УДК 517.926

Уравнения в вариациях для регулярных прецессий и структурная устойчивость этих движений

И.А. Галиуллин

Построены линеаризованные уравнения таких движений произвольного тела, которые называются регулярными прецессиями и играют существенную роль в динамике твёрдого тела. Проведена классификация возможных типов систем линейных дифференциальных уравнений и сформулированы утверждения о соответствующей реакции устойчивости этих систем на изменения параметров тела.

Ключевые слова: регулярные прецессии; уравнения в вариациях; структурная устойчивость.

1. Пусть θ,φ,ψ - эйлеровы углы, определяющие положение твёрдого тела, форма которого, т.е. геометрия масс, здесь предполагается произвольной. Уравнения движения тела имеют вид [1], и при $\theta\neq 0;\pi$ могут быть записаны в нормальной форме

$$\dot{\omega}_\theta=\Delta^{-1}\Delta_\theta,\ \ \dot{\omega}_\varphi=\Delta^{-1}\Delta_\varphi,\ \ \dot{\omega}_\psi=\Delta^{-1}\Delta_\psi,\ \ \dot{\theta}=\omega_\theta,\ \ \dot{\varphi}=\omega_\varphi,\ \ \dot{\psi}=\omega_\psi,$$

где Δ выражается через осевые и центробежные моменты инерции (в стандартных обозначениях) по формуле

$$\Delta=(ABC-AD^2-BE^2-CF^2-2DEF)\ \ \sin^2\theta,$$

$Q_\psi,Q_\theta,Q_\varphi$ - обобщённые силы, составляющие правые части лагранжевых уравнений движения, и

$$\Delta_\theta=(Q_\psi+b_0)A_{12}+(Q_\theta+c_0)A_{22}+(Q_\varphi+d_0)A_{23},$$
$$\Delta_\varphi=(Q_\psi+b_0)A_{13}+(Q_\theta+c_0)A_{23}+(Q_\varphi+d_0)A_{33},$$
$$\Delta_\psi=(Q_\psi+b_0)A_{11}+(Q_\theta+c_0)A_{12}+(Q_\varphi+d_0)A_{13},$$

а также

$$-b_0=b_{12}\omega_\psi\omega_\theta+b_{13}\omega_\psi\omega_\varphi+b_{22}\omega_\theta{}^2+b_{23}\omega_\theta\omega_\varphi+b_{33}\omega_\varphi{}^2,$$
$$-c_0=c_{11}\omega_\psi{}^2+c_{13}\omega_\psi\omega_\varphi+c_{23}\omega_\theta\omega_\varphi+c_{33}\omega_\varphi{}^2,$$
$$-d_0=d_{11}\omega_\psi{}^2+d_{12}\omega_\psi\omega_\theta+d_{22}\omega_\theta{}^2,$$

наконец, для других величин явные зависимости от углов Эйлера и моментов инерции выглядят следующим образом:

$$b_{12}=-2c_{11}=a\sin 2\theta-2e\cos 2\theta,\quad b_{13}=-2d_{11}=2b\sin^2\theta+d\sin 2\theta,\quad b_{22}=b\cos\theta-d\sin\theta,$$

$$b_{23}=(f-C)\sin\theta,\ \ b_{33}=d\sin\theta,\ \ c_{13}=-d_{12}=(f+C)\sin\theta+2e\cos\theta,\ \ c_{23}=-2d_{22}=-2b,$$

$$c_{33}=e,\quad a=A\sin^2\varphi+B\cos^2\varphi-F\sin 2\varphi-C,\quad b=1/2(A-B)\sin 2\varphi-F\cos 2\varphi,$$

$$d=D\sin\varphi-E\cos\varphi,\quad e=E\sin\varphi+D\cos\varphi,\quad f=2F\sin 2\varphi+(A-B)\cos 2\varphi,$$

$$A_{11} = C(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + F\sin 2\varphi) - (D\sin\varphi - E\cos\varphi)^2,$$

$$A_{12} = A_{21} = (E\sin\varphi + D\cos\varphi)(E\cos\varphi - D\sin\varphi)\sin\theta - C[\frac{1}{2}(A-B)\sin 2\varphi - F\cos 2\varphi]\sin\theta,$$

$$A_{13} = A_{31} = [(\frac{1}{2}(A-B)\sin 2\varphi - F\cos 2\varphi)\sin\theta + (D\sin\varphi - E\cos\varphi)\cos\theta](D\sin\varphi - E\cos\varphi) -$$

$$-[C\cos\theta - (E\sin\varphi + D\cos\varphi)\sin\theta](A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + F\sin 2\varphi),$$

$$A_{22} = C[(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - F\sin 2\varphi - C)\sin^2\theta -$$

$$-(E\sin\varphi + D\cos\varphi)\sin 2\theta + C] - [C\cos\theta - (E\sin\varphi + D\cos\varphi)\sin\theta]^2,$$

$$A_{23} = A_{32} = [(\frac{1}{2}(A-B)\sin 2\varphi - F\cos 2\varphi)\sin\theta + (D\sin\varphi - E\cos\varphi)\cos\theta]\times$$

$$\times[C\cos\theta - (E\sin\varphi + D\cos\varphi)\sin\theta] - [(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - F\sin 2\varphi - C)\sin^2\theta -$$

$$-(E\sin\varphi + D\cos\varphi)\sin 2\theta + C](D\sin\varphi - E\cos\varphi),$$

$$A_{33} = [(A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi - F\sin 2\varphi - C)\sin^2\theta - (E\sin\varphi + D\cos\varphi)\sin 2\theta + C]\times$$

$$(A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi + F\sin 2\varphi) - [(\frac{1}{2}(A-B)\sin 2\varphi - F\cos 2\varphi)\sin\theta + (D\sin\varphi - E\cos\varphi)\cos\theta]^2.$$

2. В [1] изучены случаи существования регулярных прецессий, т.е. движений с постоянными $\omega_\psi, \omega_\varphi$ и θ, в позиционных силовых полях в зависимости от комбинаций, в которых эйлеровы углы входят в список аргументов силовой функции. Показано, в частности, что если хотя бы один из них не входит в этот список, то ось собственного вращения перпендикулярна круговому сечению эллипсоида инерции; это означает, что $A = B,\ F = 0$. Тогда предыдущие выражения существенно упрощаются:

$$a = A - C,\ \ b = f = 0,\ \ d = -H\cos(\varphi+\alpha),\ \ e = H\sin(\varphi+\alpha)\ \ (H = (D^2+E^2)^{1/2},\ \ tg\alpha = D/E),$$

$$A_{11} = AC - H^2\cos^2(\varphi+\alpha),\ \ A_{12} = \frac{1}{2}H^2\sin 2(\varphi+\alpha)\sin\theta,\ \ A_{22} = (AC - H^2\sin^2(\varphi+\alpha))\sin^2\theta,$$

$$A_{13} = H^2\cos^2(\varphi+\alpha)\cos\theta - AC\cos\theta + AH\sin(\varphi+\alpha)\sin\theta,$$

$$A_{23} = H(A\cos(\varphi+\alpha)\sin\theta - \frac{1}{2}H\sin 2(\varphi+\alpha)\cos\theta)\sin\theta,$$

$$A_{33} = A(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta - H\sin(\varphi+\alpha)\sin 2\theta) - H^2\cos^2(\varphi+\alpha)\cos^2\theta,$$

$$\Delta = A(AC - D^2 - E^2)\sin^2\theta,$$

$$b_0 = ((C-A)\sin 2\theta + 2H\sin(\varphi+\alpha)\cos 2\theta)\omega_\psi\omega_\theta + (H\cos(\varphi+\alpha)\sin 2\theta)\omega_\psi\omega_\varphi -$$

$$-(H\cos(\varphi+\alpha)\sin\theta)\omega_\theta{}^2 + (C\sin\theta)\omega_\theta\omega_\varphi + (H\cos(\varphi+\alpha)\sin\theta)\omega_\varphi{}^2,$$

$$c_0 = \frac{1}{2}((A-C)\sin 2\theta - 2H\sin(\varphi+\alpha)\cos 2\theta)\omega_\psi{}^2 -$$

$$-(C\sin\theta + 2H\sin(\varphi+\alpha)\cos\theta)\omega_\psi\omega_\varphi - (H\sin(\varphi+\alpha))\omega_\varphi{}^2,$$

$$d_0 = (-\frac{1}{2} H \cos(\varphi+\alpha)\sin 2\theta)\omega_\psi{}^2 + (C\sin\theta + H\sin(\varphi+\alpha)\cos\theta)\omega_\psi\omega_\theta.$$

3. Определим невозмущённое движение функциями

$$\omega_\theta{}^0 = 0,\ \ \omega_\varphi{}^0 = \omega_r,\ \ \omega_\psi{}^0 = \omega_e,\ \ \theta^0 = \theta_0,\ \ \varphi^0 = \omega_r t,\ \ \psi^0 = \omega_e t$$

и возмущения по формулам

$$\omega_\theta = x_1,\ \ \omega_\varphi = \omega_r + x_2,\ \ \omega_\psi = \omega_e + x_3,\ \ \theta = \theta_0 + x_4,\ \ \varphi = \omega_r t + x_5,\ \ \psi = \omega_e t + x_6.$$

Тогда уравнения в вариациях, составленные для исходных уравнений движения п.1, будут представлять линейную систему вида

$$\dot{x}_1 = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + a_{13}(t)x_3 + a_{14}(t)x_4 + a_{15}(t)x_5 + a_{16}(t)x_6,$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + a_{23}(t)x_3 + a_{24}(t)x_4 + a_{25}(t)x_5 + a_{26}(t)x_6,$$

$$\dot{x}_3 = a_{31}(t)x_1 + a_{32}(t)x_2 + a_{33}(t)x_3 + a_{34}(t)x_4 + a_{35}(t)x_5 + a_{36}(t)x_6,$$

$$\dot{x}_4 = x_1,\ \ \dot{x}_5 = x_2,\ \ \dot{x}_6 = x_3.$$

Они называются уравнениями возмущённого движения и получаются путём тейлоровского разложения функций в правых частях исходной системы, причём функции $a_{ij}(t)$ - это сужения коэффициентов при членах первого порядка на многообразие $R^6\{\omega_\theta, \omega_\varphi, \omega_\psi, \theta, \varphi, \psi\}$, определяемое указанными выше формулами.

Вид исходной системы уравнений Лагранжа позволяет делать выводы о функциональных свойствах коэффициентов линеаризованной системы, а, следовательно, о свойствах её показателей Ляпунова. Основой для этого служит теорема Миллионщикова [2]о принадлежности показателей ко второму классу Бэра.

4. Пусть силовая функция зависит от всех эйлеровых углов: $U = U(\psi, \theta, \varphi)$. Тогда показатели Ляпунова соответствующей системы уравнений в вариациях являются функциями второго бэровского класса и могут быть разрывными в каждой точке пространства параметров. Это означает, что свойство устойчивости может теряться при малом их изменении, когда старший показатель скачкообразно переходит в положительную полуплоскость.

Если в точности один из углов Эйлера не входит в список аргументов силовой функции, то, как это показано в [1], либо угловые скорости ω_e и ω_r соизмеримы, либо переменная ψ не входит в выражение функции U. Несоизмеримость угловых скоростей означает, что линеаризованная система уравнений является квазипериодической и её показатели Ляпунова в общем случае также принадлежат второму бэровскому классу. Из структуры функций $\Delta_\psi, \Delta_\theta, \Delta_\varphi$, а также A_{ij} следует, что в уравнениях возмущённого движения последние определяют зависимость только от $\omega_r t$; именно зависимость силовой функции от ψ вызывает квазипериодичность системы. Таким образом, если угловые скорости прецессионного движения соизмеримы, то система уравнений в вариациях оказывается периодической, а её показатели Ляпунова – непрерывными функциями. Это позволяет суждение об устойчивости регулярной прецессии распространить до утверждения её структурной (параметрической) устойчивости, если первое вытекает из отрицательности старшего характеристического показателя. Аналогичное утверждение формулируется и для систем, где функция U зависит лишь от одного из эйлеровых углов. Как показано в [1], таким аргументом может быть только угол нутации θ; тогда твёрдое тело является симметричным: $A = B, \quad D = E = F = 0$, а матрица линейной системы – постоянной.

Библиографический список

1. Галиуллин И.А. Регулярные прецессии твёрдого тела с одной закреплённой точкой // Известия АН СССР. Механика твёрдого тела. 1987. № 5. С.6-18.

2. Миллионщиков В.М. Показатели Ляпунова как функции параметра // Математический сборник. 1988. Т.137. № 3. С.364-380.

Сведения об авторе.

Галиуллин Ильяс Абдэльхакович, профессор, Московского авиационного института (национального исследовательского университета), д.ф.-м.н., тел.: (499) 243-69-61
e-mail: gal802@sokol.ru