

Моделирование продольных волн в оболочке с физически квадратичной нелинейностью, заполненной жидкостью и окруженной упругой средой

Быкова Т.В.* , Евдокимова Е.В. , Могилевич Л.И.*** , Попов В.С.******

Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.,

ул. Политехническая, 77, Саратов, 410054, Россия

**e-mail: tbykova69@mail.ru*

***e-mail: eev2106@mail.ru*

****e-mail: mogilevich@sgu.ru*

*****e-mail: vic_p@bk.ru*

Статья поступила 03.02.2020

Аннотация

В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования волн деформаций на базе рассмотрения связанной задачи гидроупругости цилиндрической оболочки с квадратичной физической нелинейностью. Оболочка окружена упругой средой и заполнена вязкой несжимаемой жидкостью, рассматривая динамику которой учитываем инерцию ее движения. Показано, что наличие окружающей среды приводит к интегро-дифференциальному уравнению, обобщающему уравнение Кортевега – де Вриза, имеющему решение в виде уединенной волны – солитона. Наличие жидкости в оболочке добавляет в уравнения продольных волн деформаций член уравнения, который не позволяет найти точное решение. Поэтому, реализуется численное исследование, которое проводится с использованием современного подхода, основанного на универсальном алгоритме

коммутативной алгебры, для интегро-интерполяционного метода. Вычислительный эксперимент показал, что инерция движения жидкости уменьшает скорость волны, а вязкостное трение жидкости уменьшает амплитуду волны.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрическая физически нелинейная оболочка, упругая среда.

Введение

Взаимодействие упругих элементов конструкций с жидкостью рассматривалось в разных аспектах, например, взаимодействие упругих оболочек с идеальной несжимаемой и сжимаемой жидкостью (газом) исследовано в работах [1, 2]. Задача о ламинарном движении вязкой несжимаемой жидкости в абсолютно жесткой трубе кругового сечения под действием изменяющегося по времени перепада давления решена в [3], аналогичная задача при пульсирующем движении вязкой жидкости для упругой оболочки конечной длины рассмотрена [4], а для движения жидкости в кольцевом канале, образованном упругими оболочками конечной длины, - в [5, 6]. В условиях вибрации взаимодействие вязкой несжимаемой жидкости с упругими оболочками исследовалось в [7-10], а с учётом вращения жидкости - в [11-13].

Впервые уравнения Кортевега-де Вриза для продольных нелинейных волн в стержнях получены в [14], а с учетом диссипативных факторов уравнения Кортевега-де Вриза - Бюргерса для стержней и пластин получено в [15]. Обзор работ о распространение нелинейных волн и экспериментальном обнаружении таких волн

приведен в [16]. Исследование распространения продольных упругих волн в стержне, материал которого имеет поврежденность проведено в [17]. Задача о распространении возмущений от поверхности шара, заполненного однородной изотропной средой со стесненным вращением – псевдоконтинуумом Коссера, изучена в [18]. Исследование распространения продольного волнового пучка в однородной, нелинейно-упругой проводящей среде, находящейся во внешнем магнитном поле выполнено в [19], а в работе [20] изучено нестационарное движение электромагнитоупругого полупространства с учетом пьезоэлектрических эффектов.

Волны деформаций в упругих цилиндрических оболочках рассматривались [21-23]. Кроме того, проблемы распространения волн в упругих и вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе в бесконечно длинных цилиндрических оболочках без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью, рассматривались в [24-26] с позиции теории солитонов. Получение точных решений эволюционных уравнения, включая уравнения распространения уединенных волн, рассмотрено в [27-28].

Ранее в [29-33] были получены математические модели и проведены исследования волновые процессы в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, учитывающие влияние вязкой несжимаемой жидкости.

Решение поставленной в работе задачи гидроупругости для квадратично нелинейных оболочек представляется актуальным, сложным, имеет важное значение для акустической диагностики и неразрушающего контроля материалов и ранее не проводилось. Во многом интерес к подобным задачам инициирован

необходимостью анализа упругих и динамических свойств нанообъектов, в частности, карбоновых трубок и видится важны для исследования новых материалов, используемых в авиакосмической промышленности.

В настоящей работе развивается метод возмущений для моделирования нелинейных волн деформаций в цилиндрической оболочке, заполненной вязкой несжимаемой жидкостью, окруженной упругой средой, действующей в продольном направлении. Показано влияние вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей оболочку и окружающей упругой среды на поведение продольных волн деформации в квадратично нелинейной оболочке.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r , Θ , x записываются, в случае осесимметричного течения, в виде [34, 35]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе с оболочкой выполняются условия прилипания жидкости согласно подходу Лагранжа

$$\frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U \frac{\partial V_x}{\partial x} - W \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U \frac{\partial V_r}{\partial x} - W \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad (2)$$

где $r = R - W$, t - время; V_r, V_x - проекции вектора скорости на оси цилиндрической системы координат; p - давление; ρ - плотность; ν - кинематический коэффициент вязкости; U - продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; W - прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; R_1 - внутренний радиус оболочки; R - радиус срединной поверхности оболочки; h_0 - толщина оболочки ($h_0 = 2(R - R_1)$) и $h_0 \ll R$.

Записывая уравнения движения элемента геометрически линейной цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа-Лява, рассмотрим материал с квадратичной зависимостью компонентов тензора напряжений σ_i от компонентов тензора деформаций ε_i и интенсивности деформаций ε_u

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_x + \mu_0 \varepsilon_\Theta) \left(1 + \frac{m}{E} \varepsilon_u \right); \quad \sigma_\Theta = \frac{E}{1 - \mu_0^2} (\varepsilon_\Theta + \mu_0 \varepsilon_x) \left(1 + \frac{m}{E} \varepsilon_u \right);$$

$$\varepsilon_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\mu_1 (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\Theta^2) - \mu_2 \varepsilon_x \varepsilon_\Theta \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \mu_1 = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right], \quad \mu_2 = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{2\mu_0}{(1 - \mu_0)^2} \right] \quad (3)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_\Theta = -\frac{W}{R} - z \frac{W}{R^2}$$

здесь E - модуль Юнга; m - постоянная материала, определяемая из опыта; μ_0 - коэффициент Пуассона.

Асимптотический анализ показывает, что интенсивность деформации можно рассматривать на срединной поверхности ($z=0$). Тогда получим

$$\varepsilon_u^0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial x} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Уравнение динамики оболочки с квадратичной физической нелинейностью с учетом, (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R} \right\} \frac{m}{E} \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial x} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\rangle - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \\ & - \left[k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U - k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3 \right] = -q_x - U \frac{\partial q_x}{\partial x} + W \frac{\partial q_x}{\partial r}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^2}{12} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{W}{R^2} \right] - \right. \\ & - \frac{1}{R} \left\{ \mu_0 \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} \right\} \frac{m}{E} \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial x} \right\}^{\frac{1}{2}} - \\ & - \left. \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial W}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R} \right\} \frac{m}{E} \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{W}{R} \right)^2 \right] + \mu_2 \frac{W}{R} \frac{\partial U}{\partial x} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \right\rangle + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \\ & = q_n + U \frac{\partial q_n}{\partial x} - W \frac{\partial q_n}{\partial r}; \end{aligned}$$

Здесь q_x , q_n - напряжения со стороны жидкости, находящейся внутри оболочки.

Выражения в квадратных скобках уравнениях системы (4)

$$-k_3 \frac{R^2 \rho_0 h_0 c_0^2}{l^4} U + k_2 \frac{\rho_0 h_0 c_0^2}{R^2 l^2} U^3, \quad (5)$$

характеризуют реакцию упругой среды, в которой расположена труба кругового сечения [36]. Это выражение - реакция на продольное перемещение. Безмерные коэффициенты порядка единицы k_2, k_3 - введены по аналогии с [35, 36].

Поверхностные напряжения со стороны жидкости, снесенные на невозмущенную срединную поверхность оболочки ($r = R$) определяются формулами

$$q_x = - \left[\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[-p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R} \quad (6)$$

Вывод уравнения динамики с учетом наличия жидкости в оболочке

Принимая за характерную длину l - длину волны, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений (4)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad r^* = \frac{r}{R} \quad (7)$$

Здесь w_m , u_m - характерные значения прогиба W и продольного перемещения U . $\tilde{n}_0^2 = E\rho_0^{-1}(1 - \mu_0^2)^{-1}$ - квадрат скорости продольной волны в оболочке.

Положим

$$\frac{h_0}{R} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^2}{l^2} = O(\varepsilon), \quad \frac{u_m R}{l h_0} = O(1), \quad \frac{w_m}{h_0} = O(1), \quad (8)$$

где ε - малый параметр задачи (4).

В переменных (7), (8) уравнения (4) примут вид

$$\begin{aligned} & \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial x^*} \left\langle \left\{ \frac{u_M}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \mu_0 \frac{w_M}{R} u_3 \right\} \frac{m}{E} \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{u_M}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \mu_2 \frac{w_M}{R} \cdot \frac{u_M}{l} (u_3) \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\rangle - \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{u_M}{l} \frac{1}{l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} - \left[k_3 \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{R^2}{l^2} \frac{1}{l} \frac{u_M}{l} u_1 - \right. \\ & \left. - k_2 \rho_0 h_0 c_0^2 \left(\frac{u_M}{l} \right)^3 \frac{1}{l} \frac{l^2}{R^2} u_1^3 \right] = -q_x - \frac{u_M}{l} u_3 \frac{\partial q_x}{\partial x^*} + \frac{w_M}{R} u_3 \frac{\partial q_x}{\partial r^*}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \rho_0 h_0 c_0^2 \left\langle \frac{1}{12} \frac{h_0^2}{R^2} \frac{R^2}{l^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} \left[\left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{w_M}{R} \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^{*2}} + \mu_0 \frac{w_M}{R} \frac{1}{R} u_3 \right] - \right. \\
& - \frac{1}{R} \left(\mu_0 \frac{u_M}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \frac{w_M}{R} u_3 \right) \left\{ \frac{m}{E} \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{u_M}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{w_M}{R} \right)^2 u_3^2 \right] + \mu_2 \frac{w_M}{R} \cdot \frac{u_M}{l} u_3 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} - \\
& - \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial x^*} \left\{ \frac{R^2}{l^2} \frac{w_M}{R} \frac{\partial u_3}{\partial x^*} \left(\frac{u_M}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \mu_0 \frac{w_M}{R} u_3 \right) \left\{ \frac{m}{E} \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{u_M}{l} \right)^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{w_M}{R} \right)^2 u_3^2 \right] + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \mu_2 \frac{w_M}{R} \cdot \frac{u_M}{l} u_3 \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \right\} + \rho_0 h_0 c_0^2 \frac{R^2}{l^2} \frac{1}{R} \frac{w_M}{R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}} = q_\eta - \frac{u_M}{l} u_1 \frac{\partial q_\eta}{\partial x^*} + \frac{w_M}{R} u_3 \frac{\partial q_\mu}{\partial r^*}
\end{aligned} \quad (9)$$

Оставим в уравнениях системы (9) члены не выше второго порядка малости ε , получим уравнения

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x^*} \left\langle \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \mu_0 \frac{w_M}{R} u_3 \right) \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{u_M}{l} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{w_M l}{u_M R} \right)^2 u_3^2 \right] + \mu_2 \frac{w_M l}{u_M R} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \right\rangle - \\
& - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} - \left[k_3 \frac{R^2}{l^2} u_1 - k_2 \frac{l^2}{R^2} \left(\frac{u_M}{l} \right)^2 u_1^3 \right] = - \frac{l^2}{u_M \rho_0 h_0 c_0^2} q_x,
\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\mu_0 \frac{\partial u_1}{\partial x^*} - \frac{l w_M}{u_M R} u_3 \right) \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{u_M}{l} \left\{ \mu_1 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right)^2 + \left(\frac{w_M l}{u_M R} \right)^2 u_3^2 \right] + \mu_2 \frac{w_M l}{u_M R} u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x^*} \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{R^2}{l^2} \frac{l w_M}{u_M R} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}} = \\
& \cdot = - \frac{R l}{u_M \rho_0 h_0 c_0^2} q_\eta
\end{aligned}$$

Применим метод асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - c t^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (11)$$

где c - безразмерная неизвестная скорость волны, τ - быстрое время, а зависимые переменные в виде разложения по малому параметру ε

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (12)$$

Подставляя (7), (11), (12) в уравнения (10) с учетом оценок (8), получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений

$$\begin{aligned} -\mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \frac{w_m l}{u_m R} u_{30} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} \frac{\partial u_{30}}{\partial \xi} - c^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} &= 0, \end{aligned}$$

из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (13)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2 \quad (14)$$

Из следующего приближения по ε , учитывая (13) и (14), находится уравнение, являющееся разрешающим, для u_{10}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l \varepsilon} \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{m}{E \varepsilon} \frac{u_m}{l} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2 \mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{l^2} \right\} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \frac{k_3}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} u_{10} + \frac{k_2}{\varepsilon} \frac{u_m^2}{R^2} u_{10}^3 = \\ = - \frac{1}{2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \left[q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

В случае отсутствия жидкости правая часть уравнения (15), равна нулю и получается известное уравнение - модифицированное уравнение Гарднера-Островского для

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu_0} \frac{w_m l}{u_m R} u_{30}.$$

Определение напряжений, действующих со стороны жидкости

Для определения правой части уравнения (15) введем безразмерные переменные и параметр

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, p = \frac{\rho v c_0 l w_m}{R^3} P, \psi = \frac{R}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right). \quad (16)$$

Подставляя (14) в уравнение гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорости и давление в виде разложения по малому параметру ε

$$v_x = v_x^0 + \varepsilon v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \varepsilon v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \varepsilon P^1 + \dots \quad (17)$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi = 0$ - гидродинамическая теория смазки) и в нулевом приближении по ε , получаем уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} + \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (18)$$

и граничные условия вида

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}; v_x^0 = \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*}, \text{ где } r^* = 1 \quad (19)$$

$$r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0; r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0, \text{ где } r^* = 0.$$

На первом шаге итерации полагаем $\psi \frac{R_1 c_0}{\nu} = 0$, опустим первое слагаемое в

уравнении (18) и получим уравнения [37]

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0; \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right); \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0 \quad (20)$$

Решение уравнений гидродинамики легко получить (это классические уравнения гидродинамической теории смазки). Из уравнений движения с учетом граничных условий имеем

$$P^0 = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right] dx^*,$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*} = (r^{*2} - 1) 4 \frac{\partial^2}{\partial t^{*2}} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right] + \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}} \quad (21)$$

Подставляя найденные значения $\frac{\partial v_x^0}{\partial t^*}$ из (21) в уравнения динамики жидкости

(18), на втором шаге итерации найдем [37]:

$$P^0 = \frac{\partial}{\partial t^*} \int \left[16 \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - 4 \int u_3 dx^* \right) \right] dx^*, \quad (22)$$

$$\left. \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{\partial}{\partial t^*} \left[8 \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \frac{\partial}{\partial t^*} \left(\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} u_1 - \int u_3 dx^* \right) \right].$$

Учитывая, что введены переменные $\xi = x^* - ct^*$ и $\tau = \varepsilon t^*$, $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$, согласно

(22) найдем с точностью до ε

$$\frac{\partial P^0}{\partial \xi} = \sqrt{1 - \mu_0^2} \left[8 \left(2u_3 - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \left(8 \frac{\partial u_3}{\partial \xi} - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1 - \mu_0^2} \right]. \quad (23)$$

При этом

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} &= \sqrt{1-\mu_0^2} \left[4 \left(2u_3 - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{6} \psi \frac{R_1 c_0}{\nu} \left(2 \frac{\partial u_3}{\partial \xi} - \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} \right) \sqrt{1-\mu_0^2} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда учитывая, что $\frac{w_m l}{u_m R_1} u_{30} = \mu_0 u_{10\xi}^2$ при $R_1 = R$ в силу малости ψ, λ из (23),

(24) получаем

$$\begin{aligned} q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \frac{\nu}{R c_0} \rho c_0^2 4 \sqrt{1-\mu_0^2} [1-2\mu_0]^2 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} - \\ &- \frac{R}{l} \rho c_0^2 \frac{1}{6} (1-\mu_0^2) [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{u_m}{l} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя (25) в уравнение (15), окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{u_m}{l \varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \left[\frac{4}{\sqrt{3}} \frac{m}{E \varepsilon} \frac{u_m}{l} (\mu_1 + \mu_2 \mu_0 + \mu_1 \mu_0^2) \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} + \\ + \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \right\} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \frac{k_3}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} u_{10} + \frac{k_2}{\varepsilon} \frac{u_m^2}{R^2} u_{10}^3 = \\ = -2(1-2\mu_0)^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{\nu}{R c_0} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} + \\ + \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{R}{l} \frac{1}{12} \sqrt{1-\mu_0^2} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_1 \varphi, \quad \eta = c_2 \xi, \quad t = c_3 \tau \quad (27)$$

позволяет записать уравнение (26) в виде

$$\varphi_t + 6\varphi\varphi_\eta + \varphi_{\eta\eta\eta} - s_6\varphi_\eta + s_5\varphi - \int \varphi d\eta + s_5 \left(\int \varphi d\eta \right)^3 = 0 \quad (28)$$

Постоянные c_1, c_2, c_3 определяются при подстановке (27) в (26) и имеют вид

$$c_1 = \sigma_0^{-1} \sigma_4^{1/2} \sigma_1^{1/2}, \quad c_2 = \sigma_4^{1/4} \sigma_1^{-1/4}, \quad c_3 = \sigma_4^{3/4} \sigma_1^{1/4},$$

при этом вводится обозначение

$$s = \sigma c_3^{-1}, \quad s_5 = \sigma_5 c_1^2 c_2^{-3} c_3^{-1}, \quad s_6 = \sigma_6 c_2 c_3^{-1},$$

где

$$\begin{aligned} 6\sigma_0 &= \frac{u_m}{l\varepsilon} \frac{\sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{m}{E\varepsilon} \frac{u_m}{l} (\mu_1 + \mu_2\mu_0 + \mu_1\mu_0^2), \\ \sigma_4 &= \frac{k_3}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2}, \quad \sigma_5 = \frac{k_2}{\varepsilon} \frac{u_m^2}{R^2}, \\ \sigma_1 &= \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \right\}, \quad \sigma = 2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{v}{R c_0} (1-2\mu_0)^2, \\ \sigma_6 &= \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \frac{R}{l} \frac{1}{12} \sqrt{1-\mu_0^2} [(1-2\mu_0)^2 + 12\mu_0^2] \end{aligned}$$

Отметим, что $s = 0$ при $\mu_0 = \frac{1}{2}$ для несжимаемого материала, такого как

резина или при отсутствии жидкости.

При $\mu_0 = \frac{1}{2}$ ($s = 0$) получим из (28) уравнение

$$\varphi_t + 6\varphi\varphi_\eta + \varphi_{\eta\eta\eta} - s_6\varphi_\eta - \int \varphi d\eta + s_5 \left(\int \varphi d\eta \right)^3 = 0, \quad (29)$$

которое имеет точное решение

$$\varphi = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \left[\eta - \left(\frac{1}{s_5} + 2s_5 - s_6 \right) t \right] \right\}. \quad (30)$$

Из вида решения (30) следует, что инерция движения жидкости, которая оценивается s_6 , уменьшает скорость волны деформации.

В случае отсутствия окружающей упругой среды и влияния жидкости уравнение (28) превращается в уравнение Кортевега - де Вриза с точным решением

$$\varphi = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \left[\eta - \left(\frac{1}{s_5} \right) t \right] \right\} \quad (31)$$

при произвольном значении s_5 . При μ_0 отличного от $\frac{1}{2}$ (s отлично от нуля) численное исследование уравнения (28) при начальном условии

$$\varphi(\eta, 0) = \frac{1}{2s_5} \cosh^{-2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{s_5}} \eta \right\}, \quad (32)$$

позволит оценить влияние жидкости.

Для численного моделирования рассмотрим разностную схему для уравнения (28), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 3 \frac{(u_{j+1}^{2n+1} - u_{j-1}^{2n+1}) + (u_{j+1}^{2n} - u_{j-1}^{2n})}{4h} + \\ & + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} - \\ & - s_6 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} + \\ & + s \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} + \\ & - \frac{U_j^{n+1} + U_j^n}{2} + s_5 \frac{U_j^{3n+1} + U_j^{3n}}{2} = 0, \\ & \frac{U_{j+2}^n - 2U_{j+1}^n + U_j^n}{h^2} - \frac{u_{j+2}^n - u_j^n}{2h} = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

Численное решение с использованием разностной схемы (32) представлено на рисунках 1-3.

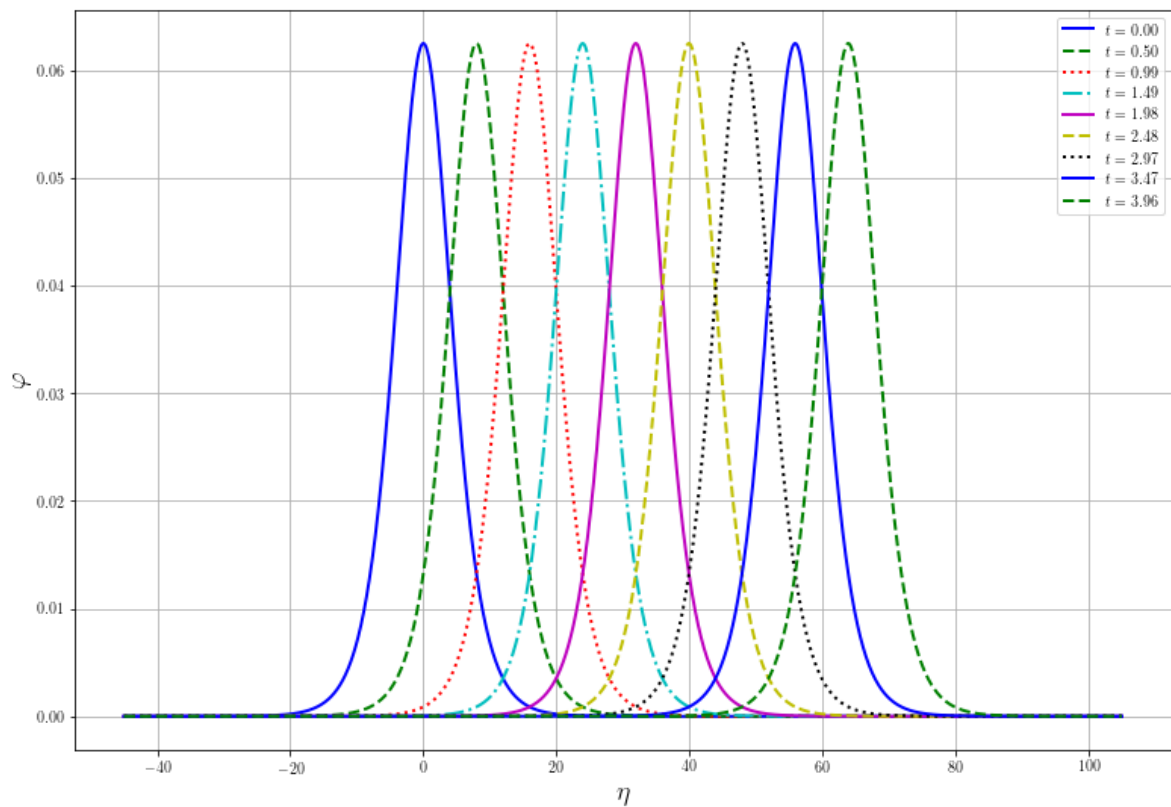


Рис.1. Численное решение уравнений (28) с начальным условием (31)
при $s_6 = 0$, $s = 0$ и $s_5 = 8$.

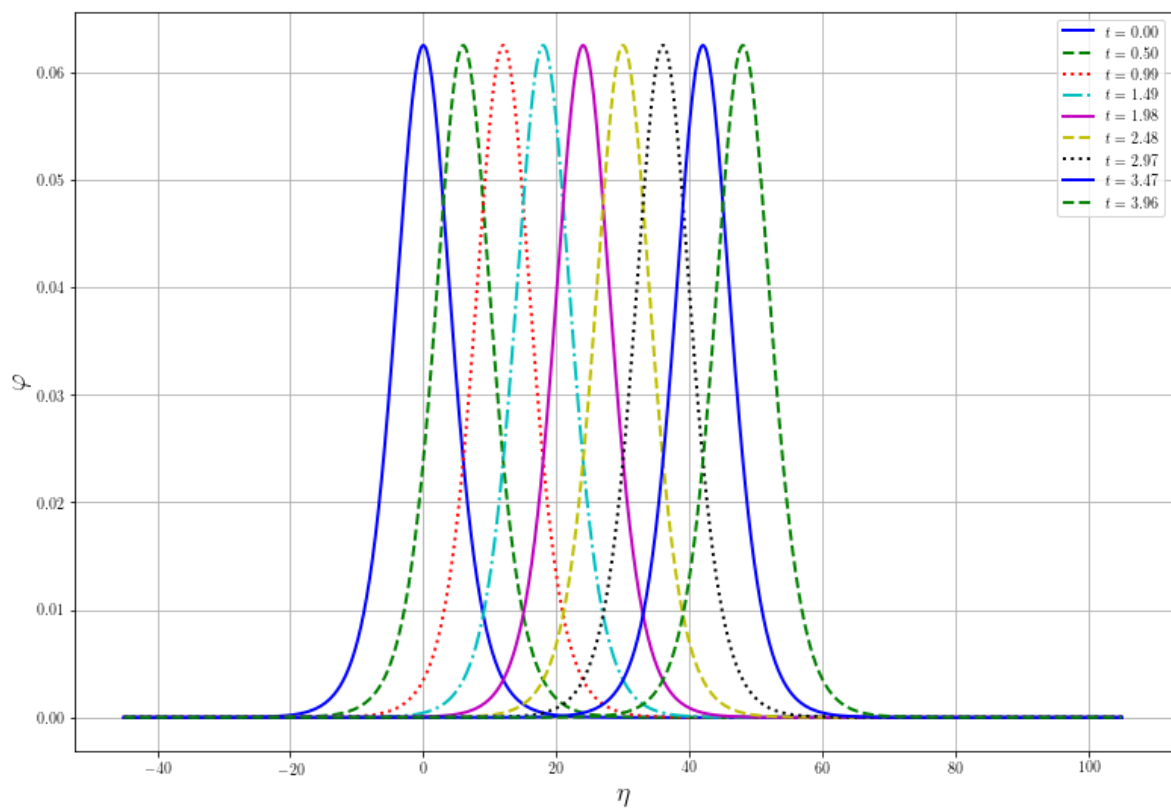


Рис.2. Численное решение уравнений (28) с начальным условием (31)
при $s_6 = 4$, $s = 0$ и $s_5 = 8$.

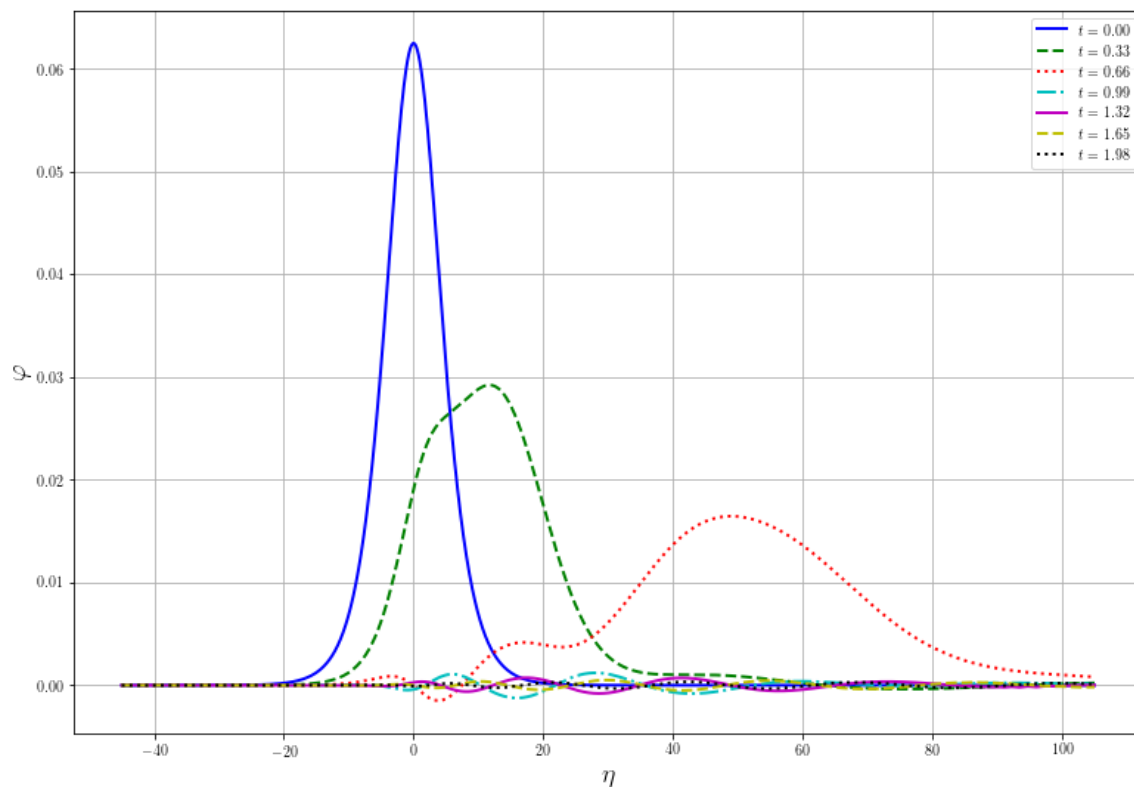


Рис.3. Численное решение уравнений (28) с начальным условием (31)

при $s_6 = 4$, $s = 1$ и $s_5 = 8$.

Заключение

Проведенное моделирование позволило сделать следующие выводы. Упругая окружающая среда увеличивает, а инерция движения жидкости уменьшает скорость волны деформации в оболочке согласно точного решения (30) уравнения (29) и численного решения уравнения (28), представленного на рисунках 1,2. Согласно численного решения уравнения (28), представленного на рисунке 3, вязкое трение жидкости уменьшает амплитуду волны. При этом вычисления показали, что происходит распадение исходного солитона на несколько более мелких с последующим уменьшением их амплитуд.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 19-01-00014

Библиографический список

1. Клигман Е.П., Клигман И.Е., Матвеев В.П. Спектральная задача для оболочек с жидкостью // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 6. С. 128 - 135.
2. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Анализ устойчивости цилиндрических оболочек, содержащих жидкость с осевой и окружной компонентами скорости // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 5. С. 155 - 165.
3. Громека И.С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах / Собрание сочинений. - М.: Изд-во АН СССР, 1952. С. 149 - 171.
4. Могилевич Л.И., Попова А.А., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту // Наука и техника транспорта. 2007. № 2. С. 64 - 72.
5. Кондратов Д.В., Могилевич Л.И. Математическое моделирование процессов взаимодействия двух цилиндрических оболочек со слоем жидкости между ними при отсутствии торцевого истечения в условиях вибрации // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2007. Т. 3. № 2 (27). С. 15 - 23.
6. Кондратов Д.В., Кондратова Ю.Н., Могилевич Л.И. Исследование амплитудных частотных характеристик колебаний упругих стенок трубы кольцевого профиля

при пульсирующем движении вязкой жидкости в условиях жесткого защемления по торцам // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2009. № 3. С. 15 - 21.

7. Païdoussis M.P., Nguyen V.B., Misra A.K. A theoretical study of the stability of cantilevered coaxial cylindrical shells conveying fluid // Journal of Fluids and Structures, 1991, vol. 5, no. 2, pp. 127 - 164. DOI:10.1016/0889-9746(91)90454-W
8. Amabili M., Garziera R. Vibrations of circular cylindrical shells with nonuniform constraints, elastic bed and added mass; Part III: Steady viscous effects on shells conveying fluid // Journal of Fluids and Structures, 2002, vol. 16, no. 6, pp. 795 - 809. DOI: 10.1006/jfls.2002.0446
9. Amabili M. Nonlinear vibrations and stability of shells and plates, Cambridge University Press, 2008, 374 p. DOI: 10.1017/CBO9780511619694
10. Могилевич Л.И., Попов В.С. Динамика взаимодействия упругого цилиндра со слоем вязкой несжимаемой жидкости // Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. № 5. С. 179 - 190.
11. Бочкарев С.А. Собственные колебания вращающейся круговой цилиндрической оболочки с жидкостью // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т. 3. № 2. С. 24 - 33. DOI: 10.7242/1999-6691/2010.3.2.14
12. Лекомцев С.В. Конечно-элементные алгоритмы расчета собственных колебаний трехмерных оболочек // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5. № 2. С. 233 - 243. DOI: 10.7242/1999-6691/2012.5.2.28
13. Бочкарев С.А., Матвеев В.П. Устойчивость коаксиальных цилиндрических оболочек, содержащих вращающийся поток жидкости // Вычислительная

механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 1. С. 94 - 102. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.1.12

14. Nariboli G.A. Nonlinear longitudinal dispersive waves in elastic rods // Journal of Mathematical Physics, 1970, vol. 4, pp. 64 - 73.
15. Nariboli G.A., Sedov A. Burger's-Korteweg-De Vries equation for viscoelastic rods and plates // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1970, vol. 32, pp. 661 - 667.
16. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Pavlov I.S. Inelastic interaction and splitting of strain solitons propagating in a rod // Journal of Sound and Vibration, 2018, vol. 419, pp. 173 - 182. DOI: 10.1016/j.jsv.2017.12.040
17. Ерофеев В.И., Морозов А.Н., Никитина Е.А. Учет влияния поврежденности материала на скорость распространения в нем упругой волны // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=22861>
18. Лай Т.Т., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29267>
19. Ерофеев В.И., Мальханов А.О., Морозов А.Н. Локализация волны деформации в нелинейно-упругой проводящей среде // Труды МАИ. 2010. № 40. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=22860>
20. Нгуен Т.Т., Тарлаковский Д.В. Антиплоское нестационарное движение электромагнитоупругого полупространства с учетом пьезоэлектрических

эффектов // Труды МАИ. 2019. № 105. URL:
<http://trudymai.ru/published.php?ID=104123>

21. Землянухин А.И., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3. № 1. С. 52 - 58.
22. Ерофеев В.И., Ключева.Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. 2002. Т. 48. № 6. С. 725 - 740.
23. Ерофеев В.И., Землянухин А.И., Катсон В.М., Шешенин С.Ф. Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стеснённым вращением // Вычислительная механика сплошных сред. 2009. Т. 2. № 4. С. 67 - 75. DOI: 10.7242/1999-6691/2009.2.4.32
24. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. - М.: Физматлит, 2009. - 320 с.
25. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Павлов И.С. Неупругое взаимодействие и расщепление солитонов деформации, распространяющихся в зернистой среде // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 2. С. 140 - 150. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.2.17
26. Землянухин А.И., Бочкарёв А.В. Метод возмущений и точные решения уравнений нелинейной динамики сред с микроструктурой // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 2. С. 182 - 191. DOI: 10.7242/1999-6691/2016.9.2.16

27. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Непрерывные дроби, метод возмущений и точное решение нелинейных эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2016. Т. 24. № 4. С. 71 - 85. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-4-71-85
28. Землянухин А.И., Бочкарев А.В. Метод Ньютона построения точных решений нелинейных дифференциальных и неинтегрируемых эволюционных уравнений // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2017. Т. 25. № 1. С. 64 - 83. DOI: 10.18500/0869-6632-2017-25-1-64-83
29. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Ковалев А.Д., Могилевич Л.И. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия: Физика. 2012. Т. 12. № 2. С. 12 - 18. DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197
30. Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // Вычислительная механика сплошных сред. 2013. Т. 6. № 3. С. 336 - 345. DOI: 10.7242/1999-6691/2013.6.3.38
31. Блинкова А.Ю., Иванов С.В., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И. Нелинейные волны в вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Труды МАИ. 2014. № 78. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=53486>
32. Блинкова А.Ю., Блинков Ю.А., Иванов С.В., Могилевич Л.И. Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой

цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой // Известия Саратовского университета. Новая серия: Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15. № 2. С. 193 - 202. DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202

33. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104003>

34. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. - М.: Дрофа, 2003. - 840 с.

35. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. - М.: Наука, 1979. - 320 с.

36. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. - М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. - 490 с.

37. Агеев Р.В., Евдокимова Е.В., Ковалева И.А., Могилевич Л.И. Динамика осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругой трубе кругового и кольцевого сечений // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. 2017. № 3. С. 33 – 41.