Труды МАИ. 2022. № 124
Trudy MAI, 2022, no. 124

Научная статья
УДК 531; 539.8
DOI: 10.34759/trd-2022-124-07

РАСТЯЖЕНИЕ ПОЛОСЫ СЖИМАЕМОГО МАТЕРИАЛА С НЕПРЕРЫВНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Илья Валерьевич Канашин[1], Анна Леонидовна Григорьева[2], Александр Игоревич Хромов[3], Ян Юрьевич Григорьев[4]

[1,2,4]Комсомольский-на-Амуре государственный университет,

Комсомольск-на-Амуре, Россия

[3]Институт прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук, Владивосток, Россия

[1,2]naj198282@mail.ru✉

[3]khromovai@list.ru

[4]prorector-ur@knastu.ru

Аннотация. В данной работе рассматривается задача о растяжении плоской жесткопластической полосы с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации с учётом сжимаемости материала, из которого изготовлен образец. Сжимаемость материала приводит к изменению плотности в процессе нагружения, в соответствии с которым в систему уравнений, определяющих поле скоростей перемещений добавляется логарифм от материальной производной плотности по времени. Данная система преобразуется к системе волновых уравнений. Для решения полученной системы рассматривается задача Коши с начальными условиями применительно к каждому из уравнений системы в отдельности, используются метод усреднения и метод спуска. В результате получается решение системы, состоящее из двух уравнений, содержащих двойные интегралы по поверхности круга. Также приводится вид решения системы, полученный в результате взятия двойных интегралов.

Ключевые слова: плоская деформация, жесткопластическое тело, сжимаемость материала, плотность, система волновых уравнений

Для цитирования: Канашин И.В., Григорьева А.Л., Хромов А.И., Григорьев Я.Ю. Растяжение полосы сжимаемого материала с непрерывным полем скоростей перемещений в условиях плоской деформации // Труды МАИ. 2022. № 124. DOI: 10.34759/trd-2022-124-07

TENSION OF A STRIP MADE OF A COMPRESSIBLE MATERIAL WITH A CONTINUOUS VELOCITY FIELD UNDER PLANE DEFORMATION

Ilya V. Kanashin[1], Anna L. Grigorieva[2]✉, Alexander I. Khromov[3], Yan Yu. Grigoriev[4]

[1,2,4]Komsomolsk-on-Amur State University, Komsomolsk-on-Amur, Russia

[3]Institute of Applied Mathematics, Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia

[1,2]naj198282@mail.ru✉

[3]khromovai@list.ru

[4]prorector-ur@knastu.ru

Abstract. The subject of the study of the presented article consists in determining conditions of the moment of a crack nucleation at the stretching of the plane sample from the compressible material under conditions of the plane deformation.

The purpose of this study is studying the process of stretching a flat sample made from compressible material with a continuous displacement velocities field under the plain strain conditions. The material compressibility associated with the mass conservation law, which is formulated in the form of the equation of continuity, leads to a density change while loading process, in accordance with which the logarithm of the material derivative of density in time is being added to the system of equations defining the displacement velocity field. This system is being converted to a system of inhomogeneous wave equations.

The following methods were applied while this research conducting. They are:

- Analytical method for the velocity and deformations field determining;

- Averaging method for obtaining the mean value of the auxiliary function on the sphere;

- Method of descent for transition from the sphere surface integration to the circle integration.

In the course of the studies, an intermediate result, namely the general solution of the system of wave equations for the velocities field determining, was obtained.

The results of the study can be applied while mathematical models developing of the behavior of real structures' elements in the problems of modern mechanical engineering and construction, as well as in assessing their strength.

Keywords: plane deformation, rigid-plastic body, material compressibility, density, system of wave equations

For citation: Kanashin I.V., Grigorieva A.L., Khromov A.I., Grigoriev Y.Y. Tension of a strip made of a compressible material with a continuous velocity field under plane deformation. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. DOI: 10.34759/trd-2022-124-07

Постановка задачи

Рассмотрим задачу о растяжении полосы в условиях плоской деформации. Поле скоростей перемещений предполагается непрерывным, и на полосу накладывается дополнительное ограничение, в виде условия сжимаемости материала из которого изготовлена полоса [1-2].

Растягивающие усилия прикладываются к верхней и нижней граням образца, на боковой поверхности напряжения отсутствуют. Из этого следуют граничные условия для напряжений:

$$\text{при } x_2 = 1\ \sigma_{22} = 2k, \text{при } x_2 = -1\ \sigma_{22} = 2k.$$

С учётом предположения о том, что весь образец находится в пластическом состоянии, получаем однородное напряжённое состояние:

$$\boldsymbol{\sigma_{22} = 2k, \sigma_{11} = \sigma_{12} = 0} \qquad 1)$$

и прямолинейное поле линий скольжения, составляющих с горизонтальной осью x_1 угол $\varphi = \pi/4$.

Алгоритм решения задачи

Поле скоростей в условиях плоской деформации определяется интегрированием системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\dfrac{d}{dt}[\ln \rho], \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial V_2}{\partial x_1} = \left(\dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} - \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2}\right)(-ctg2\varphi), \end{cases}$$

2)

где в правую часть первого уравнения добавляется логарифм материальной производной по времени от плотности материала, что обусловлено условием сжимаемости и связано с формулировкой закона сохранения массы:

$$V_{k,k} = -\frac{d}{dt}[\ln \rho],$$

3)

Подставив во второе уравнение системы значение угла наклона линий скольжения φ = π/4 преобразуем систему (2) к виду [3]:

$$\begin{cases} (I)\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial V_2}{\partial x_2} = -\dfrac{d}{dt}[\ln \rho] \\ (II)\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial V_2}{\partial x_1} = 0. \end{cases}$$

4)

Преобразовав (4) по закону $\frac{\partial}{\partial x_1}(I) - \frac{\partial}{\partial x_2}(II)$ и $\frac{\partial}{\partial x_2}(I) - \frac{\partial}{\partial x_1}(II)$, получаем систему волновых уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} = g_1(x_1, x_2, t) \\ \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x_1^2} = g_2(x_1, x_2, t) \end{cases}$$

5)

где $g_1(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{d}{dt}[\ln\rho]\right), g_2(x_1, x_2, t) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-\frac{d}{dt}[\ln\rho]\right)$ – функции координат и времени.

Рассмотрим отдельно решение первого уравнения системы. Пусть

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} - f_1(x_1, x_2, t) = g_1(x_1, x_2, t)$$

тогда

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + f_1(x_1, x_2, t)$$

6)

Будем искать частные решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

7)

с начальными условиями:

$$u|_{t=\tau} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=\tau} = f_1(x_1, x_2, \tau)$$

8)

обладающие центральной симметрией относительно некоторой точки $M_0(x_1^0, x_2^0)$, то есть решения вида

$$u(x_1, x_2, t) = u(r, t),$$

где r – расстояние между точками $M(x_1, x_2)$ и $M_0(x_1^0, x_2^0)$,.

Тогда для сферической системы координат [4-5] с центром в точке M_0, оператор Лапласа $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ преобразуется к виду:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru)$$

и уравнение (7) будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) \qquad (9)$$

С помощью введения вспомогательной функции $\upsilon = ru$ уравнение (9) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial (t-\tau)^2} \qquad (10)$$

с условиями:

$$\upsilon(r,\tau) = 0, \frac{\partial \upsilon}{\partial t}(r,\tau) = r\mathrm{f}_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \tau), \upsilon(0, t-\tau) = 0 \qquad (11)$$

Общее решение уравнения (10) имеет вид:

$$\upsilon(r,t;\tau) = \psi_1(t-\tau+r) + \psi_2(t-\tau-r), \qquad (12)$$

следовательно, функция u из уравнения (9) примет вид:

$$u(r,t;\tau) = \frac{1}{r}\psi_1(t-\tau+r) + \frac{1}{r}\psi_2(t-\tau-r). \qquad (13)$$

С учётом условия $\upsilon(0, t-\tau) = 0$ получим:

$$\psi_1(t-\tau) = -\psi_2(t-\tau) = \psi(t-\tau),$$

тогда (13) преобразуется к виду:

$$u(r,t;\tau) = \frac{1}{r}\psi(t-\tau+r) - \frac{1}{r}\psi(t-\tau-r), \qquad (14)$$

$$u(0,t;\tau) = 2\psi'(t-\tau).$$

(15)

Введём сферическую систему [6] координат (r, θ, φ) с началом в точке $\mathrm{M}_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$. Рассмотрим функцию

$$\bar{u}(r,t) = M_r[u] = \frac{1}{4\pi r^2}\iint_{S_r} udS = \frac{1}{2\pi}\iint_{S_r} ud\Omega,$$

(16)

где $dS = r^2 d\Omega$. Функция $\bar{u}$ является средним значением функции u на сфере S_r радиуса r с центром в точке M_0, $d\Omega \sin\theta\, d\theta d\varphi$.

Из (16) с учётом (15) следует:

$$u(\mathrm{M}_0, t_0) = \bar{u}(0, t_0) = 2\psi'(t),$$

(17)

После дифференцирования (14) по r и t имеем [7]:

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial t}(r\bar{u}) = 2\psi'(t - \tau + r) = 2\psi'(t_0)$$

при $t = \tau$ и $r = t_0$. Отсюда, учитывая (17) и (16) получим:

$$u(\mathrm{M}_0, t_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\iint_{S_r} rud\Omega + \iint_{S_r} r\frac{\partial u}{\partial t}d\Omega\right]_{r=t_0, t=\tau}.$$

(18)

Учитывая начальные условия (8) и опуская индекс 0 при M_0 и t_0 получим из (18) формулу Пуассона

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial t}t\iint_{S_{at}} \varphi_1(P)d\Omega_P + t\iint_{S_{at}} \varphi_2(P)d\Omega_P\right]_{r=t_0, t=\tau},$$

(

19)

где $dS_P = (at)^2 d\Omega_P$, которая, с учётом (16) может быть записана в виде

$$u(M,t) = \frac{\partial}{\partial t} tM_{at}[\varphi_1] + tM_{at}[\varphi_2],$$

(

20)

где

$$M_{at}[\varphi_1] = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_{at}^M} \varphi_1 d\Omega = \frac{1}{4\pi a^2 t^2} \iint_{S_{at}^M} \varphi_1 dS,$$

(

21)

а S_{at}^M – сфера радиуса at с центром в точке M.

В силу независимости начальных данных от координаты x_3 интегрирование по верхней полусфере может быть заменено интегрированием по кругу Σ_{at}^M, образующемуся при пересечении сферы S_{at}^M с плоскостью (x_1, x_2).

Элемент поверхности dS связан с элементом плоскости [8] dσ соотношением

$$d\sigma = dS \cos\gamma,$$

где

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2 - (x_1 - \xi)^2 - (x_2 - \eta)^2}}{at}.$$

Так же интегрированием по кругу Σ_{at}^M может быть заменено и интегрирование по нижней полусфере, поэтому интеграл [9-12] по кругу следует взять дважды. В результате получим формулу:

$$V_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \tau) = \frac{1}{2\pi}\left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{t-\tau}^M} \frac{0 d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} + \\ + \iint_{\Sigma_{t-\tau}^M} \frac{f_1(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} \end{array}\right], \tag{22}$$

Аналогично получается решение второго уравнения системы (5) – функция $V_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \tau)$:

$$V_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \tau) = \frac{1}{2\pi}\left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{t-\tau}^M} \frac{0 d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} + \\ + \iint_{\Sigma_{t-\tau}^M} \frac{f_2(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} \end{array}\right]. \tag{23}$$

Таким образом, общее решение системы (5) имеет вид:

$$\begin{cases} V_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \tau) = \frac{1}{2\pi}\left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{t-\tau}^M} \frac{0 d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} + \\ + \iint_{\Sigma_{t-\tau}^M} \frac{f_1(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} \end{array}\right], \\ V_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \tau) = \frac{1}{2\pi}\left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{t-\tau}^M} \frac{0 d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} + \\ + \iint_{\Sigma_{t-\tau}^M} \frac{f_2(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} \end{array}\right] \end{cases} \tag{24}$$

Так как интегрирование производится по кругу с центром в точке M(x_1, x_2) и радиусом $(t-\tau)$, то область интегрирования определяется неравенствами [13]:

$$x_1 - t + \tau \leq x_1 \leq x_1 + t - \tau,$$

$$-\sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2} \leq x_2 \leq \sqrt{(t-\tau)^2 - x_1^2}.$$

Координаты точек круга Σ_{at}^{M} выражаются формулами:

$$\xi = \mathrm{x}_1 + \alpha(t-\tau), \eta = \mathrm{x}_2 + \beta(t-\tau), \tag{25}$$

где $\alpha = \sin\theta\cos\psi$, $\beta = \sin\theta\sin\psi$.

Отсюда

$$\mathrm{x}_1 = \xi - \alpha(t-\tau), \mathrm{x}_2 = \eta - \beta(t-\tau),$$

и область интегрирования принимает вид:

$$\xi - (t-\tau)(\alpha+1) \le \xi \le \xi - (t-\tau)(\alpha-1),$$

$$-\sqrt{(t-\tau)^2 - \big(\xi - \alpha(t-\tau)\big)^2} \le \eta \le \sqrt{(t-\tau)^2 - \big(\xi - \alpha(t-\tau)\big)^2}, \tag{26}$$

Возьмём по отдельности интегралы для функции $V_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \tau)$:

$$\iint_{\Sigma_{t-\tau}^{M}} \frac{0 d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x_1-\xi)^2 - (x_2-\eta)^2}} =$$

$$= \int_{\xi-(t-\tau)(\alpha+1)}^{\xi-(t-\tau)(\alpha-1)} d\xi \int_{-\sqrt{(t-\tau)^2-(\xi-\alpha(t-\tau))^2}}^{\sqrt{(t-\tau)^2-(\xi-\alpha(t-\tau))^2}} 0 d\eta = 2(t-\tau)\mathrm{C}. \tag{27}$$

$$\iint_{\Sigma_{t-\tau}^{M}} \frac{f_1(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x_1-\xi)^2 - (x_2-\eta)^2}} =$$

$$= \iint_{\Sigma_{t-\tau}^{M}} \frac{\frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial t^2} d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x_1-\xi)^2 - (x_2-\eta)^2}} -$$

$$- \iint_{\Sigma_{t-\tau}^{M}} \frac{g_1(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (x_1-\xi)^2 - (x_2-\eta)^2}}. \tag{28}$$

$$\iint_{\Sigma_{t-\tau}^{M}} \frac{\frac{\partial^2 \mathrm{V}_1}{\partial t^2} d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} = \frac{\bar{\varphi}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})}{(t-\tau)\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}}. \tag{29}$$

$$\iint_{\Sigma_{t-\tau}^{M}} \frac{g_1(\xi,\eta,\tau) d\xi d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi)^2-(x_2-\eta)^2}} = \frac{\overline{\mathrm{g}_1}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})}{(t-\tau)\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}}. \tag{30}$$

Подставляя в (24) $\frac{\partial}{\partial t}$ от (27) и (29)-(30) получим:

$$V_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau}) = \frac{1}{2\pi}\left[2\mathrm{C} + \frac{\bar{\varphi}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau}) + \overline{\mathrm{g}_1}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})}{(t-\tau)\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}}\right]$$

Взяв аналогично интегралы для функции $V_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})$ получим:

$$V_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau}) = \frac{1}{2\pi}\left[2\mathrm{C} + \frac{\bar{\varphi}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau}) + \overline{\mathrm{g}_2}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})}{(t-\tau)\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}}\right]$$

Таким образом, после взятия интегралов система (6) преобразуется к виду [14-16]:

$$\begin{cases} V_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau}) = \frac{1}{2\pi}\left[2\mathrm{C} + \frac{\bar{\varphi}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau}) + \overline{\mathrm{g}_1}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})}{(t-\tau)\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}}\right], \\ V_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau}) = \frac{1}{2\pi}\left[2\mathrm{C} + \frac{\bar{\varphi}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau}) + \overline{\mathrm{g}_2}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})}{(t-\tau)\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}}\right]. \end{cases} \tag{31}$$

Выводы

В настоящее время ведётся дальнейшее решение задачи, оно направлено на получение, с помощью выведенных функций $V_1(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})$ и $V_2(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \mathrm{t}; \mathrm{\tau})$, главных значений тензора деформаций Альманси [17] (E_1, E_2), выраженных через относительное удлинение образца $\bar{\varepsilon}$. Также полученные функции [18] планируется использовать для выражения изменения ширины (a) растягиваемой полосы с течением времени и необходимого для её растяжения усилия (P). В практической области данные исследования будут применяться при изучении и исследовании деформации оболочечных конструкций, в том числе летательных аппаратов [19-20].

Список источников

1. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. - 420 с.

2. Херцберг Р.В. Деформация и механика разрушения конструкционных материалов. – М.: Металлургия, 1989. – 576 с.

3. Григорьева А.Л., Григорьев Я.Ю., Хромов А.И., Канашин И.В. Моделирование сравнительных деформационных процессов, при растяжении плоских образцов в условиях различных деформационных состояний // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов. –Уфа: Башкирский государственный университет, 2019. Т.3. С. 423-425. DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v3

4. Хромов А.И., Григорьев Я.Ю., Григорьева А.Л., Жарикова Е.П. Деформирование плоского образца при разрывном поле скоростей перемещений в условиях плоского напряженного состояния // Современные наукоемкие технологии. 2019. № 10. С. 73-77.

5. Григорьева А.Л., Хромов А.И. Одноосное растяжение жесткопластической полосы в условиях плоского напряженного состояния при однородном поле скорост ей деформаций // Вестник Чувашского государственного педагогического

университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 4(26). С. 198-205.

6. Григорьева А.Л., Слабожанина И.В., Хромов А.И. Растяжение полосы при плоском напряженном состоянии // Международная научно-практическая конференция «Фундаментальные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий»: сборник трудов (Чебоксары, 12-15 августа 2013). – Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2013. С. 57 - 64.

7. Тимохин В.С., Козлова О.В. Математическое моделирование полей деформаций в окрестности особенностей поля скоростей перемещения // II Всероссийская национальная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Молодежь и наука: актуальные проблемы фундаментальных и прикладных исследований»: сборник статей (Комсомольск-на-Амуре, 8 – 12 апреля 2019). - Комсомольск-на-Амуре: Изд-во КнАГУ, 2019. С. 482 – 485.

8. Володченко В.С., Козлова О.В. Поля деформаций тензора конечных деформаций в окрестности угловой точки штампа // Материалы 47-й научно-технической конференции студентов и аспирантов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов»: сборник трудов (Комсомольск-на-Амуре, 10 - 21 апреля 2017). - Комсомольск-на-Амуре: КнАГУ, 2017. С. 203 - 232.

9. Козлова О.В. Сжатие цилиндра при некоторых распределениях усилий // Всероссийская научная школа-конференция, посвященная 85-летию профессора Д.Д. Ивлева. «Механика предельного состояния и смежные вопросы»: сборник

трудов (Чебоксары, 15-18 сентября 2015). - Чебоксары: Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я. Яковлева, 2015. С. 164 – 166.

10. Гербутова Д.Д., Егорова Ю.Г. Моделирование пластического состояния в задаче о растяжении полосы, ослабленной вырезами // 46-я научно-техническая конференция студентов и аспирантов «Научно-техническое творчество аспирантов и студентов»: тезисы докладов (Комсомольск-на-Амуре, 01-15 апреля 2016). - Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет, 2016. С. 122 - 124.

11. Егорова Ю.Г., Егоров В.А. Моделирование пластического состояния в задаче о волочении полосы // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. 2013. Т. 1. № 1(13). С. 42-50.

12. Анисимов А.Н. Об учете необратимой сжимаемости материала при волочении полосы сквозь короткую матрицу // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. 2007. № 3(55). С. 19-31.

13. Лошманов А.Ю., Периг А.В. Распространение внутренней и внешних трещин при растяжении полосы с v-образными вырезами // Наука и бизнес: пути развития. 2012. № 8(14). С. 59-64.

14. Партон В.З. Механика разрушения: от теории к практике. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1990. - 240 с.

15. Bykovtsev G.I., Tsvetkov Y.D. The two-dimensional loading problem of an elasto-plastic plane weakened by a hole // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 244.

16. Бабайцев А.В., Бурцев А.Ю., Рабинский Л.Н., Соляев Ю.О. Методика приближенной оценки напряжений в толстостенной осесимметричной композитной конструкции // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=107879

17. Русланцев А.Н., Думанский А.М., Алимов М.А. Модель напряженно-деформированного состояния криволинейной слоистой композитной балки // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=85659

18. Старовойтов Э.И., Локтева Н.А., Старовойтова Н.А. Деформирование трехслойных композитных ортотропных прямоугольных пластин // Труды МАИ. 2014. № 77. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=53018

19. Глушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=105618

20. Воронич И.В., Колчев С.А., Панчук Д.В., Песецкий В.А., Силкин А.А., Ткаченко В.В., Нгуен Т.Т. Об особенностях аэродинамики малоразмерного летательного аппарата нормальной схемы // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=111370. DOI: 10.34759/trd-2019-109-8

References

1. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti* (Fundamentals of plasticity theory), Moscow, Nauka, 1969, 420 p.

2. Khertsberg R.V. *Deformatsiya i mekhanika razrusheniya konstruktsionnykh materialov* (Deformation and fracture mechanics of structural materials), Moscow, Metallurgiya, 1989, 576 p.

3. Grigor'eva A.L., Grigor'ev Ya.Yu., Khromov A.I., Kanashin I.V. *XII Vserossiiskii s"ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoi i prikladnoi mekhaniki: sbornik trudov*. Ufa, Bashkirskii gosudarstvennyi universitet, 2019, vol. 3, pp. 423-425. DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v3

4. Khromov A.I., Grigor'ev Ya.Yu., Grigor'eva A.L., Zharikova E.P. *Sovremennye naukoemkie tekhnologii*, 2019, no. 10, pp. 73-77.

5. Grigor'eva A.L., Khromov A.I. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predel'nogo sostoyaniya*, 2015, no. 4 (26), pp. 198-205.

6. Grigor'eva A.L., Slabozhanina I.V., Khromov A.I. *Mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya "Fundamental'nye problemy mekhaniki deformiruemogo tverdogo tela, matematicheskogo modelirovaniya i informatsionnykh tekhnologii",* Cheboksary, Chuvashskii gosudarstvennyi pedagogicheskii universitet im. I.Ya. Yakovleva, 2013, pp. 57-64.

7. Timokhin V.S., Kozlova O.V. *II Vserossiiskaya natsional'naya nauchnaya konferentsiya studentov, aspirantov i molodykh uchenykh «Molodezh' i nauka: aktual'nye problemy fundamental'nykh i prikladnykh issledovanii»,* Komsomol'sk-na-Amure, Izd-vo KnAGU, 2019, pp. 482–485.

8. Volodchenko V.S., Kozlova O.V. *Materialy 47-i nauchno-tekhnicheskoi konferentsii studentov i aspirantov "Nauchno-tekhnicheskoe tvorchestvo aspirantov i studentov"*, Komsomol'sk-na-Amure, KnAGU, 2017, pp. 203-232.

9. Kozlova O.V. *Vserossiiskaya nauchnaya shkola-konferentsiya, posvyashchennaya 85-letiyu professora D.D. Ivleva. "Mekhanika predel'nogo sostoyaniya i smezhnye voprosy",* Cheboksary, Chuvashskii gosudarstvennyi pedagogicheskii universitet im. I.Ya. Yakovleva, 2015, pp. 164–166.

10. Gerbutova D.D., Egorova Yu.G. *46-ya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya studentov i aspirantov "Nauchno-tekhnicheskoe tvorchestvo aspirantov i studentov",* Komsomol'sk-na-Amure, Komsomol'skii-na-Amure gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2016, pp. 122-124.

11. Egorova Yu.G., Egorov V.A. *Uchenye zapiski Komsomol'skogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta,* 2013, vol. 1, no. 1(13), pp. 42-50.

12. Anisimov A.N. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. I.Ya. Yakovleva*, 2007, no. 3(55), pp. 19-31.

13. Loshmanov A.Yu., Perig A.V. *Nauka i biznes: puti razvitiya*, 2012, no. 8(14), pp. 59-64.

14. Parton V.Z. *Mekhanika razrusheniya: ot teorii k praktike* (Mechanics of destruction: from theory to practice), Moscow, Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1990, 240 p.

15. Bykovtsev G.I., Tsvetkov Y.D. The two-dimensional loading problem of an elasto-plastic plane weakened by a hole, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1987, vol. 51, no. 2, pp. 244.

16. Babaitsev A.V., Burtsev A.Yu., Rabinskii L.N., Solyaev Yu.O. *Trudy MAI*, 2019, no. 107. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107879

17. Ruslantsev A.N., Dumanskii A.M., Alimov M.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 96. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=85659

18. Starovoitov E.I., Lokteva N.A., Starovoitova N.A. *Trudy MAI*, 2014, no. 77. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=53018

19. Glushenkova E.D., Mogilevich L.I., Popov V.S., Popova A.A. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105618

20. Voronich I.V., Kolchev S.A., Panchuk D.V., Pesetskii V.A., Silkin A.A., Tkachenko V.V., Nguen T.T. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111370. DOI: 10.34759/trd-2019-109-8

Статья поступила в редакцию 05.04.2022
Статья после доработки 06.04.2022
Одобрена после рецензирования 08.04.2022
Принята к публикации 21.06.2022
The article was submitted on 05.04.2022; approved after reviewing on 08.04.2022; accepted for publication on 21.06.2022