi}}{\partial y} dy = \frac{1}{\rho} \tau_{\varphi} \Big|_0^{\delta} = \frac{1}{\rho} (0 - \tau_{0\varphi}) = -\frac{1}{\rho} \tau_{0\varphi}. \quad (10)$$

В результате для уравнения (3) можно записать:

$$A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - A_5 = -A_6 + A_7.$$

Учтем, что

$$\frac{1}{H_{\psi}} \int_0^{\delta} u \frac{\partial w}{\partial \psi} dy + \frac{1}{H_{\psi}} \int_0^{\delta} w \frac{\partial u}{\partial \psi} dy = \frac{1}{H_{\psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^{\delta} u w dy \right),$$

тогда получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2H_{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy \right) - \frac{U}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \int_0^{\delta} u dy - \\ & - \frac{U}{H_{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^{\delta} u dy \right) - \frac{U}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} \int_0^{\delta} w dy - \\ & - \frac{U}{H_{\psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^{\delta} w dy \right) + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \int_0^{\delta} u^2 dy + \\ & + \frac{1}{2H_{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^{\delta} u^2 dy \right) + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} \int_0^{\delta} u w dy + \\ & + \frac{1}{H_{\psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^{\delta} u w dy \right) + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} \int_0^{\delta} u w dy - \\ & - \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \int_0^{\delta} w^2 dy = -\frac{1}{\rho H_{\varphi}} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \int_0^{\delta} dy - \frac{\tau_{0\varphi}}{\rho}. \quad (11) \end{aligned}$$

Для дальнейших преобразований по рекомендации [22] необходимо ввести характерные толщины для динамического пространственного пограничного слоя.

Толщина вытеснения продольного потока пограничного слоя (в направлении φ)

$$\delta_{\varphi}^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy. \quad (12)$$

Толщина вытеснения поперечного потока пограничного слоя (в направлении координаты ψ)

$$\delta_{\psi}^* = \int_0^{\delta} \frac{w}{U} dy. \quad (13)$$

Толщина потери импульса продольного потока пограничного слоя (в направлении координаты φ)

$$\delta_{\varphi}^{**} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \frac{u}{U} dy. \quad (14)$$

Толщина потери импульса поперечного потока пограничного слоя (в направлении координаты ψ)

$$\delta_{\psi}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{w^2}{U^2} dy. \quad (15)$$

Толщина потери импульса продольного потока пограничного слоя в поперечном направлении

$$\delta_{\varphi\psi}^{**} = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U} \right) \frac{w}{U} dy. \quad (16)$$

Толщина потери импульса поперечного потока в продольном направлении

$$\delta_{\psi\varphi}^{**} = \int_0^{\delta} \frac{w}{U} \frac{u}{U} dy = \delta_{\psi}^* - \delta_{\varphi\psi}^{**}. \quad (17)$$

Необходимо отметить, что рассматриваемые характерные величины δ_{φ}^* , δ_{φ}^{**} , δ_{ψ}^{**} существенно положительны.

Сгруппируем в уравнении (11) члены с множителем $\partial H_{\psi} / \partial \varphi$:

$$\begin{aligned} B_1 = & -\frac{U}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\sum H_{\psi}}{\partial \varphi} \int_0^{\delta} u dy = \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \int_0^{\delta} u^2 dy - \\ & - \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \int_0^{\delta} w^2 dy. \end{aligned}$$

Каждый член разделим на квадрат скорости ядра течения U^2 и преобразуем выражение:

$$B_1 = \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \left(\int_0^{\delta} \left(\frac{u}{U} - 1 \right) \frac{u}{U} dy - \int_0^{\delta} \frac{w^2}{U^2} dy \right).$$

Учитывая выражения (14) и (15), получим

$$B_1 = -\frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} (\delta_{\varphi}^{**} + \delta_{\psi}^{**}). \quad (18)$$

Сгруппируем в уравнении (11) члены с множителем $\frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi}$:

$$B_2 = -\frac{U}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \int_0^\delta w dy + \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \int_0^\delta u w dy + \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \int_0^\delta u w dy.$$

Аналогично разделим каждый член на квадрат скорости ядра течения U^2 :

$$B_2 = \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} \int_0^\delta \left(\frac{w}{U} dy + 2 \int_0^\delta \frac{u}{U} \frac{w}{U} dy \right).$$

Учитывая выражения (13) и (14), получим:

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} (2\delta_{\psi\varphi}^{**} - \delta_\psi^*) = \\ &= \frac{1}{H_\varphi H_\psi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \psi} (\delta_\psi^* - 2\delta_{\varphi\psi}^{**}); \\ B_3 &= \frac{1}{2H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^\delta u^2 dy \right) - \frac{U}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\int_0^\delta u dy \right) + \\ &+ \frac{1}{2H_\varphi} \frac{\partial H_\varphi}{\partial \varphi} \left(\int_0^\delta u^2 dy \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Проведя преобразования выражения (19) и учитывая взаимно уничтожающиеся члены получим:

$$B_3 = \frac{1}{H_\varphi} \int_0^\delta \left(\frac{\partial u^2}{\partial \varphi} - U \frac{\partial u}{\partial \varphi} - u \frac{\partial U}{\partial \varphi} + u \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right) dy.$$

Отметим, что $U \frac{\partial u}{\partial \varphi} + u \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\partial(Uu)}{\partial \varphi}$, тогда сгруппируем члены и поменяем знак у интеграла и дифференциала:

$$B_3 = \frac{1}{H_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-U^2 \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) \frac{u}{U} dy \right) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \int_0^\delta u dy \right].$$

Учитывая тождество $\int_0^\delta u dy = U(\delta - \delta_\varphi^*)$, можно записать:

$$B_3 = -\frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (U^2 \delta_\varphi^{**}) + \frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial U}{\partial \varphi} U (\delta - \delta_\varphi^{**}).$$

Расписав производную и разделив каждый член на квадрат скорости ядра течения потока рабочего тела U^2 , получим

$$B_3 = -\frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial \delta_\varphi^{**}}{\partial \varphi} - \frac{2\delta_\varphi^{**}}{H_\varphi U} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_\varphi U} \frac{\partial U}{\partial \varphi} (\delta - \delta_\varphi^{**}).$$

Проведя преобразования, запишем:

$$B_3 = -\frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial \delta_\varphi^{**}}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_\varphi U} \frac{\partial U}{\partial \varphi} (-2\delta_\varphi^{**} - \delta_\varphi^* + \delta). \quad (20)$$

Аналогично выделяем в уравнении (11) члены с коэффициентом Ламе $1/H_\psi$ по координате ψ :

$$B_4 = -\frac{U}{H_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^\delta w dy \right) + \frac{1}{H_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^\delta u w dy \right).$$

Вынесем интеграл и добавим взаимно уничтожающиеся члены в подынтегральном выражении:

$$B_4 = \frac{1}{H_\psi} \int_0^\delta \left(-U \frac{\partial w}{\partial \psi} - w \frac{\partial U}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi} + \frac{\partial(uw)}{\partial \psi} \right) dy.$$

Учитывая дифференциал от произведения и суммы подынтегральных функций, преобразуем уравнение к виду

$$B_4 = \int_0^\delta \left(\frac{\partial}{\partial \psi} (uw - Uw) + w \frac{\partial U}{\partial \psi} \right) dy.$$

Записав интеграл от суммы и разделив и умножив первый член выражения на квадрат скорости ядра течения U^2 , второй член на скорость в ядре течения U , получим выражение

$$B_4 = \frac{1}{H_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(-U^2 \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U} \right) \frac{w}{U} dy \right) + \frac{U}{H_\psi} \frac{\partial U}{\partial \psi} \int_0^\delta \frac{w}{U} dy.$$

Принимая во внимание уравнение (3) и проведя преобразования, получим выражение

$$B_4 = -\frac{1}{H_\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (U^2 \delta_{\varphi\psi}^{**}) + \frac{U}{H_\psi} \frac{\partial U}{\partial \psi} \delta_\psi^*.$$

Определим производную от произведения и разделим каждый член на квадрат скорости ядра течения U^2 :

$$B_4 = -\frac{1}{H_\psi} \frac{\partial \delta_{\phi\psi}^{**}}{\partial \psi} - \frac{2\delta_{\phi\psi}^{**}}{H_\psi U} + \frac{1}{H_\psi U} \frac{\partial U}{\partial \psi} \delta_\psi^*.$$

Проведя преобразования, получим:

$$B_4 = -\frac{1}{H_\psi} \frac{\partial \delta_{\phi\psi}^{**}}{\partial \psi} + \frac{1}{H_\psi U} \frac{\partial U}{\partial \psi} (\delta_\psi^* - 2\delta_{\phi\psi}^{**}). \quad (21)$$

Все члены в правой части уравнения (11) разделим на квадрат скорости ядра течения U^2 , тогда получим

$$B_5 = -\frac{1}{\rho H_\phi U^2} \frac{\partial p}{\partial \phi} \delta - \frac{\tau_{0\phi}}{\rho U^2}, \quad (22)$$

где $\delta = \int_0^\delta dy$ — толщина динамического пространственного пограничного слоя.

Уравнение импульсов для первого уравнения системы (1) запишется как сумма полученных выражений:

$$B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = B_5.$$

Изменив знак, можно окончательно записать:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_\phi} \frac{\partial \delta_\phi^{**}}{\partial \phi} + \frac{1}{H_\phi U} \frac{\partial U}{\partial \phi} (2\delta_\phi^{**} + \delta_\phi^* - \delta) + \frac{1}{H_\psi} \frac{\partial \delta_{\phi\psi}^{**}}{\partial \psi} + \\ & + \frac{1}{H_\psi U} \frac{\partial U}{\partial \psi} (2\delta_{\phi\psi}^{**} - \delta_\psi^*) + \frac{1}{H_\phi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \phi} (\delta_\phi^{**} + \delta_\psi^{**}) + \\ & + \frac{1}{H_\phi H_\psi} \frac{\partial H_\phi}{\partial \psi} (2\delta_{\phi\psi}^{**} - \delta_\psi^*) = \frac{1}{\rho H_\phi U^2} \frac{\partial p}{\partial \phi} \delta + \frac{\tau_{0\phi}}{\rho U^2}. \quad (23) \end{aligned}$$

Учитывая выражение (2) для вертикальной компоненты скорости v , перепишем второе уравнение системы дифференциальных уравнений движения (1) для пространственного пограничного слоя:

$$\frac{u}{H_\phi} \frac{\partial w}{\partial \phi} - \frac{1}{H_\phi H_\psi} \left[\int_0^y \frac{\partial (H_\psi u)}{\partial \phi} dy + \int_0^y \frac{\partial (H_\phi w)}{\partial \psi} dy \right] \frac{\partial w}{\partial y} +$$

$$\begin{aligned} & + \frac{w}{H_\psi} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{uw}{H_\phi H_\psi} \frac{\partial H_\psi}{\partial \phi} - \frac{U^2}{H_\phi H_\psi} \frac{\partial H_\phi}{\partial \psi} = \\ & = -\frac{1}{\rho H_\psi} \frac{\partial p}{\partial \psi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\psi}{\partial y}. \quad (24) \end{aligned}$$

Проинтегрируем каждый член уравнение (24) вдоль координаты y от поверхности обтекания 0 до толщины динамического пограничного слоя δ . Учитывая, что коэффициент Ламе является постоянной величиной, при интегрировании по y получим:

$$C_1 = \int_0^\delta \frac{u}{H_\phi} \frac{\partial w}{\partial \phi} dy = \frac{1}{H_\phi} \int_0^\delta u \frac{\partial w}{\partial \phi} dy. \quad (25)$$

Интеграл второго члена возьмем по частям:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{H_\phi H_\psi} \int_0^\delta \left[\int_0^y \frac{\partial (H_\psi u)}{\partial \phi} dy + \int_0^y \frac{\partial (H_\phi w)}{\partial \psi} dy \right] \frac{\partial w}{\partial y} dy; \\ C_2 &= \frac{1}{H_\phi H_\psi} \left[\left(\int_0^y \frac{\partial (H_\psi u)}{\partial \phi} dy + \int_0^y \frac{\partial (H_\phi w)}{\partial \psi} dy \right) w \right]_0^\delta - \\ & - \int_0^\delta w \left[\frac{\partial (H_\psi u)}{\partial \phi} + \frac{\partial (H_\phi w)}{\partial \psi} \right] dy. \end{aligned}$$

Поперечная составляющая скорости в динамическом пространственном пограничном слое (см. рис. 1) равна 0 на поверхности обтекания при $y=0$ и на границе динамического пограничного слоя при $y=\delta$, следовательно, при подстановке пределов интегрирования первый член равен нулю:

$$C_2 = -\frac{1}{H_\phi H_\psi} \int_0^\delta w \left[\frac{\partial (H_\psi u)}{\partial \phi} + \frac{\partial (H_\phi w)}{\partial \psi} \right] dy.$$

Расписав производную и поменяв знак дифференциала и интеграла, получим:

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{H_\phi H_\psi} \left[-\frac{\partial H_\psi}{\partial \phi} \int_0^\delta w u dy - H_\psi \int_0^\delta w \frac{\partial u}{\partial \phi} dy - \right. \\ & \left. - \frac{\partial H_\phi}{\partial \psi} \int_0^\delta w^2 dy - \frac{H_\phi}{2} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^\delta w^2 dy \right) \right]. \quad (26) \end{aligned}$$

В выражении для третьего члена внесём функцию поперечной скорости в пограничном слое w под знак дифференциала:

$$C_3 = \int_0^{\delta} \frac{w}{H_{\psi}} \frac{\partial w}{\partial \psi} dy = \frac{1}{2H_{\psi}};$$

$$C_3 = \frac{1}{2H_{\psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^{\delta} w^2 dy \right). \quad (27)$$

В следующих рассматриваемых членах вынесем за знак интеграла постоянные коэффициенты Ламе и их производные:

$$C_4 = \int_0^{\delta} \frac{u}{H_{\phi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \phi} dy = \frac{1}{H_{\phi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \phi} \int_0^{\delta} u w dy; \quad (28)$$

$$C_5 = \int_0^{\delta} \frac{u^2}{H_{\phi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \psi} dy = \frac{1}{H_{\phi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \psi} \int_0^{\delta} u^2 dy. \quad (29)$$

Учитывая, что давление в пограничном слое p не изменяется по координате y в пределах толщины динамического пограничного слоя δ , получим выражение для следующего члена:

$$C_6 = \int_0^{\delta} \frac{1}{\rho H_{\psi}} \frac{\partial p}{\partial \psi} dy = \frac{1}{\rho H_{\psi}} \frac{\partial p}{\partial \psi} \int_0^{\delta} dy,$$

где $\delta = \int_0^{\delta} dy$ — толщина динамического пространственного пограничного слоя:

$$C_6 = \frac{1}{\rho H_{\psi}} \frac{\partial p}{\partial \psi} \delta. \quad (30)$$

В следующем члене необходимо определить интеграл от производной напряжения трения:

$$C_7 = \int_0^{\delta} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{\psi}}{\partial y} dy = -\frac{\tau_{0\psi}}{\rho}. \quad (31)$$

Результат интегрирования уравнения (24) по толщине динамического пространственного пограничного слоя запишется как сумма интегралов:

$$C_1 - C_2 + C_3 + C_4 - C_5 = -C_6 + C_7.$$

Получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H_{\phi}} \int_0^{\delta} u \frac{\partial w}{\partial \phi} dy + \frac{1}{H_{\phi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \phi} \int_0^{\delta} w u dy + \\ & + \frac{1}{H_{\phi}} \int_0^{\delta} w \frac{\partial u}{\partial \phi} dy + \frac{1}{H_{\phi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \psi} \int_0^{\delta} w^2 dy + \\ & + \frac{1}{2H_{\psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^{\delta} w^2 dy \right) + \frac{1}{2H_{\psi}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\int_0^{\delta} w^2 dy \right) + \\ & + \frac{1}{H_{\phi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \phi} \int_0^{\delta} u w dy - \frac{1}{H_{\phi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\phi}}{\partial \psi} \int_0^{\delta} u^2 dy = \\ & = -\frac{1}{\rho H_{\psi}} \frac{\partial p}{\partial \psi} \delta - \frac{\tau_{0\psi}}{\rho}. \quad (32) \end{aligned}$$

Сгруппируем члены в уравнении (32). Рассмотрим члены с множителем $\frac{1}{H_{\phi}}$:

$$D_1 = \frac{1}{H_{\phi}} \int_0^{\delta} u \frac{\partial w}{\partial \phi} dy + \frac{1}{H_{\phi}} \int_0^{\delta} w \frac{\partial u}{\partial \phi} dy,$$

где D_1 — интеграл дифференциала от произведения функций:

$$D_1 = \frac{1}{H_{\phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\int_0^{\delta} u w dy \right).$$

Разделим и умножим функцию под дифференциалом на квадрат скорости ядра течения U^2 и, учитывая выражение (17), преобразуем уравнение к виду

$$D_1 = \frac{1}{H_{\phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(U^2 \int_0^{\delta} \frac{u}{U} \frac{w}{U} dy \right) = \frac{1}{H_{\phi}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(U^2 \delta_{\phi\psi}^{**} \right).$$

Продифференцируем полученное выражение:

$$D_1 = \frac{2U \delta_{\phi\psi}^{**}}{H_{\phi} U} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \frac{U^2}{H_{\phi}} \frac{\partial \delta_{\phi\psi}^{**}}{\partial \phi}.$$

Разделим каждый член на квадрат скорости ядра течения U^2 , тогда получим

$$D_1 = \frac{2\delta_{\phi\psi}^{**}}{H_{\phi} U} \frac{\partial U}{\partial \phi} + \frac{1}{H_{\phi}} \frac{\partial \delta_{\phi\psi}^{**}}{\partial \phi}. \quad (33)$$

Рассмотрим в уравнении (32) члены с множителем $\frac{1}{H_\Psi} \frac{\partial}{\partial \Psi}$, сложим их и получим

$$D_2 = \frac{1}{H_\Psi} \frac{\partial}{\partial \Psi} \left(\int_0^\delta w^2 dy \right)$$

Умножив подынтегральное выражение на U^2/U^2 и учитывая уравнение (15) для толщины потери импульса поперечного потока пограничного слоя (в направлении координаты Ψ), запишем:

$$D_2 = \frac{1}{H_\Psi} \frac{\partial}{\partial \Psi} (U^2 \delta_\Psi^{**}).$$

Продифференцируем полученное выражение и разделим каждый член на квадрат скорости ядра течения U^2 :

$$D_2 = \frac{2\delta_\Psi^{**}}{H_\Psi} \frac{\partial U}{\partial \Psi} + \frac{1}{H_\Psi} \frac{\partial \delta_\Psi^{**}}{\partial \Psi}. \quad (34)$$

Рассмотрим в уравнении (32) члены с $\frac{1}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Psi}{\partial \Phi}$, при сложении получим

$$D_3 = \frac{2}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Psi}{\partial \Phi} \int_0^\delta w u dy.$$

Аналогично умножим подынтегральное выражение на U^2/U^2 и с учётом толщины потери импульса поперечного потока в продольном направлении (17) получим

$$D_3 = \frac{2U^2}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Psi}{\partial \Phi} \delta_{\Phi\Psi}^{**}.$$

Разделив на квадрат скорости ядра течения U^2 запишем:

$$D_3 = \frac{2}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Psi}{\partial \Phi} \delta_{\Phi\Psi}^{**}. \quad (35)$$

Выполним преобразования для слагаемых с $\frac{1}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Phi}{\partial \Psi}$:

$$D_4 = \frac{1}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Phi}{\partial \Psi} \int_0^\delta w^2 dy - \frac{1}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Phi}{\partial \Psi} \int_0^\delta u^2 dy.$$

В первом члене подынтегральное выражение умножим на U^2/U^2 с учётом (28), во втором члене добавим взаимно уничтожающиеся слагаемые $(Uu + U^2) - (Uu + U^2)$:

$$D_4 = \frac{U^2}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Phi}{\partial \Psi} \int_0^\delta w^2 dy + \frac{1}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Phi}{\partial \Psi} \int_0^\delta (Uu - u^2 + Uu + U^2 - U^2) dy.$$

Преобразовав выражение

$$D_4 = \frac{U^2}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Phi}{\partial \Psi} \delta_\Psi^{**} + \frac{1}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Phi}{\partial \Psi} \int_0^\delta \left[U^2 \left[\left(1 - \frac{u}{U}\right) \frac{u}{U} + \left(1 - \frac{u}{U}\right) - 1 \right] \right] dy,$$

разделим каждый член на квадрат скорости ядра течения U^2 , вынеся общие множители за скобки, с учётом толщины вытеснения продольного потока пограничного слоя (в направлении Φ) (12), толщины потери импульса продольного потока пограничного слоя (в направлении координаты Φ) (14), получим:

$$D_4 = \frac{1}{H_\Phi H_\Psi} \frac{\partial H_\Phi}{\partial \Psi} (\delta_\Psi^{**} + \delta_\Phi^{**} + \delta_\Phi^* - \delta). \quad (36)$$

Члены в правой части (32) аналогично разделим на квадрат скорости ядра течения U^2 :

$$D_5 = -\frac{1}{\rho H_\Psi U^2} \frac{\partial p}{\partial \Psi} \delta - \frac{\tau_{0\Psi}}{\rho U^2}. \quad (37)$$

Уравнение импульсов, соответствующее второму уравнению из системы дифференциальных уравнений пространственного пограничного слоя (1), определится как сумма интегралов:

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 = D_5.$$

Окончательно запишем уравнение импульсов в проекциях на поперечную координатную ось:

$$\frac{1}{H_\Psi} \frac{\partial \delta_\Psi^{**}}{\partial \Psi} + \frac{1}{H_\Phi} \frac{\partial \delta_{\Phi\Psi}^{**}}{\partial \Phi} + \frac{2\delta_{\Phi\Psi}^{**}}{H_\Phi U} \frac{\partial U}{\partial \Phi} + \frac{2\delta_\Psi^{**}}{H_\Psi U} \frac{\partial U}{\partial \Psi} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\delta_{\psi\varphi}^{**}}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} (\delta_{\psi}^{**} + \delta_{\varphi}^{**} + \delta_{\varphi}^{*} - \delta) = \\
 & = -\frac{1}{\rho H_{\psi} U^2} \frac{\partial p}{\partial \psi} \delta - \frac{\tau_{0\psi}}{\rho U^2}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Полученные уравнения (23), (38) представляют собой запись уравнений импульсов в проекциях на направления естественных ортогональных координат φ и ψ . Система уравнений (23), (38) получена в более общем виде в отличие от известных решений Г.Ю. Степанова [22] и С.Н. Шкарбуля [25, 26], выполненных с учётом особенностей течения в межлопаточном канале осевой газовой турбины и по покрывному диску рабочего колеса центробежного насоса и турбины. В предлагаемой записи уравнения импульсов сохранены члены с производной статического давления $\partial p / \partial \varphi$, что позволяет интегрировать уравнения по поверхности любой формы в случае непотенциального течения внешнего потока и сжимаемого рабочего тела.

Отметим, что полученное уравнение импульсов при следующих допущениях:

- 1) отсутствие поперечного градиента статического давления $\partial p / \partial \psi = 0$;
- 2) учёт потенциальности течения

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\varphi} = U \frac{dU}{d\varphi}$$

преобразуется к классической записи интегрального соотношения Кармана [27, 28]:

$$\frac{d\delta_{\varphi}^{**}}{d\varphi} + (2 + H) \frac{\delta_{\varphi}^{**}}{U} \frac{dU}{d\varphi} = \frac{\tau_{0\varphi}}{\rho U^2}.$$

В системах (23), (38) число неизвестных функций превышает число уравнений. Поэтому возможность традиционного решения заключается в том, что необходимо вводить условные относительные существенно положительные величины:

$$H = \frac{\delta_{\varphi}^{*}}{\delta_{\varphi}^{**}}, K = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\delta_{\psi}^{*}}{\delta_{\varphi}^{**}}, L = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\delta_{\psi}^{**}}{\delta_{\varphi}^{**}}, M = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\delta_{\psi\varphi}^{**}}{\delta_{\varphi}^{**}}, I = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\delta_{\psi\psi}^{**}}{\delta_{\varphi}^{**}},$$

которые считаются постоянными величинами в области, не относящейся к зоне отрыва потока. Это подтверждается экспериментальными рабо-

тами, где $\varepsilon = \operatorname{tg} \theta_0$ — тангенс угла скоса донной линии тока (см. рис. 1), определяющий поперечную составляющую напряжения трения на стенке: $\operatorname{tg} \theta_0 = \tau_{0\psi} / \tau_{0\varphi}$. С учетом рассмотренных суще-

ственно положительных величин в системе (23), (38) остаются два неизвестных, что позволяет вести интегрирование без дополнительных уравнений. Оставшиеся неизвестные функции скорости U , $\partial U / \partial \varphi$, $\partial U / \partial \psi$, коэффициентов Ламе

H_{φ} , H_{ψ} , $\frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi}$, $\frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi}$ определяются из известного

решения для внешнего ядра течения и его граничных условий. В общем случае возможно только численное интегрирование системы (23), (38) как систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Данный факт вызывает значительные трудности, связанные с неразвитостью методов интегрирования уравнений этого типа. Однако в некоторых частных случаях возможны преобразования уравнений (23), (38) к виду, позволяющему произвести их интегрирование, в частности для осесимметричных течений и кольцевых замкнутых линий тока.

Для решения задачи обтекания поверхности с учетом теплообмена необходимо совместное решение полученных уравнений (23), (38) и интегрального соотношения уравнения энергии температурного пространственного пограничного слоя, записанного в естественной криволинейной системе координат [21]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{H_{\varphi}} \frac{\partial(\delta_{r\varphi}^{**})}{\partial \varphi} + \frac{1}{H_{\psi}} \frac{\partial(\delta_{r\psi}^{**})}{\partial \psi} + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\psi}}{\partial \varphi} \delta_{r\varphi}^{**} + \\
 & + \frac{1}{H_{\varphi} H_{\psi}} \frac{\partial H_{\varphi}}{\partial \psi} \delta_{r\psi}^{**} = \frac{\alpha}{\rho C_p U} - \frac{\tau_{\varphi_0} (1 + \varepsilon^2)}{\rho C_p (T_{\delta} - T_0)}. \quad (39)
 \end{aligned}$$

Полученные уравнения — это уравнения параболического типа, и для их решения требуется использование конечно-разностных схем. В целях верификации полученных результатов проведены исследования уравнений для радиального сектора.

Теоретические и экспериментальные исследования течения проводились в радиальном секторе (без учета теплообмена) в диапазоне радиусов

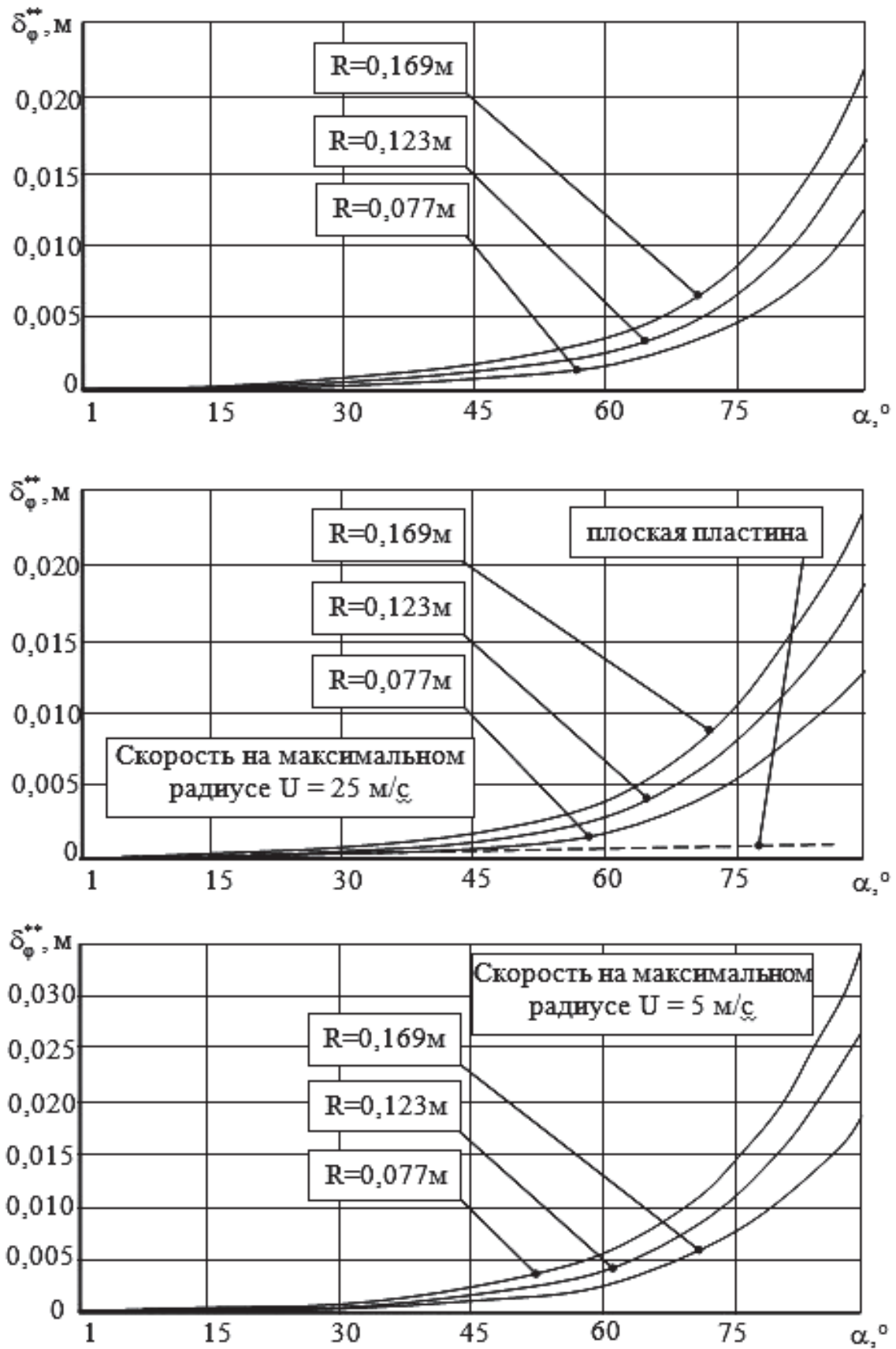
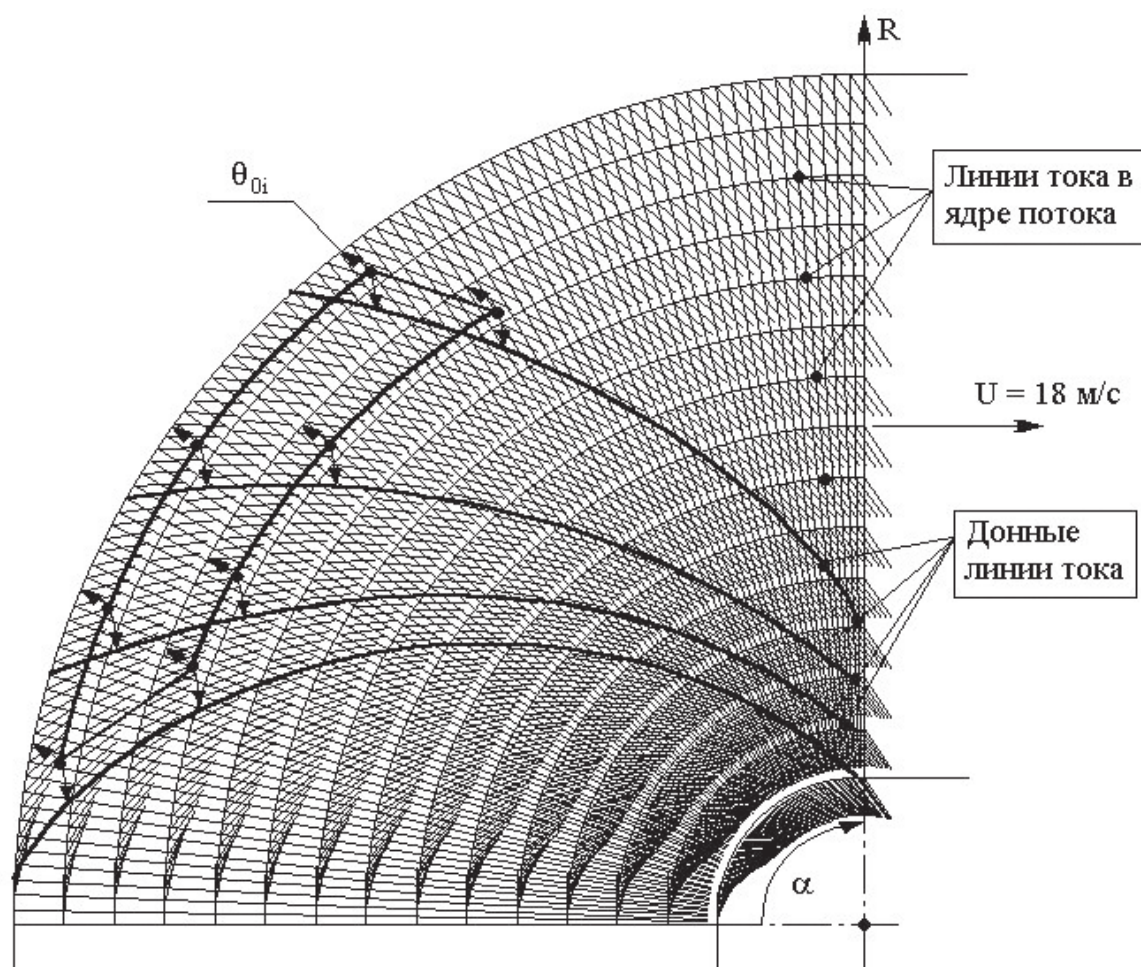
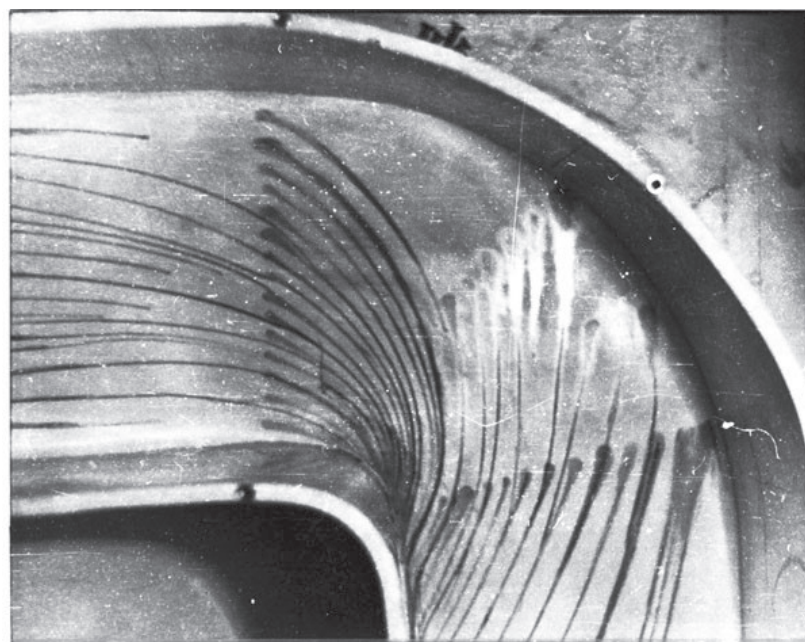


Рис. 2. Зависимость толщины потери импульса от угла поворота потока в круговом радиальном секторе



а)



б)

Рис. 3. Донные линии тока при течении в круговом секторе: а — расчётная визуализация, θ_{0i} — углы скоса донной линии тока; б — экспериментальная визуализация, $U = 18 \text{ м/с}$, при течении в прямоугольном колене

от $R_{\min} = 0,031$ м до $R_{\max} = 0,169$ м на угле поворота потока $\Delta\alpha$ от 0 до 90° . Скорость потока на максимальном радиусе изменялась в пределах от 5 до 50 м/с, что соответствовало изменению критерия

Рейнольдса $Re_u = \left(\frac{U \cdot R}{\nu}\right)$ от $5,6 \cdot 10^5$ до $5,6 \cdot 10^4$. На

рис. 2 приведены расчётные зависимости для толщины потери импульса (в зависимости от угла поворота потока в круговом радиальном секторе, при различных скоростях течения в ядре на различных радиусах). Толщина потери импульса увеличивается при большей длине интегрирования по линии тока. При изменении скорости от 50 до 5 м/с толщина потери импульса динамического пограничного слоя на угле 90° возрастает в 1,6 раза.

На рис. 3 представлены результаты численной и экспериментальной визуализации линий тока при течении в круговом радиальном канале. Видно, что направления линий тока и их характер удовлетворительно совпадают, что свидетельствует о корректности полученного решения рассматриваемых уравнений.

Выводы

Получено уравнение импульсов пространственного (трёхмерного) пограничного слоя в проекциях на оси естественных ортогональных криволинейных координат, отличающееся от известных частных решений и представленное в более общем виде. Такая запись позволяет получать решения по поверхности любой формы как для потенциальных течений, так и для вихревых (вращательных) течений с наличием градиента давлений.

В качестве примера характерного течения в криволинейном радиальном канале (каналы лопаточных машин, криволинейные участки трубопроводов) выполнено интегрирование для потенциального течения в круговом секторе. Результаты численного моделирования согласуются с результатами визуализации линий тока при течении в прямоугольном радиальном канале с цилиндрическими боковыми стенками по окружающим направляющим.

При учете тепловых потоков от рабочего тела к лопаткам турбины требуется совместное решение полученных уравнений импульсов и интегрального соотношения уравнения энергии (39) [21].

Библиографический список

1. Зуев А.А., Назаров В.П., Арнольд А.А. Определение локального коэффициента теплоотдачи с использованием модели температурного пограничного слоя в полостях вращения газовых турбин // Вестник Московского авиационного института. 2019. Т. 26. № 2. С. 99-115.
2. Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И., Федяевский К.К. Гидромеханика: Учеб. для вузов. — Л.: Судостроение, 1982. — 456 с.
3. Stoll J., Straub J. Film cooling and heat transfer in nozzles // Journal of Turbomachinery. 1988. Vol. 110. No. 1, pp. 57–64. DOI: 10.1115/1.3262168
4. Dellimore K.H. Modeling and Simulation of Mixing Layer Flows for Rocket Engine Film Cooling. Ph.D. thesis. — University of Maryland at College Park, 2010, 303 p. URL: <http://hdl.handle.net/1903/10376>
5. Jansson L.S., Davidson L., Olsson E. Calculation of steady and unsteady flows in a film-cooling arrangement using a two-layer algebraic stress model // Numerical Heat Transfer. Part A: Applications. 1994. Vol. 25. Issue 3, pp. 237-258. DOI: 10.1080/10407789408955947
6. Cruz C.A. Experimental and Numerical Characterization of Turbulent Slot Film Cooling. Ph.D. thesis. — University of Maryland at College Park, 2008, 171 p. URL: <http://hdl.handle.net/1903/8145>
7. Cruz C.A., Marshall A.W. Surface and gas temperature measurements along a film cooled wall // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 2007. Vol. 21. No. 1, pp. 181–189. DOI: 10.2514/1.25041
8. Betti B., Martelli E. Heat flux evaluation in oxygen/methane thrust chambers by RANS approach // 46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit (25-28 July 2010, Nashville, TN). AIAA Paper 2010–6721. DOI: 10.2514/6.2010-6721
9. Ильинков А.В., Габдрахманов Р.Р., Такмовцев В.В., Шуккин А.В. Влияние центробежных массовых сил на теплоотдачу при обтекании потоком воздуха вогнутой поверхности с поперечными выступами // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25. № 1. С. 39-48.
10. Горелов Ю.Г., Строчак Е.А. Анализ закономерностей расчета коэффициента теплоотдачи от газа на входных кромках сопловых лопаток турбин высокого давления // Вестник Московского авиационного института. 2016. Т. 23. № 1. С. 80-85.
11. Щербаков М.А., Воробьев Д.А., Маслаков С.А., Равикович Ю.А. Определение коэффициента теплоотдачи на пере лопатки турбины на нерасчётных режимах работы // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 3. С. 95-103.
12. Knuth E.L. The mechanism of film cooling. Ph.D. thesis. — California Institute of Technology. 1954. Vol. 25. No. 1. DOI: 10.2514/8.6577
13. Rannie W.D. Heat transfer in turbulent shear flow // Journal of Aeronautical Sciences. 1956. Vol. 23. No. 5, pp. 485–489. DOI: 10.2514/8.3587

14. *Turcotte D.L.* A sublayer theory for fluid injection into the incompressible turbulent boundary layer // *Journal of Aeronautical Sciences*. 1960. Vol. 27. No. 9, pp. 675–678. DOI: 10.2514/8.8708
15. *Stechman R.C., Oberstone J., Howell J.C.* Design criteria for film cooling for small liquid-propellant rocket engines // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1969. Vol. 6. No. 2, pp. 97–102. DOI: 10.2514/3.29545
16. *Bartz D.R.* A simple equation for rapid estimation of rocket nozzle convective heat transfer coefficients // *Jet Propulsion*. 1957. Vol. 27. No. 1, pp. 49–51. DOI: 10.2514/8.12572
17. *Shine S.R., Kumar S.S., Suresh B.N.* A new generalised model for liquid film cooling in rocket combustion chambers // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2012. Vol. 55. No. 19-20, pp. 5065–5075. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.05.006
18. *Zuev A.A., Arngold A.A., Levko V.A., Maksimov I.A., Leonenkov A.D.* Heat transfer coefficient of laminar rotational flow // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (18–21 November 2019, Krasnoyarsk, Russia). 2020. Vol. 734. DOI: 10.1088/1757-899X/734/1/012029
19. *Зуев А.А., Назаров В.П., Арнгольд А.А., Петров И.М.* Дисковое трение при определении баланса мощностей турбонасосных агрегатов жидкостных ракетных двигателей // *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника*. 2019. № 57. С. 17-31. DOI: 10.15593/2224-9982/2019.57.02
20. *Зуев А.А., Назаров В.П., Арнгольд А.А., Петров И.М.* Методика определения дискового трения малорасходных центробежных насосов // *Сибирский журнал науки и технологий*. 2019. Т. 20, № 2. С. 219–227. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-2-219-227
21. *Zuev A.A., Kishkin A.A., Zhuikov D.A., Tolstopyatov M.I., Savelyeva M.V.* Energy equations for the temperature three-dimensional boundary layer for the flow within boundary conditions of turbo machinery // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* (18–21 November 2019, Krasnoyarsk, Russia). 2020. Vol. 537. DOI: 10.1088/1757-899X/537/2/022008
22. *Степанов Г.Ю.* Гидродинамика решеток турбомашин. — М.: Физматгиз, 1962. — 512 с.
23. *Шкарбуль С.Н.* Исследование пространственных течений вязкой жидкости в рабочих колесах центробежных компрессоров: Дисс. ... докт. техн. наук. — Л., 1973. — 398 с.
24. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
25. *Шкарбуль С.Н.* Расчет пространственного пограничного слоя во вращающихся каналах центробежных колес // *Энергомашиностроение*. 1973. №1. С. 19-29.
26. *Шкарбуль С.Н., Вольчук В.С.* Анализ пространственного пограничного слоя в центробежном колесе турбомшины // *Энергомашиностроение*. 1977. №1. С. 14-16.
27. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя / Пер. с нем. Г.А. Вольперта; Под ред. Л.Г. Лойцянского. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
28. *Kármán Th.V.* Über laminare und turbulente Reibung // *ZAMM (Journal of applied mathematics and mechanics: Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik)*. 1921. Vol. 1. No. 4, pp. 233-252. DOI: 10.1002/zamm.19210010401

ANALYTICAL APPROACH WHILE STUDYING EQUATIONS OF BOUNDARY LAYER IMPULSES AT THE FLOW IN THE INTER-BLADE CHANNEL OF GAS TURBINES

Kishkin A.A.* , Zuev A.A.** , Delkov A.V.*** , Shevchenko Yu.N.****

*Reshetnev Siberian State University of Science and Technologies,
31, Krasnoyarsky Rabochy av., Krasnoyarsk, 660037, Russia*

* e-mail: *spsp99@mail.ru*

** e-mail: *dla2011@inbox.ru*

*** e-mail: *delkov-mx01@mail.ru*

**** e-mail: *gift_23j@mail.ru*

Abstract

Severe requirements on energy and operation parameters are placed to the gas turbines' air-gas channels designing.

Velocities distribution along the length of the inter-blade channel affects significantly the working body heat transfer to the structural elements, and velocity and pressure distribution profiles affect, in the first place, the temperature boundary layer profile distribution. It is essential to account for the specifics of the flow in the inter-blade channel, which represents a radial channel. Convolute, non-closed lines of the flow with transverse pressure gradient, which significantly affect the slope of the flow bottom lines, and, correspondingly, the temperature boundary layer formation and transformation, are being realized in this radial channel.

Joint solution of the momentum and energy equations of the spatial boundary layer for the considered radial cavities of the inter-blade channel is necessary, which represents up-to-date scientific and engineering problem.

In [1, 2-4] the authors proposed analytical approach to hydrodynamic and thermal parameters determining in gas turbines' rotation cavities with closed circular lines and transverse pressure gradient. However, the flow line is non-closed in the inter-channel cavities, and solution of dynamics and energy equations is being significantly complicated.

The article considered the analytical approach to integrating momentum equations of the dynamic and spatial boundary layer for the flow-around surfaces of the curvilinear shape in the natural curvilinear system of coordinates with the presence of the transversal pressure gradient. The initial system of differential equations for the dynamic spatial boundary layer was integrated on the boundary layer thickness. As the result, a system of momentum equations in projections to the directions of natural coordinates was obtained.

The system of equations is presented in a more General form, in contrast to the already known solutions of G.Yu. Stepanov [6] and S.N. Shkarbul [7, 8], performed with account for the flow characteristics in the inter-blade channel of an axial turbine and along the cover disk of the impeller of a centrifugal pump, respectively. The suggested notation of the equation allows integrating in the case of the non-potential external flow over the surface of an arbitrary shape.

To solve the problem of the surface flow-around with account for the heat exchange, the joint solution of the obtained momentum equations and integral relation of energy of the temperature spatial boundary layer written in the natural curvilinear system of coordinates [5].

The resulting equations represent the parabolic type equations and require the finite-difference schemes application to solve them. To verify the obtained results, numerical studies of equations for the radial sector were performed.

Theoretical and experimental studies of the flow were performed in the radial sector (without accounting for the heat exchange) in the range of radii of $R_{\max} = 0.169$ m and $R_{\min} = 0.031$ m, at the flow angle of rotation from 0 to 90°. The flow velocity at the maximum radius varied within 5 ... 50 m/s, which corresponded to a change in the Reynolds number of $Re_U = 5.6 \cdot 10^4 \dots 5.6 \cdot 10^5$.

Computational results are in satisfactory agreement with the results of these current lines visualization for the flow in the rectangular channel with cylindrical side walls along the circumferential guides.

Keywords: dynamic boundary layer, momentum equations, inter-blade channel, air-gas channel of the turbo-pump unit, gas turbine.

References

1. Zuev A.A., Nazarov V.P., Arngol'd A.A. Determining local heat transfer coefficient by a model of temperature

- boundary layer in gas turbine cavity of rotation. *Aerospace MAI Journal*, 2019, vol. 26, no. 2, pp. 99–115.
2. Voitkunskii Ya.I., Faddeev Yu.I., Fedyaevskii K.K. *Gidromekhanika* (Hydromechanics), Leningrad, Sudostroenie, 1982, 456 p.
 3. Stoll J., Straub J. Film cooling and heat transfer in nozzles. *Journal of Turbomachinery*, 1988, vol. 110, no. 1, pp. 57–64. DOI: 10.1115/1.3262168
 4. Dellimore K.H. *Modeling and Simulation of Mixing Layer Flows for Rocket Engine Film Cooling*. Ph.D. thesis. University of Maryland at College Park, 2010, 303 p. URL: <http://hdl.handle.net/1903/10376>
 5. Jansson L.S., Davidson L., Olsson E. Calculation of steady and unsteady flows in a film-cooling arrangement using a two-layer algebraic stress model. *Numerical Heat Transfer. Part A: Applications*, 1994, vol. 25, issue 3, pp. 237–258. DOI: 10.1080/10407789408955947
 6. Cruz C. *Experimental and Numerical Characterization of Turbulent Slot Film Cooling*. Ph.D. thesis. University of Maryland at College Park, 2008, 171 p. URL: <http://hdl.handle.net/1903/8145>
 7. Cruz C.A., Marshall A.W. Surface and gas temperature measurements along a film cooled wall. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 2007, vol. 21, no. 1, pp. 181–189. DOI: 10.2514/1.25041
 8. Betti B., Martelli E. Heat flux evaluation in oxygen/methane thrust chambers by RANS approach. *46th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit (25–28 July 2010, Nashville, TN)*. AIAA Paper 2010–6721. DOI: 10.2514/6.2010-6721
 9. Il'inkov A.V., Gabdrakhmanov R.R., Takmovtsev V.V., Shchukin A.V. Effect of centrifugal mass forces on heat transfer when airflow of concave surface with transverse projections. *Aerospace MAI Journal*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 39–48.
 10. Gorelov Yu.G., Strokach E.A. Conformities analysis of heat transfer coefficient calculation from the gas at high-pressure turbines entry nozzle blade edges. *Aerospace MAI Journal*, 2016, vol. 23, no. 1, pp. 80–85.
 11. Shcherbakov M.A., Vorobyov D.A., Maslakov S.A., Ravikovich Yu.A. Calculation of heat-transfer coefficient on a turbine blade airfoil in abnormal modes. *Aerospace MAI Journal*, 2013, vol. 20, no. 3, pp. 95–103.
 12. Knuth E.L. *The mechanism of film cooling*. Ph.D. thesis. California Institute of Technology, 1954, vol. 25, no. 1. DOI: 10.2514/8.6577
 13. Rannie W.D. Heat transfer in turbulent shear flow. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1956, vol. 23, no. 5, pp. 485–489. DOI: 10.2514/8.3587
 14. Turcotte D.L. A sublayer theory for fluid injection into the incompressible turbulent boundary layer. *Journal of Aeronautical Sciences*, 1960, vol. 27, no. 9, pp. 675–678. DOI: 10.2514/8.8708
 15. Stechman R.C., Oberstone J., Howell J.C. Design criteria for film cooling for small liquid-propellant rocket engines. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1969, vol. 6, no. 2, pp. 97–102. DOI: 10.2514/3.29545
 16. Bartz D.R. A simple equation for rapid estimation of rocket nozzle convective heat transfer coefficients. *Jet Propulsion*, 1957, vol. 27, no. 1, pp. 49–51. DOI: 10.2514/8.12572
 17. Shine S.R., Kumar S.S., Suresh B.N. A new generalized model for liquid film cooling in rocket combustion chambers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2012, vol. 55, no. 19–20, pp. 5065–5075. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.05.006
 18. Zuev A.A., Arngold A.A., Levko V.A., Maksimov I.A., Leonenkov A.D. Heat transfer coefficient of laminar rotational flow. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (18–21 November 2019, Krasnoyarsk, Russia)*, 2020, vol. 734. DOI: 10.1088/1757-899X/734/1/012029
 19. Zuev A.A., Nazarov V.P., Arngol'd A.A., Petrov I.M. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Aerokosmicheskaya tekhnika*, no. 57, pp. 17–31. DOI: 10.15593/2224-9982/2019.57.02
 20. Zuev A.A., Nazarov V.P., Arngol'd A.A., Petrov I.M. *Sibirskii zhurnal nauki i tekhnologii*, 2019, vol. 20, no. 2, pp. 219–227. DOI: 10.31772/2587-6066-2019-20-2-219-227
 21. Zuev A.A., Kishkin A.A., Zhuikov D.A., Tolstopyatov M.I., Savelyeva M.V. Energy equations for the temperature three-dimensional boundary layer for the flow within boundary conditions of turbo machinery. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering (18–21 November 2019, Krasnoyarsk, Russia)*, 2020, vol. 537. DOI: 10.1088/1757-899X/537/2/022008
 22. Stepanov G.Yu. *Gidrodinamika reshetok turbomashin* (Hydrodynamics of turbomachine grids), Moscow, Fizmatgiz, 1962, 512 p.
 23. Shkarbul' S.N. *Issledovanie prostranstvennykh techenii vyazkoi zhidkosti v rabochikh kolesakh tsentrovezhnykh kompressorov* (Investigation of spatial flows of viscous fluid in the impellers of centrifugal compressors), Doctor's thesis, Leningrad, Leningradskii politekhnicheskii institut im. M.I. Kalinina, 1973, 398 p.
 24. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* (Fluid and gas mechanics), Moscow, Nauka, 1970, 940 p.
 25. Shkarbul' S.N. *Energomashinostroenie*, 1973, no. 1, pp. 19–29.
 26. Shkarbul' S.N., Vol'chuk V.S. *Energomashinostroenie*, 1977, no. 1, pp. 14–16.
 27. Schlichting H., Gersten K. *Grenzschicht-Theorie*. Springer, Auflage, 2006, 822 p.
 28. *Kármán Th.V.* Über laminare und turbulente Reibung. *ZAMM*, 1921, vol. 1, no. 4, pp. 233–252. DOI: 10.1002/zamm.19210010401