

Растяжение плоского образца в условиях плоского напряженного состояния при различных полях скоростей перемещений

Григорьева А.Л.*, Хромов А.И., Григорьев Я.Ю.*****

*Комсомольский-на-Амуре государственный университет, КНАГУ, проспект Ленина,
27, Комсомольск-на-Амуре, Хабаровский край, 681013, Россия*

*e-mail: Grigoreva.al@email.knastu.ru

**e-mail: khromovai@list.ru

***e-mail: fct@knastu.ru

Статья поступила 17.03.2020

Аннотация

В данной работе рассматривается алгоритм деформирования полосы в условиях плоского напряженного состояния, который представлен в виде поэтапного перехода от непрерывного к разрывному полю скоростей деформаций. Решение данной задачи описывается математической моделью растяжение жесткопластической полосы, изготовленной из различных конструкционных материалов. В зависимости от материала заготовки, определяется преимущественное поле скоростей деформация, что позволяет определить процесс зарождения и разрушения материала, как можно раньше. Результатом данной работы является поле скоростей деформаций, а также определения оптимального значения E_1 , позволяющего охарактеризовать выбор предпочтительного течения в зависимости от материала, из которого изготовлен образец.

Ключевые слова: поле скоростей перемещений, тензор деформации, конечные приращения, тензор деформации Альманси.

Постановка задачи

Рассматривается задача определения поля скоростей деформаций, возникающее при растяжения плоского образца (растяжение тонкой полосы) в условиях плоского напряженного состояния. При непрерывном деформировании образца поле скоростей деформаций может оцениваться специальным критерием, который принят за характеристику величины деформаций. В данной задаче за такой критерий принимается величина первого главного инварианта тензора Альманси E_1 . Процесс деформирования образца предлагается, разбит на этапы, каждый из которых определяет свое поле скоростей перемещения.

Необходимо определить поле скоростей деформаций, соответствующее данным ограничениям и значения параметра деформации.

Растяжение полосы в условиях плоского напряженного состояния при непрерывном поле скоростей деформаций

Пусть полоса длиной l_0 , шириной a_0 и толщиной f_0 растягивается при кинематических граничных условиях на концах полосы со скоростью V , $a_0 \ll f_0$ (Рисунок 1). В качестве условия пластичности используется условие Мизеса, связывающее компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ соотношением, где k – предел текучести:

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = \sigma_s^2 = 3k^2 \quad (1)$$

Согласно [1] компоненты вектора скоростей перемещений V_x, V_y связаны с компонентами тензора напряжений уравнениями:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{\partial V_x + \partial V_y}{\partial y + \partial x} = \frac{2\sigma_x - \sigma_y}{2\sigma_y - \sigma_x} = \frac{6\tau_{xy}}{6\tau_{xy}}, \quad (2)$$

которые следуют из соотношений Сен Венана-Мизеса для жесткопластического тела [1].

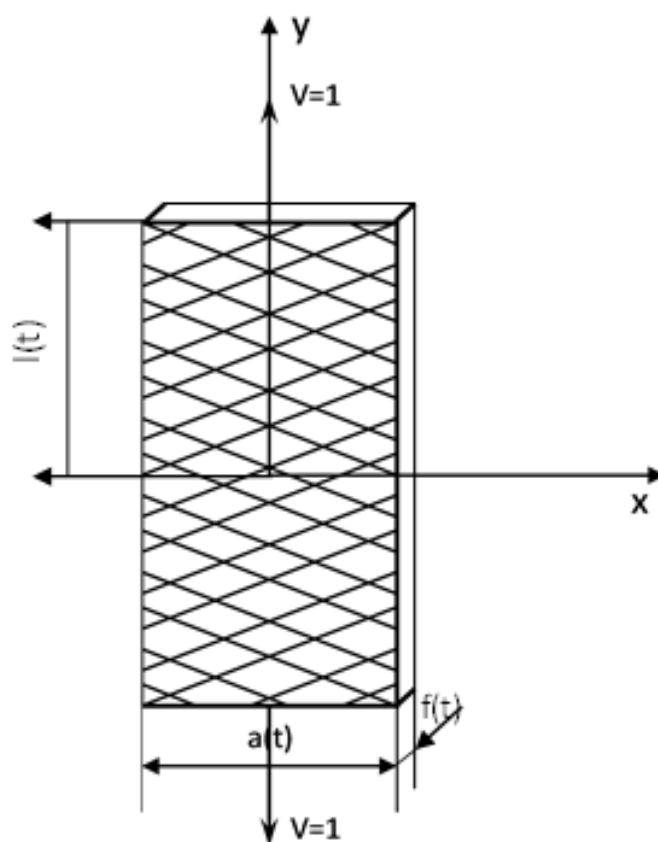


Рисунок 1. Растяжение полосы
в условиях плоского напряженного состояния

Граничные условия для напряжений:

$$\text{При } y = 1, \sigma_y = 2k; \quad y = -1, \sigma_y = 2k. \quad (3)$$

Напряжения на боковой поверхности образца нулевые.

Приведенные граничные условия (3) приводят, к однородному напряженному состоянию при условии, что образец находится в пластическом состоянии:

$$\sigma_y = 2k, \sigma_x = \tau_{xy} = 0. \quad (4)$$

и прямолинейному полю линий скольжения, наклоненных к оси x под углом $\varphi = 54^{\circ}44'$ [2].

Граничные условия для скоростей перемещений:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0, \quad V_y = 0; \quad \text{при } x = 0, \quad V_x = 0; \\ \text{при } y = 1, \quad V_y = V; \quad \text{при } x = a, \quad V_x = \text{const}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение данной задачи, согласно [3] имеет вид:

$$V_x(x, y) = -\frac{V}{\sqrt{2}l}x, \quad V_y(x, y) = \frac{V}{l}y. \quad (6)$$

Компоненты тензора деформаций ε_i :

$$\varepsilon_1 = -\frac{V}{\sqrt{2}l}, \quad \varepsilon_2 = \frac{V}{l}, \quad \varepsilon_3 = \frac{V}{\sqrt{2}l}(1 - \sqrt{2}). \quad (7)$$

Главные значения тензора деформаций Альманси:

$$\begin{aligned} E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{(1+\bar{\varepsilon}) \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{2}, \quad E_2 = e - g = \frac{1}{2} - \frac{(1+\bar{\varepsilon})\sqrt{2}}{2} \\ E_3 = \left(-1 + \frac{1}{(1 - 2 E_1)(1 - 2 E_2)}\right)/2. \end{aligned} \quad (8)$$

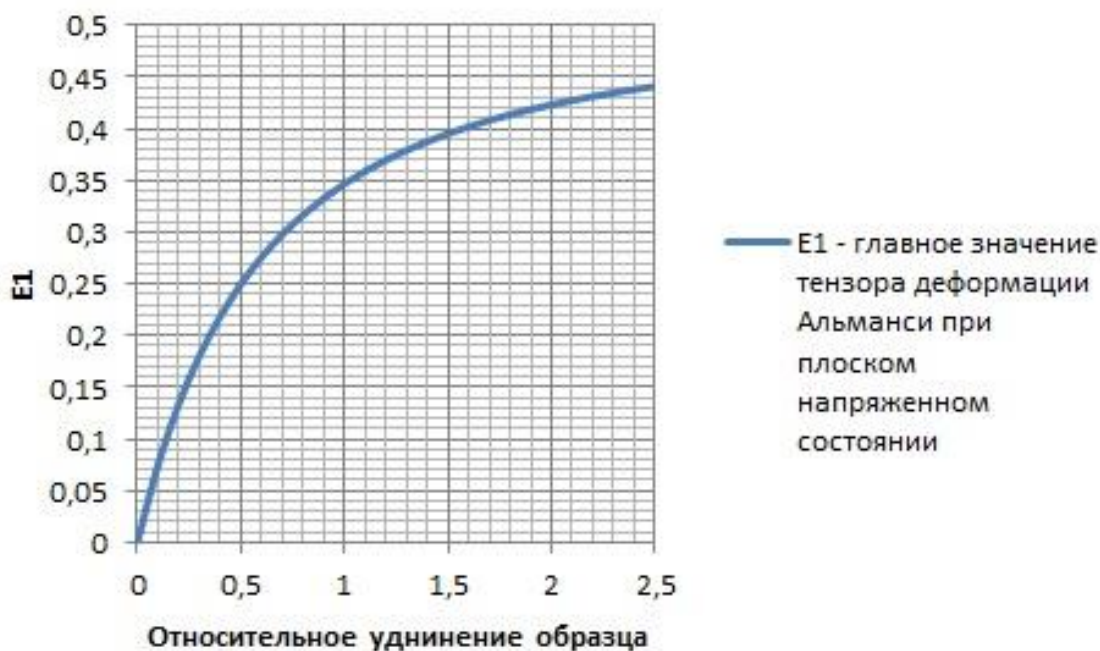


Рисунок 2. Главное значение тензора деформации Альманси при плоском напряженном состоянии

На рисунке 2 представлена зависимость первого инварианта тензора Альманси от относительного удлинения образца при непрерывном поле скоростей деформаций. Анализ данного графика показывает, что при увеличении относительного удлинения образца значение первого инварианта непрерывно стремится к 0,5.

$$\lim_{\bar{\varepsilon} \rightarrow \infty} E_1 = \lim_{\bar{\varepsilon} \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Растяжение полосы в условиях плоского напряженного состояния при переходе к разрывному полю скоростей деформаций

При деформировании плоского образца в условиях плоского напряженного состояния деформационные процессы могут протекать поэтапно. Разделение на этапы будет описываться некоторым критерием. В качестве данной величины

предлагается взять первый инвариант тензора деформации Альманси E_1^* . Условие поэтапного разделения может быть записано в виде:

$$E_1 \geq E_1^* \quad (9)$$

где при достижении E_1 некоторой предельной величины E_1^* , поле скоростей деформаций переходит к разрывному полю [4], что в свою очередь приводит к образованию шейки (рисунок 3).

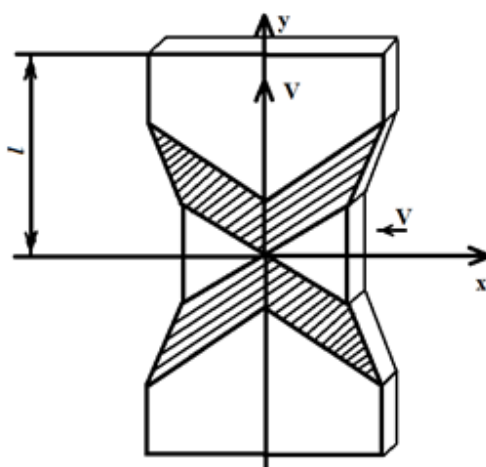


Рисунок 3. Растяжение полосы при плоском напряженном состоянии с разрывным полем скоростей перемещений

Решение задачи при разрывном поле скоростей деформаций, согласно [4] имеет вид:

$$E_1 = \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right), E_2 = -\frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} + 1 \right), E_3 = 0, \quad (10)$$

$$\bar{W} = \frac{[V_\tau]}{G+V_n^+} + \frac{[V_n]}{G+V_n^+}, [V_\tau] = -\frac{\cos 2\delta}{\sin \delta},$$

$$V_n^+ = \cos \delta, [V_n] = 0, G = 0, \delta = 35^\circ 56'.$$

где V_n^+ - нормальная скорость движения частицы на линии разрыва, $[V_j]$ - векторы разрыва скоростей перемещений, V_τ - касательная скорость движения частицы, G -

нормальные скорости движения линий разрыва, δ – угол между линиями разрыва скоростей деформаций, \bar{W} – объемная плотность диссипации энергии.

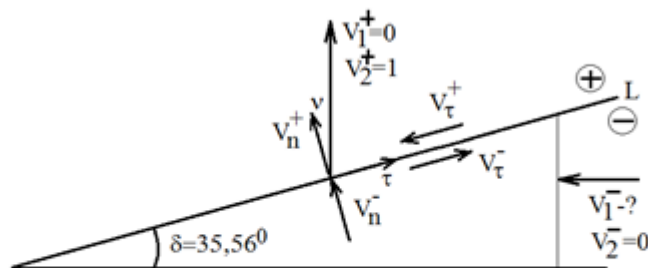


Рисунок 4. Линия разрыва скоростей при плоском напряженном состоянии

На рисунке 4 представлено графически распределение скоростей на линиях разрыва

Этапы деформационных состояний при различных полях скоростей деформаций

Рассмотрим формирование плоского образца, при условии перехода к различным полям деформации [5], которые описываются деформационным критерием E_1^* . Деформирование пластины на первом этапе будет проходить при непрерывном поле скоростей перемещений, которому соответствует выражение первого инварианта тензора Альманси вида [6]:

$$E_1 = e + g = \frac{1}{2} - \frac{(1+\bar{\epsilon}) \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{2}.$$

При непрерывном деформировании поля скоростей перемещений критическое значение первого инварианта тензора деформации Альманси достигается при E_1^* .

После наступления деформационных состояний, характеризующихся E_1^* , поле скоростей деформаций переходит к разрывным линиям скоростей деформаций, что

в свою очередь приводит к образованию шейки при деформировании полосы (рисунок 5).

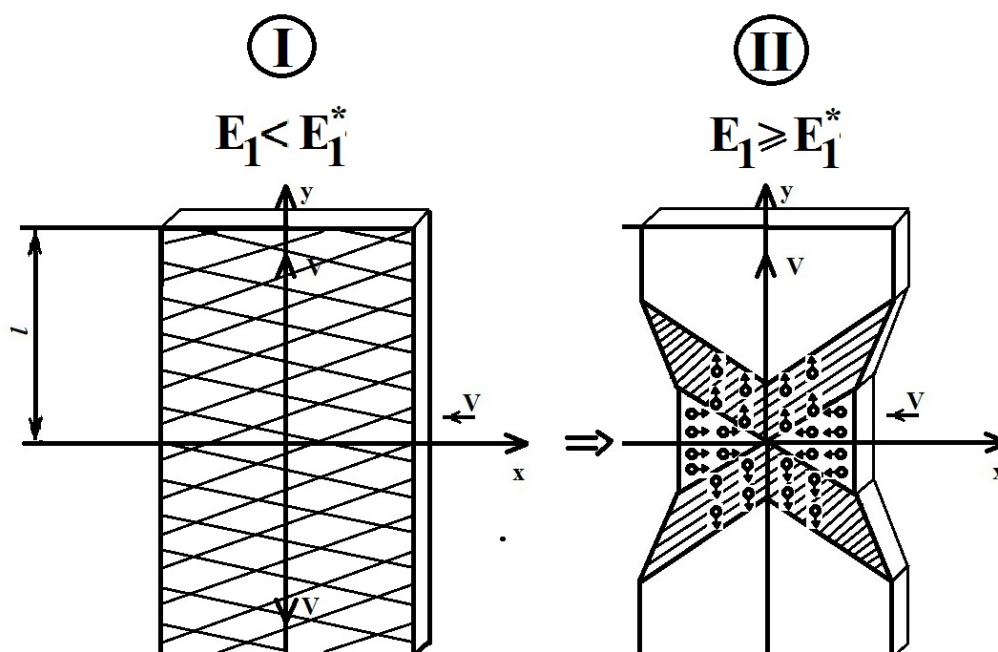


Рисунок 5. Этапы перехода от непрерывного к разрывному полю скоростей перемещений при плоском напряженном состоянии

Опишем данный процесс аналитически. Используя формулы (8), (10) получим следующую систему, описывающую переход между деформационными процессами:

$$\frac{1}{2} - \frac{(1+\bar{\varepsilon}) \frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right),$$

$$\bar{W} = \frac{[V_\tau]}{G+V_n^+} + \frac{[V_n]}{G+V_n^+}, \quad [V_\tau] = -\frac{\cos 2\delta}{\sin \delta},$$

$$V_n^+ = \cos \delta, \quad [V_n] = 0, \quad G = 0, \quad \delta = 35^\circ 56'.$$
(11)

Решая приведенную систему определим относительное удлинение образца, при котором первый инвариант тензора деформации Альманси E_1 достигает критического значения E_1^* .

$$\begin{aligned} \frac{(1 + \bar{\varepsilon})^{\frac{-1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right) \Rightarrow \\ \bar{\varepsilon} &= \left[\frac{1}{2} - \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{-1-\sqrt{2}}} - 1. \\ \bar{\varepsilon} &= \left[\frac{1}{2} - \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{-1-\sqrt{2}}} - 1, \text{ при } \bar{W} = -2ctg\delta, \\ \bar{\varepsilon} &= \left[\frac{1}{2} - \frac{ctg^2\delta}{1} \left(\frac{1}{\cos\delta} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{-1-\sqrt{2}}} - 1 = \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta} \left(\frac{1}{\cos\delta} - 1 \right) \right]^{\frac{2}{-1-\sqrt{2}}} - 1 \\ &= \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{\cos\delta - \cos^2\delta}{\sin^2\delta} \right) \right]^{\frac{2}{-1-\sqrt{2}}} - 1 = \\ &= \left[\left(\frac{\sin^2\delta - 2\cos\delta + 2\cos^2\delta}{2\sin^2\delta} \right) \right]^{\frac{2}{-1-\sqrt{2}}} - 1 = \left[\left(\frac{1 - \cos\delta}{\sqrt{2}\sin^1\delta} \right)^2 \right]^{\frac{2}{-1-\sqrt{2}}} - 1 = \\ &= \left[\left(\frac{\sqrt{2}\sin^1\delta}{1 - \cos\delta} \right) \right]^{\frac{4}{1+\sqrt{2}}} - 1 \\ \bar{\varepsilon} &= \left[\left(\frac{\sqrt{2}\sin^1\delta}{1 - \cos\delta} \right) \right]^{\frac{4}{1+\sqrt{2}}} - 1, \quad \delta = 35^{\circ}56'. \end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, относительное удлинение образца имеет критического значения

при: $\bar{\varepsilon} = \left[\left(\frac{\sqrt{2}\sin^1\delta}{1 - \cos\delta} \right) \right]^{\frac{4}{1+\sqrt{2}}} - 1$ при $\delta = 35^{\circ}56'$ и величина первого инварианта

тензора деформации Альманси достигает E_1^* , после чего поле скоростей деформаций переходит к разрывному.

Получаем систему уравнений, которая описывает процесс деформации плоского образца на различных этапах деформирования:

$$E_1 = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{(1+\bar{\varepsilon})^{-\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}}{2}, & 0 \leq \bar{\varepsilon} < \left[\left(\frac{\sqrt{2} \sin^1 \delta}{1 - \cos \delta} \right)^{\frac{4}{1+\sqrt{2}}} - 1, \right. \\ \left. \frac{\bar{W}^2}{4} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{\bar{W}^2}} - 1 \right), & \bar{\varepsilon} \geq \left[\left(\frac{\sqrt{2} \sin^1 \delta}{1 - \cos \delta} \right)^{\frac{4}{1+\sqrt{2}}} - 1, \delta = 35^{\circ} 56' \right]. \end{cases} \quad (13)$$

Выводы по поставленной задаче

В представленной модели деформации плоского образца получили, что значение первого инварианта тензора деформации Альманси определяется величиной относительного удлинения образца, в зависимости от чего будет происходить переход от непрерывного к разрывному полю скоростей деформаций. На рисунке 6 представлен график перехода от одного деформационного состояния к другому [7]. Из рисунка видно, что на первом этапе деформирования решение с непрерывным полем скоростей приводит к меньшим деформациям частиц материала и к большим усилиям (рисунок 7), необходимым для деформирования образца, а при достижении критического значения E_1^* решение с разрывным полем скоростей деформаций дает меньшие деформации и большим усилиям, чем при непрерывном поле.

Проведя сравнительный анализ между деформированием плоского образца при различных условиях (плоское напряженное состояние и плоская деформация

(рисунок 8), видно, что данный процесс при плоской деформации протекает при более малых относительных удлинениях в отличие от плоского напряженного состояния. Но процессы очень схожи. Поэтому в реальных материалах на начальных этапах деформирования, как при плоской деформации, так и при плоском напряженном состоянии предпочтительно использовать непрерывное поле скоростей деформаций, а затем при переходе через критическое значения относительного удлинения E_1^* , можно перейти к разрывному полю скоростей деформаций.

Данное пластическое течение характерно для материалов, при деформировании которых перед разрушением происходит образование шейки (разрывное поле скоростей деформаций) [8]-[10], что в свою очередь приводит к разрушению материала при различных экспериментах и различных конструкционных материалов [11]-[15].

Данная теория может быть использована при различных исследованиях в областях авиа и машиностроения и при анализе деформаций в различных конструкциях [16]-[20].

Главные значения тензора Альманси (2 этапа деформирования)

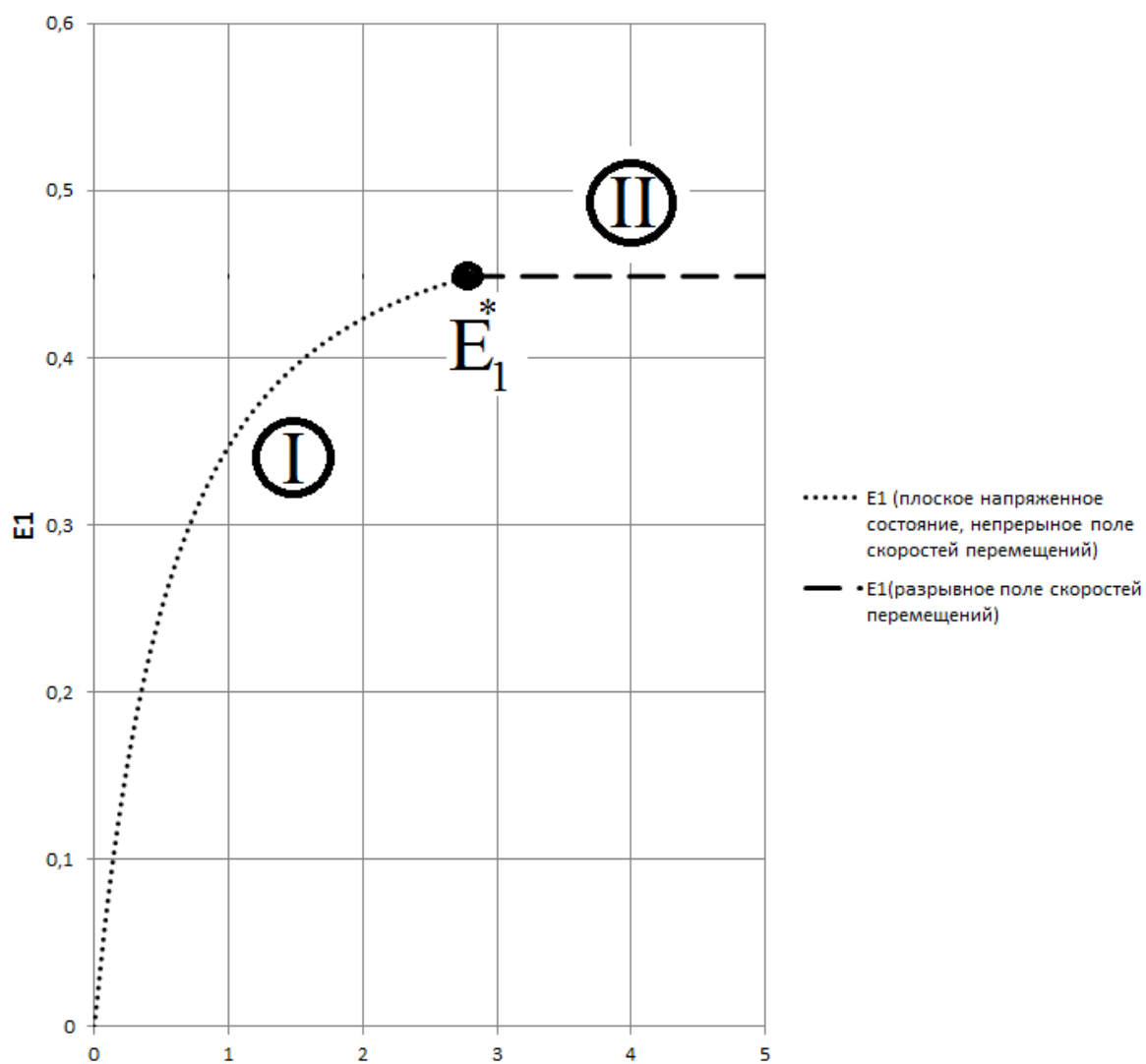


Рисунок 6. Этапы деформационных состояний при плоском напряженном состоянии

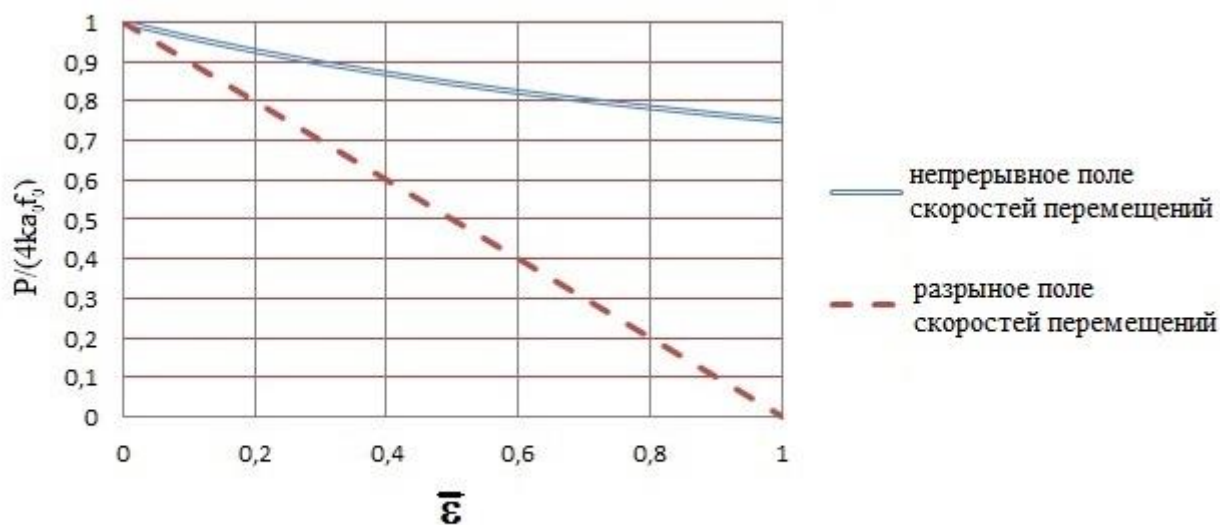


Рисунок 7. Усилия необходимые для растяжения полосы

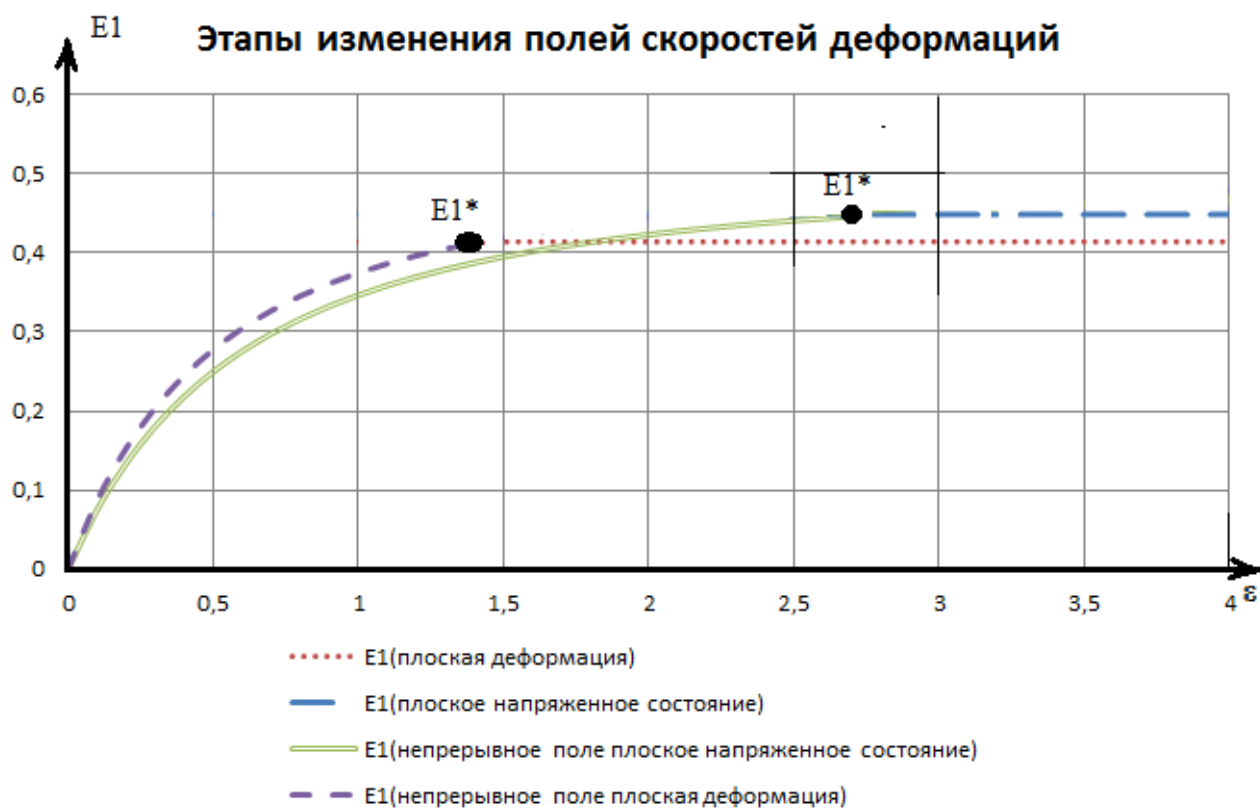


Рисунок 8. Этапы деформирования образца при различных условиях

Библиографический список

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Под редакцией Добровольского В.Л. – М.: Наука, 1969. - 420 с.
2. Херцберг Р.В. Деформация и механика разрушения конструкционных материалов. – М.: Металлургия, 1989. – 576 с.
3. Григорьева А.Л., Григорьев Я.Ю., Хромов А.И., Канашин И.В. Моделирование сравнительных деформационных процессов, при растяжении плоских образцов в условиях различных деформационных состояний // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов (Уфа, 19-24 августа 2019). – Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. С. 423 - 425.
4. Хромов А.И., Григорьев Я.Ю., Григорьева А.Л., Жарикова Е.П. Деформирование плоского образца при разрывном поле скоростей перемещений в условиях плоского напряженного состояния // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 10. С. 73 - 77.
5. Григорьева А.Л., Хромов А.И. Одноосное растяжение жесткопластической полосы в условиях плоского напряженного состояния при однородном поле скоростей деформаций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4 (26). С. 198 - 205.
6. Григорьева А.Л., Слабожанина И.В., Хромов А.И. Растяжение полосы при плоском напряженном состоянии // Международная научно-практическая

конференция «Фундаментальные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий»: сборник трудов (Чебоксары, 12-15 августа 2013). – Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2013. С. 57 - 64.

7. Тимохин В.С., Козлова О.В. Математическое моделирование полей деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещения // II Всероссийская национальная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований»: сборник статей (Комсомольск-на-Амуре, 8 – 12 апреля 2019). - Комсомольск-на-Амуре: Изд-во КнАГУ, 2019. С. 482 – 485.

8. Володченко В.С., Козлова О.В. Поля деформаций тензора конечных деформаций в окрестности угловой точки штампа // Материалы 47-й научно-технической конференции студентов и аспирантов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов»: сборник трудов (Комсомольск-на-Амуре, 10 - 21 апреля 2017). - Комсомольск-на-Амуре: Изд-во: КнАГУ, 2017. С. 203 - 232.

9. Козлова О.В. Сжатие цилиндра при некоторых распределениях усилий // Всероссийская научная школа-конференция, посвященная 85-летию профессора Д.Д. Ивлева. «Механика предельного состояния и смежные вопросы»: сборник трудов (Чебоксары, 15-18 сентября 2015). - Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2015. С. 164 – 166.

10. Гербутова Д.Д., Егорова Ю.Г. Моделирование пластического состояния в задаче о растяжении полосы, ослабленной вырезами // 46-я научно-техническая

конференция студентов и аспирантов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов»: тезисы докладов (Комсомольск-на-Амуре, 01-15 апреля 2016). - Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2016. С. 122 - 124.

11. Егорова Ю.Г., Егоров В.А. Моделирование пластического состояния в задаче о волочении полосы // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2013. Т. 1. № 1 (13). С. 42 - 50.

12. Анисимов А.Н. Об учете необратимой сжимаемости материала при волочении полосы сквозь короткую матрицу // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. № 3 (55). С. 19 - 31.

13. Лошманов А.Ю., Периг А.В. Распространение внутренней и внешних трещин при растяжении полосы с v-образными вырезами // Наука и бизнес: пути развития. 2012. № 8 (14). С. 59 - 64.

14. Партон В.З. Механика разрушения: от теории к практике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. - 240 с.

15. Bykovtsev G.I., Tsvetkov Y.D. The two-dimensional loading problem of an elastoplastic plane weakened by a hole // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 314 - 322.

16. Бабайцев А.В., Бурцев А.Ю., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=107879>

17. Русланцев А.Н., Думанский А.М., Алимов М.А. Модель напряженно-деформированного состояния криволинейной слоистой композитной балки // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=85659>
18. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Н.А. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53018>
19. Глушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым наполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105618>
20. Воронич И.В., Колчев С.А., Панчук Д.В., Песецкий В.А., Силкин А.А., Ткаченко В.В., Нгуен Т.Т. Об особенностях аэродинамики малоразмерного летательного аппарата нормальной схемы // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111370>