

УДК 531.36:521.1

О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка

Холостова О.В.^{1*}, Сафонов А.И.^{2*}

¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

²*Научно-производственная фирма "ИнфоСистем-35", ул. 3-я Мытищинская, 16, стр. 37, Москва, 129626, Россия*

**e-mail: kholostova_o@mail.ru,*

***e-mail: lexafonov@mail.ru*

Аннотация

Рассматриваются движения близкой к автономной периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности тривиального положения равновесия, устойчивого в линейном приближении. Предполагается, что в системе реализуются одновременно два комбинационных резонанса третьего порядка, сильный и слабый; в этом случае частоты малых колебаний системы связаны также резонансным соотношением четвертого порядка. В полной нелинейной системе указанное положение равновесия неустойчиво. Методами теории возмущений проведена нормализация гамильтониана возмущенного движения в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений с учетом имеющихся резонансов. В предположении, что коэффициенты в слагаемых, соответствующих резонансу четвертого порядка, малы, рассмотрена приближенная (модельная) система, зависящая от трех параметров. Аналитическими

и графическими методами решен вопрос о существовании и числе положений равновесия модельной системы. В пространстве параметров задачи выявлены области, в которых число положений равновесия модельной системы может варьироваться от нуля до пяти. В качестве приложения рассмотрена задача о движении динамически симметричного спутника (моделируемого твердым телом) относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле на слабоэллиптической орбите. Исследуются движения спутника в окрестности его периодического движения, рождающегося из гиперболоидальной прецессии на круговой орбите. Для значений параметров, соответствующих кратному комбинационному резонансу третьего порядка, вычислены коэффициенты нормальной формы модельной системы. Показано, что в этой системе имеются три равновесные точки, причем две из них неустойчивы, а третья устойчива в линейном приближении.

Ключевые слова: гамильтонова система, кратный комбинационный резонанс, динамически симметричный спутник, гиперболоидальная прецессия.

Введение

При исследовании частных движений (положений равновесия, периодических движений и т.п.) в модельных задачах небесной механики, зависящих от нескольких параметров, нередки случаи кратных резонансов, при которых частоты малых линейных колебаний системы в окрестности исследуемого движения связаны

несколькими линейными соотношениями специального вида. В таких случаях может измениться (по сравнению с нерезонансным случаем или случаем однократного резонанса) характер устойчивости данного движения, а в его окрестности существенно меняется поведение траекторий системы, в частности, появляются новые периодические движения.

Исследование случаев кратных резонансов начато сравнительно недавно, каждый такой случай требует специального рассмотрения. Взаимное влияние нескольких резонансов одного порядка на устойчивость положения равновесия для многомерных автономных негамильтоновых систем рассматривалось в работах [1-4] и для гамильтоновых систем в работах [5, 6].

Случаи кратных параметрических резонансов в близкой к автономной периодической по времени линейной гамильтоновой системе рассмотрены в работах [7-9]. Показано, что, в зависимости от типа резонанса, из резонансной точки может выходить одна, две или три области неустойчивости. Разработанный алгоритм исследования применен к решению ряда задач динамики спутников относительно центра масс [9-11].

В работе [12] доказана неустойчивость тривиального положения равновесия периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях кратных резонансов третьего порядка и проведен подробный анализ нелинейных колебаний приближенных (модельных) систем. В статье [13] исследуется взаимное влияние слабого комбинационного резонанса третьего порядка и сильного основного резонанса четвертого порядка (в зоне его устойчивости) на движения гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в

окрестности тривиального равновесия. Найдена область изменения параметров задачи, для которых все движения модельной системы в окрестности равновесия ограничены. Показано, что в эту область попадают параметры задачи об устойчивости треугольных точек либрации плоской эллиптической ограниченной задачи трех тел в случае рассматриваемого кратного резонанса [14]. В этой же работе доказана формальная устойчивость треугольных точек либрации (в той же постановке задачи) для значений параметров, отвечающих точке кратного резонанса четвертого порядка.

Вопросы формальной устойчивости относительных равновесий на вертикали плоского двойного маятника, точка подвеса которого колеблется вдоль вертикали по гармоническому закону с произвольной частотой и амплитудой, в случаях кратных резонансов четвертого порядка рассмотрены в монографии [15]. Общие критерии формальной устойчивости периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случаях двойных или тройных резонансов четвертого порядка получены в работе [16].

В статье [17] решен вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости (в линейном приближении) периодических движений близкой к автономной периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности неустойчивого равновесия. Предполагалось, что это равновесие соответствует точке кратного резонанса третьего порядка, причем один из резонансов основной (сильный), а другой комбинационный (сильный или слабый).

В данной работе для аналогичной системы изучается случай двойного комбинационного резонанса третьего порядка, сильного и слабого. Методами

теории возмущений получена приближенная (модельная) система. В предположении, что коэффициенты в слагаемых, соответствующих резонансу четвертого порядка, малы, решена задача о существовании и числе ее положений равновесия. Теоретические результаты применены в задаче о движении динамически симметричного спутника на слабоэллиптической орбите вблизи гиперболоидальной прецессии в рассматриваемом резонансном случае.

1. Постановка задачи. Преобразование гамильтониана. Модельная система

Рассмотрим движения близкой к автономной, 2π -периодической по времени гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, описываемой функцией Гамильтона $H(q_j, p_j, t; \varepsilon)$. Здесь q_j и p_j ($j=1,2$) – обобщенные координаты и канонически сопряженные с ними импульсы, t – время, ε – малый параметр ($0 < \varepsilon \ll 1$); считаем, что при $\varepsilon = 0$ система автономна.

Пусть начало координат $q_j = 0, p_j = 0$ фазового пространства — положение равновесия системы, устойчивое в линейном приближении, характеристические показатели $\pm i\lambda_j$ линеаризованной системы уравнений возмущенного движения чисто мнимые. Если величины $\lambda_j, 2\lambda_j$ и $\lambda_1 \pm \lambda_2$ не являются целыми числами (т.е. в системе нет резонансов первого и второго порядков), то при соответствующем выборе величин q_j и p_j ($j=1,2$) гамильтониан системы в окрестности рассматриваемого равновесия представляется в виде

$$H(q_j, p_j, t; \varepsilon) = \frac{1}{2} \lambda_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2} \sigma \lambda_2 (q_2^2 + p_2^2) + H_3(q_j, p_j, t; \varepsilon) + H_4(q_j, p_j, t; \varepsilon) + O_5 \quad (1)$$

$$H_k(q_j, p_j, t; \varepsilon) = H_k^{(0)}(q_j, p_j) + \varepsilon H_k^{(1)}(q_j, p_j) + O(\varepsilon^2) \quad (k=3,4),$$

где величина σ принимает значение 1 или -1 , H_k – совокупности слагаемых k -й степени, а O_5 – не менее пятой степени, относительно q_j и p_j ($j=1,2$).

Пусть величины λ_1 и λ_2 задаются одним из наборов (k_1, k_2 — целые числа) [12]

$$\begin{aligned} \lambda_1 = k_1 + \frac{1}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{3}{5}; \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{3}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{4}{5}; \\ \lambda_1 = k_1 + \frac{2}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{1}{5}; \quad \lambda_1 = k_1 + \frac{4}{5}, \quad \lambda_2 = k_2 + \frac{2}{5}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда комбинации $\lambda_1 - 2\lambda_2$ и $2\lambda_1 + \lambda_2$ являются целыми числами, и в системе реализуется двойной комбинационный резонанс третьего порядка. В этих случаях целыми являются также величины $\lambda_1 + 3\lambda_2$ и $3\lambda_1 - \lambda_2$, что означает наличие двойного комбинационного резонанса четвертого порядка.

Ранее в статье [12] было показано, что для всех случаев двойного резонанса третьего порядка тривиальное положение равновесия системы неустойчиво при любом соотношении между резонансными коэффициентами. В данной работе будем считать, что реализуется один из случаев (2) и при этом справедливо соотношение $\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 = \ell$ (где ℓ – целое число). Тогда для резонансных соотношений четвертого порядка имеем $\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$, $3\lambda_1 - \lambda_2 = 2\ell$. Первый из этих резонансов проявляется уже в слагаемых автономной ($\varepsilon = 0$) части гамильтониана возмущенного движения. Будем считать, что слагаемые, соответствующие резонансам третьего порядка, впервые проявляются в гамильтониане в членах

порядка ε^ℓ , а соответствующие второму случаю резонанса четвертого порядка – в членах порядка $\varepsilon^{2\ell}$.

Осуществим в гамильтониане (1) ряд канонических замен переменных, упрощающих его структуру. Сначала при помощи близкой к тождественной замены переменных нормализуем автономную часть гамильтониана в членах до четвертого порядка включительно относительно возмущений с учетом имеющегося резонанса четвертого порядка. Затем при помощи близкой к тождественной 2π -периодической по времени канонической замены проведем нормализацию в слагаемых второго и третьего порядков неавтономной части гамильтониана до ε^ℓ включительно (с учетом резонансов третьего порядка). В симплектических полярных координатах φ_j, r_j , задаваемых формулами $\tilde{q}_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j$, $\tilde{p}_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ ($j=1,2$), преобразованная часть гамильтониана запишется в виде

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \lambda_1 r_1 + \sigma \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + \\ & + d r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos[\varphi_1 + 3\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 + 3\lambda_2)t + \varphi_*] + \varepsilon \cdot O_2 + O_{5/2} + \\ & + \varepsilon^\ell a r_1^{1/2} r_2 \cos[\varphi_1 - 2\sigma\varphi_2 - (\lambda_1 - 2\lambda_2)t + \varphi_1^* - 2\sigma\varphi_2^*] + \\ & + \varepsilon^\ell b r_1 r_2^{1/2} \cos[2\varphi_1 + \sigma\varphi_2 - (2\lambda_1 + \lambda_2)t + 2\varphi_1^* + \sigma\varphi_2^*] + O(\varepsilon^{\ell+1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь c_{ij} , d , $a, b, \varphi_j^*, \varphi_*$ — константы, O_2 и $O_{5/2}$ — совокупности слагаемых соответственно четвертой и не менее пятой степени относительно $r_j^{1/2}$ ($j=1,2$), имеющие по угловым координатам φ_j период 2π .

Перейдем в ε^ℓ -окрестность начала координат, полагая $r_j = \varepsilon^{2\ell} R_j$, $\varphi_j = \Phi_j$ ($j=1, 2$).

2). Осуществим затем унивалентную каноническую замену переменных

$\Phi_j, R_j \rightarrow \tilde{\Phi}_j, \tilde{R}_j$ ($j=1, 2$) по формулам

$$\tilde{R}_j = R_j, \quad \tilde{\Phi}_1 = \Phi_1 + \varphi_1^* - \lambda_1 t, \quad \tilde{\Phi}_2 = \Phi_2 + \varphi_2^* - \sigma \lambda_2 t.$$

В результате линейная по R_j ($j=1, 2$) часть гамильтониана уничтожится, при этом в резонансных в слагаемых третьего и четвертого порядков по $R_j^{1/2}$ исчезает время. Гамильтониан (3) преобразуется к виду

$$\hat{H} = \varepsilon^{2\ell} \left[a \tilde{R}_1^{1/2} \tilde{R}_2 \cos(\tilde{\Phi}_1 - 2\sigma \tilde{\Phi}_2) + b \tilde{R}_1 \tilde{R}_2^{1/2} \cos(2\tilde{\Phi}_1 + \sigma \tilde{\Phi}_2) + c_{20} \tilde{R}_1^2 + c_{11} \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 + c_{02} \tilde{R}_2^2 + d r_1^{1/2} r_2^{3/2} \cos(\tilde{\Phi}_1 + 3\sigma \tilde{\Phi}_2 + \tilde{\varphi}_*) \right] + O(\varepsilon^{2\ell+1}). \quad (4)$$

Слагаемое $O(\varepsilon^{2\ell+1})$ в (4) аналитично по переменным $\tilde{\Phi}_j, \tilde{R}_j$ и t , 2π -периодично по $\tilde{\Phi}_j$ и 10π -периодично по t . Без ограничения общности коэффициенты c_{11} , a и b в (1.5) можно считать положительными [17].

Сделаем еще одну каноническую замену переменных (с валентностью ξ^{-1})

$$\tilde{R}_j = \xi \hat{R}_j, \quad \tilde{\Phi}_j = \hat{\Phi}_j, \quad (j=1, 2) \quad \xi = \frac{b^2}{c_{11}^2}.$$

и введем новую независимую переменную τ по формуле $\tau = (\varepsilon^{2\ell} b^2 / c_{11}) t$.

Преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\tilde{\Gamma} = \alpha \hat{R}_1^{1/2} \hat{R}_2 \cos(\hat{\Phi}_1 - 2\sigma \hat{\Phi}_2) + \hat{R}_1 \hat{R}_2^{1/2} \cos(2\hat{\Phi}_1 + \sigma \hat{\Phi}_2) + \gamma_{20} \hat{R}_1^2 + \hat{R}_1 \hat{R}_2 + \gamma_{02} \hat{R}_2^2 + \delta r \tilde{R}_1^{1/2} \tilde{R}_2^{3/2} \cos(\hat{\Phi}_1 + 3\sigma \hat{\Phi}_2 + \tilde{\varphi}_*) + O(\varepsilon), \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{a}{b}, \quad \gamma_{20} = \frac{c_{20}}{c_{11}}, \quad \gamma_{02} = \frac{c_{02}}{c_{11}}, \quad \delta = \frac{d}{c_{11}}.$$

Гамильтониан (5) является характерным для рассматриваемого здесь резонансного случая. Главная (модельная) его часть, получаемая из (5) путем отбрасывания последнего слагаемого, зависит от пяти параметров $\alpha, \gamma_{20}, \gamma_{02}, \delta, \tilde{\varphi}_*$.

На первом этапе будем исследовать соответствующую модельную систему, в которой предполагаем малым (порядка ε) коэффициент δ в слагаемом, отвечающим резонансу четвертого порядка. Отбрасывая это слагаемое вместе с $O(\varepsilon)$ и полагая в полученном гамильтониане $\sigma = 1$ и $\sigma = -1$, получим два гамильтониана, переходящие один в другой, если поменять местами индексы 1 и 2. Поэтому будем рассматривать один модельный гамильтониан, имеющий вид (знаки $\hat{}$ над переменными опускаем)

$$\Gamma = \alpha R_1^{1/2} R_2 \cos(\Phi_1 - 2\Phi_2) + R_1 R_2^{1/2} \cos(2\Phi_1 + \Phi_2) + \gamma_{20} R_1^2 + R_1 R_2 + \gamma_{02} R_2^2. \quad (6)$$

Гамильтониан (6) отвечает наличию в системе двух комбинационных (сильного и слабого) резонансов третьего порядка. Он зависит от трех параметров α, γ_{20} и γ_{02} . Резонансный коэффициент α в (6) считаем положительным, коэффициенты γ_{20} и γ_{02} в членах четвертой степени относительно $R_j^{1/2}$ могут принимать значения любого знака.

Цель данной работы — исследование влияния двойного комбинационного резонанса третьего порядка на существование и бифуркации положений равновесия модельной системы с гамильтонианом (6). В качестве приложения будет рассмотрен изучаемый резонансный случай в задаче о движении динамически симметричного спутника (твердого тела), центр масс которого движется по слабоэллиптической

орбите в центральном ньютоновском гравитационном поле, в окрестности одного из его стационарных вращений (гиперболоидальной прецессии). Ранее ряд задач о резонансных и нерезонансных движениях динамически симметричного спутника относительно центра масс исследовался в работах [18. 19].

2. Положения равновесия модельной системы и их бифуркации

Запишем уравнения движения модельной системы

$$\frac{d\Phi_j}{d\tau} = \frac{\partial\Gamma}{\partial R_j}, \quad \frac{dR_j}{d\tau} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\Phi_j} \quad (j=1,2)$$

и, введя обозначения $\Psi_1 = \Phi_1 - 2\Phi_2$, $\Psi_2 = 2\Phi_1 + \Phi_2$, представим их в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_1}{d\tau} &= \frac{\alpha}{2} \frac{R_2}{R_1^{1/2}} \cos \Psi_1 + R_2^{1/2} \cos \Psi_2 + 2\gamma_{20}R_1 + R_2, \\ \frac{d\Phi_2}{d\tau} &= \alpha R_1^{1/2} \cos \Psi_1 + \frac{1}{2} \frac{R_1}{R_2^{1/2}} \cos \Psi_2 + R_1 + 2\lambda_{02}R_2, \\ \frac{dR_1}{d\tau} &= R_1^{1/2} R_2^{1/2} (\alpha R_2^{1/2} \sin \Psi_1 + 2R_1^{1/2} \sin \Psi_2), \\ \frac{dR_2}{d\tau} &= R_1^{1/2} R_2^{1/2} (-2\alpha R_2^{1/2} \sin \Psi_1 + R_1^{1/2} \sin \Psi_2). \end{aligned}$$

Приравняв к нулю правые части, получим систему уравнений, определяющих положения равновесия модельной системы. Из анализа этой системы следует, что, кроме тривиального, она может иметь решения, для которых $\sin \Psi_1 = 0$ и $\sin \Psi_2 = 0$. Положим в первых двух уравнениях $\cos \Psi_j = \delta_j$ ($\delta_j = 1$ или -1 , $j = 1, 2$) и, вводя обозначения $u = R_1^{1/2}$, $v = R_2^{1/2}$ ($u \geq 0$, $v \geq 0$), приведем их к виду

$$f_1(u, v) = \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2}\right)v^2 + \delta_2 uv + 2\gamma_{20}u^3 = 0, \quad f_2(u, v) = \left(v + \frac{\delta_2}{2}\right)u^2 + \alpha\delta_1 uv + 2\gamma_{02}v^3 = 0. \quad (7)$$

Уравнения (7) являются квадратными относительно v и u . Найдем, при каких условиях они имеют вещественные положительные корни. Рассмотрим сначала первое уравнение (7). Дискриминант этого уравнения

$$D_1 = u^2 \left[1 - 8\gamma_{20}u \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) \right] = u^2 (1 - 4\alpha\delta_1\gamma_{20}u - 8\gamma_{20}u^2)$$

содержит квадратный трехчлен относительно u , имеющий, в свою очередь, дискриминант $16d_1$, где $d_1 = \gamma_{20}(\alpha^2\gamma_{20} + 2)$.

Используя формулы Виета для корней квадратного уравнения, найдем, что при выполнении условия

$$\gamma_{20} \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) < 0 \quad (8)$$

исследуемое уравнение имеет один положительный вещественный корень. Если справедливы неравенства

$$\gamma_{20} \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) > 0, \quad \delta_2 \left(u + \frac{\alpha\delta_1}{2} \right) < 0, \quad D_1 > 0, \quad (9)$$

то это уравнение имеет два положительных вещественных корня. В остальных случаях искомым корням нет.

Неравенство (8) удовлетворяется в следующих случаях:

- 1) $\gamma_{20} < 0, \delta_1 = 1, u$ любое положительное;
- 2) $\gamma_{20} < 0, \delta_1 = -1, u > \alpha/2$;
- 3) $\gamma_{20} > 0, \delta_1 = -1, 0 < u < \alpha/2$

Во всех этих случаях параметр α может принимать произвольные (положительные) значения.

Рассмотрим систему (9). Она эквивалентна совокупности двух систем:

$$\gamma_{20} > 0, \quad \delta_2 = -1, \quad u + \frac{\alpha\delta_1}{2} > 0, \quad D_1 > 0, \quad (10)$$

$$\gamma_{20} < 0, \quad \delta_2 = 1, \quad u + \frac{\alpha\delta_1}{2} < 0, \quad D_1 > 0. \quad (11)$$

При $\gamma_{20} > 0$ (случай (10)) имеем $d_1 > 0$. В этом случае квадратичный трехчлен в D_1 имеет два вещественных корня разных знаков ($u_1 < 0 < u_2$) и отрицательный старший коэффициент. При $\delta_1 = 1$ второе неравенство в (9) всегда выполняется, и тогда $u \in (0, u_2)$. При $\delta_1 = -1$ должны одновременно выполняться условия $u > \alpha/2$ и $D_1 > 0$, что приводит к интервалу $u \in (\alpha/2, u_2)$.

В случае (11) второе неравенство удовлетворяется, если $\delta_1 = -1$ и $u < \alpha/2$. Далее, если $\alpha^2 < 2/|\gamma_{20}|$, то $d_1 < 0$ и неравенство $D_1 > 0$ удовлетворяется при всех u . Если же $\alpha^2 > 2/|\gamma_{20}|$, то $d_1 > 0$, и квадратный трехчлен в D_1 (с положительным старшим коэффициентом) имеет два положительных вещественных корня ($0 < u_1 < u_2$). Величина $u = \alpha/2$ лежит в области положительности квадратного трехчлена в D_1 , правее его точки минимума $u = \alpha/4$. Поэтому система (12) удовлетворяется при $u \in (0, u_1) \cup (u_2, \alpha/2)$.

Объединяя результаты решения систем (8) и (9), найдем следующие четыре варианта, для которых первое уравнение (7) имеет два положительных вещественных корня

$$1) \quad \gamma_{20} > 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = 1, \quad u \in (0, u_2);$$

$$2) \quad \gamma_{20} > 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = -1, \quad u \in (\alpha/2, u_2);$$

$$3) \quad \gamma_{20} < 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad \alpha^2 < \alpha_1^2, \quad u \in (0, \alpha/2);$$

$$4) \quad \gamma_{20} < 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad \alpha^2 > \alpha_1^2, \quad u \in (0, u_1) \cup (u_2, \alpha/2).$$

Здесь введены обозначения $\alpha_1 = \sqrt{2/|\gamma_{20}|}$, $u_{1,2} = (-\alpha\delta_1\gamma_{20} \pm \sqrt{d_1})/(4\gamma_{20})$ ($u_1 < u_2$).

Аналогичным образом может быть проанализировано второе уравнение (7).

Это уравнение имеет один положительный вещественный корень в случаях

$$1) \quad \gamma_{02} > 0, \quad \delta_2 = -1, \quad v \in (0, 1/2);$$

$$2) \quad \gamma_{02} < 0, \quad \delta_2 = 1, \quad v \text{ любое положительное};$$

$$3) \quad \gamma_{02} < 0, \quad \delta_2 = -1, \quad v > 1/2,$$

и два положительных вещественных корня в случаях

$$1) \quad \gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = 1, \quad v \in (0, v_2);$$

$$2) \quad \gamma_{02} > 0, \quad \delta_1 = -1, \quad \delta_2 = -1, \quad v \in (1/2, v_2);$$

$$3) \quad \gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad \alpha^2 > \alpha_2^2, \quad v \in (0, 1/2);$$

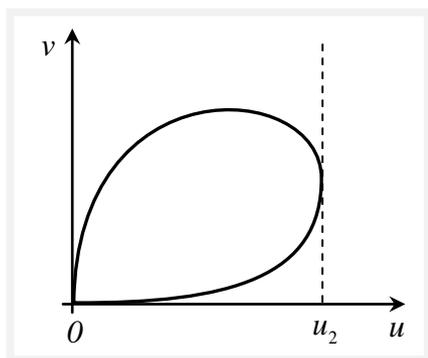
$$4) \quad \gamma_{02} < 0, \quad \delta_1 = 1, \quad \delta_2 = -1, \quad \alpha^2 < \alpha_2^2, \quad v \in (0, v_1) \cup (v_2, 1/2).$$

Здесь $\alpha_2 = \sqrt{|\gamma_{02}|/2}$, $v_{1,2} = (-\delta_2\gamma_{02} \pm \sqrt{d_2})/(4\gamma_{02})$ ($v_1 < v_2$), $d_2 = \gamma_{02}(\gamma_{02} + 2\alpha^2)$.

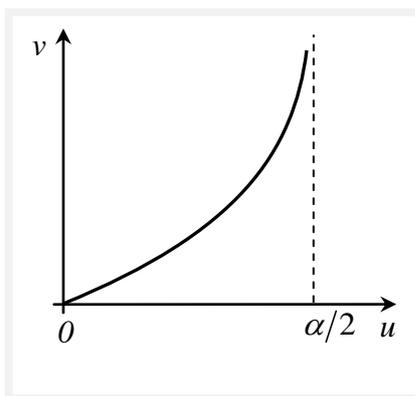
Полученные результаты удобно представить графически в плоскости переменных u, v ($u \geq 0, v \geq 0$). Заметим, что при малых u, v уравнение $f_1(u, v) = 0$ приближенно представляется в виде $f_1 \approx v(\delta_2 u + \alpha\delta_1/2) = 0$. Поэтому из начала координат выходит либо одна ветвь кривой $f_1(u, v) = 0$ с горизонтальной касательной, либо (при условии $\delta_1\delta_2 < 0$) одна ветвь, определяемая уравнением

$v = (2/\alpha)u + O(u^2)$, либо обе ветви. Для больших значений u и v получаем $f_1 \approx u(2\gamma_{20}u^2 + v^2) = 0$, следовательно, при условии $\gamma_{20} < 0$, имеется наклонная асимптота $v = \sqrt{2|\gamma_{20}|}u$. Кроме того, в случае $\delta_1 = -1$ у кривой $f_1(u, v) = 0$ есть вертикальная асимптота $u = \alpha/2$.

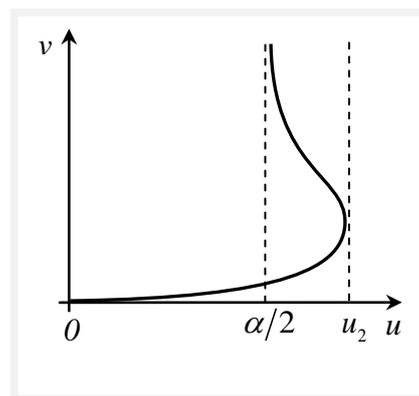
Различные варианты кривой $f_1(u, v) = 0$ представлены на рис.1 (а-з). Рис.1 а-в соответствуют случаю $\gamma_{20} > 0$ и $\delta_1 = -\delta_2 = 1$ (а), $\delta_1 = -\delta_2 = -1$ (б), $\delta_1 = \delta_2 = -1$ (в); рис.1 г-з отвечают случаю $\gamma_{20} < 0$ и $\delta_1 = \delta_2 = 1$ (г), $\delta_1 = -\delta_2 = 1$ (д), $\delta_1 = -\delta_2 = -1$, $\alpha < \alpha_1$ (е), $\delta_1 = -\delta_2 = -1$, $\alpha > \alpha_1$ (ж), $\delta_1 = \delta_2 = -1$ (з).



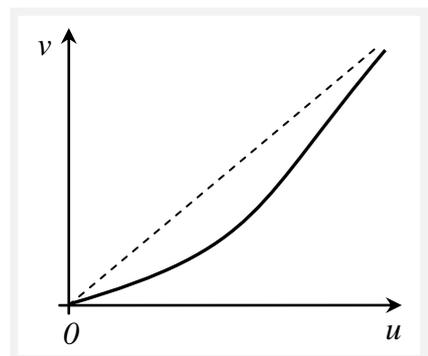
(а)



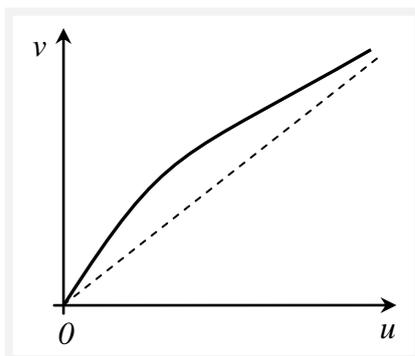
(б)



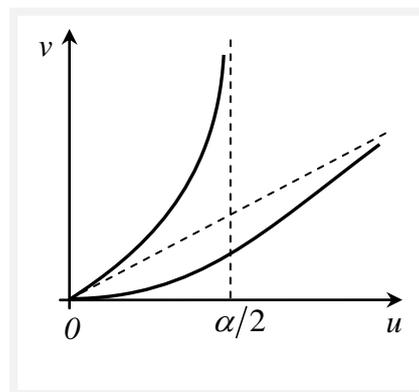
(в)



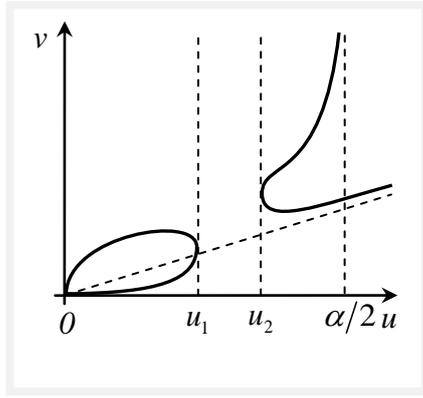
(г)



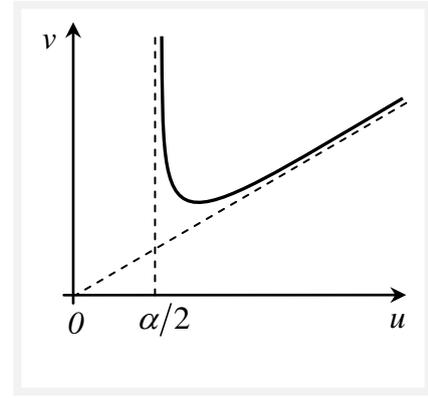
(д)



(е)



(ж)



(з)

Рис. 1. Вид кривой $f_1(u, v) = 0$ для различных значений параметров.

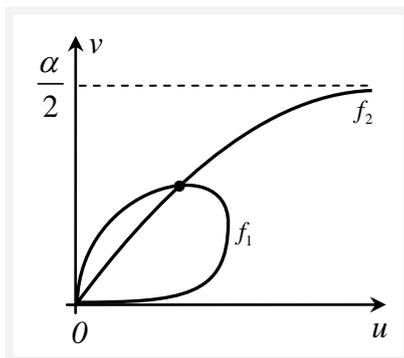
Аналогично, из начала координат выходит либо одна ветвь кривой $f_2(u, v) = 0$ с вертикальной касательной, либо (при $\delta_1 \delta_2 < 0$) одна ветвь $v = u/(2\alpha) + O(u^2)$, либо обе ветви. При $\gamma_{20} < 0$ кривая $f_2(u, v) = 0$ имеет наклонную асимптоту $v = u/\sqrt{2|\gamma_{02}|}$, а при $\delta_2 = -1$ — горизонтальную асимптоту $v = \alpha/2$. Качественный вид кривой $f_2(u, v) = 0$ такой же, как и на рис.1, только оси u и v нужно поменять местами.

Искомым положениям равновесия отвечают точки пересечения кривых $f_1(u, v) = 0$ и $f_2(u, v) = 0$. Число этих точек меняется при переходе через такие значения параметров $\alpha, \gamma_{20}, \gamma_{02}$, для которых рассматриваемые кривые имеют общие касательные, при этом $f_3(u, v) = f'_{1u}f'_{2v} - f'_{1v}f'_{2u} = 0$. Исключая из системы уравнений $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ величины u и v , найдем уравнение, связывающее бифуркационные значения параметров:

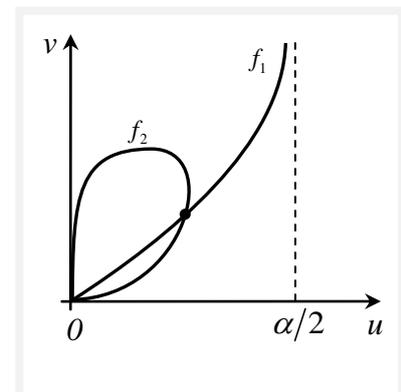
$$f = 128(32\kappa + 1)^2 s^2 + 2(154880\kappa^2 + 1544\kappa + 59)s + 8112\kappa^3 + 174296\kappa^2 - 4537\kappa - 4.$$

Здесь $\kappa = \gamma_{20}\gamma_{02}$, $s = (\gamma_{02} + \alpha^4\gamma_{20})/\alpha^2$.

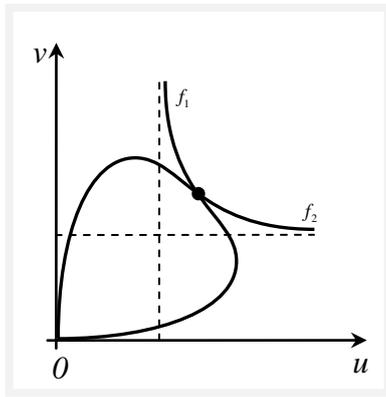
При $\kappa < 11/32$ ($\kappa \neq -1/32$) квадратное относительно s уравнение $f = 0$ имеет два вещественных корня, обозначим их через s_1 и s_2 ($s_1 > s_2$). Соотношения $s_j = (\gamma_{02} + \alpha^4 \gamma_{20}) / \alpha^2$ ($j=1,2$) определяют биквадратные уравнения относительно α . Обозначим их действительные положительные решения (в областях существования) через $\alpha_{j\pm}$ ($j=1,2$). Взаимное расположение величин $\alpha_{j\pm}$ и введенных ранее величин α_1 и α_2 меняется в точках $\kappa = \kappa', \kappa''$ ($\kappa' = (-5291 - 435\sqrt{145})/4096$, $\kappa'' = (-5291 + 435\sqrt{145})/4096$ ($\kappa'' > \kappa'$). При $\kappa = -1/32$ уравнение $f = 0$ имеет единственное решение $s = -7781/8192$, которому отвечает решение $\alpha = \alpha_0$, где $\alpha_0^2 = 0.0318337/\gamma_{20}$ ($\gamma_{20} > 0$) или $\alpha_0^2 = -0.9816628/\gamma_{20}$ ($\gamma_{20} < 0$).



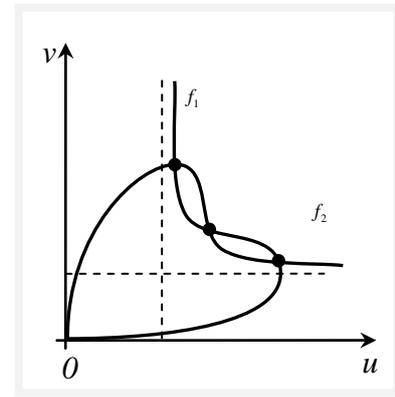
(а) (1,-1)



(б) (-1,1)



(в) $(-1, -1)$

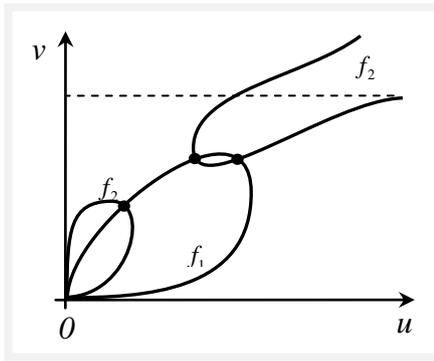


(г) $(-1, -1)$ $(0 < \kappa < 1/484)$

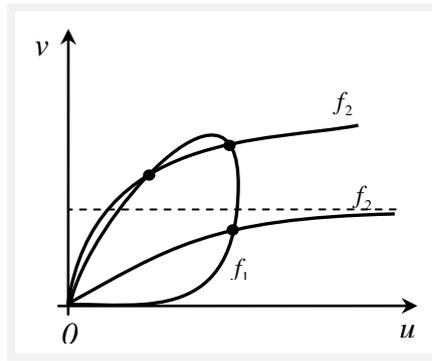
Рис. 2. Случай $\gamma_{20} > 0$, $\gamma_{02} > 0$.

На рис.2-5 представлены различные варианты взаимного расположения кривых $f_1(u, v) = 0$ и $f_2(u, v) = 0$; изображены только случаи, для которых кривые имеют точки пересечения. В круглых скобках под рисунками приведены пары чисел (δ_1, δ_2) , соответствующие рассматриваемому на рисунке случаю.

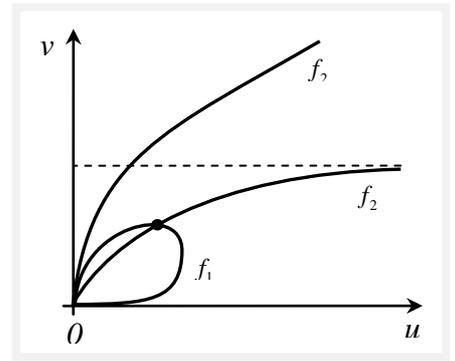
Рис.2,а-г относится к случаю $\gamma_{20} > 0$, $\gamma_{02} > 0$. Для вариантов, показанных на рис.2,а,б при всех $\kappa > 0$ и рис.2,в при $\kappa > 1/484$, параметр α может принимать произвольные значения. Если $0 < \kappa < 1/484$ и $\delta_1 = \delta_2 = -1$, то при $0 < \alpha < \alpha_{1-}$ или $\alpha > \alpha_{1+}$ вновь имеем рис.2,в, а при $\alpha_{1-} < \alpha < \alpha_{1+}$ — рис.2,г. В последнем случае модельная система имеет пять положений равновесия, в остальных случаях — три.



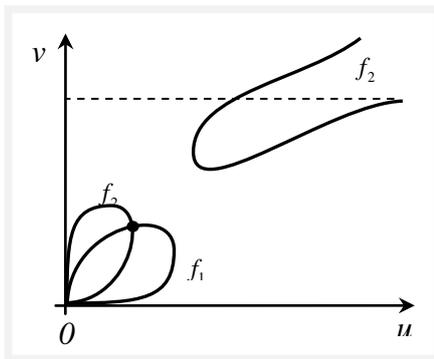
(а) (1,-1), $\alpha < \alpha_2$



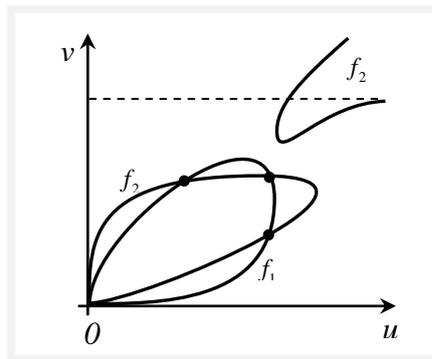
(б) (1,-1), $\alpha > \alpha_2$



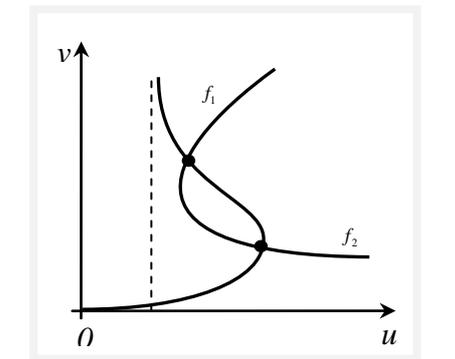
(в) (1,-1), $\alpha > \alpha_2$



(г) (1,-1), $\alpha < \alpha_2$



(д) (1,-1), $\alpha < \alpha_2$



(е) (-1,-1)

Рис. 3. Случай $\gamma_{20} > 0$, $\gamma_{02} < 0$.

При $\gamma_{20} > 0$, $\gamma_{02} < 0$ положения равновесия существуют в случаях $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -1$ и $\delta_1 = \delta_2 = -1$. Возможные варианты взаимного расположения кривых $f_1(u, v) = 0$ и $f_2(u, v) = 0$ показаны на рис. 3,а-е. Если $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ и $\kappa'' < \kappa < 0$, то случаям $0 < \alpha < \alpha_2$, $\alpha_2 < \alpha < \alpha_{2+}$ и $\alpha > \alpha_{2+}$ отвечают рис.3,а, 3,б и 3,в соответственно; при $\kappa' < \kappa < \kappa''$ в случаях $0 < \alpha < \alpha_{2+}$, $\alpha_{2+} < \alpha < \alpha_2$, $\alpha_2 < \alpha < \alpha_{1+}$ и $\alpha > \alpha_{1+}$ имеем рис.3,г, 3,д, 3,б и 3,в; при $\kappa < \kappa'$ и $0 < \alpha < \alpha_{2+}$, $\alpha_{2+} < \alpha < \alpha_{1+}$, $\alpha_{1+} < \alpha < \alpha_2$ и $\alpha > \alpha_2$ имеем рис.3,г, 3,д, 3,г и 3,в соответственно. Случаю $\kappa = -1/32$ отвечают рис.3,б и 3,в

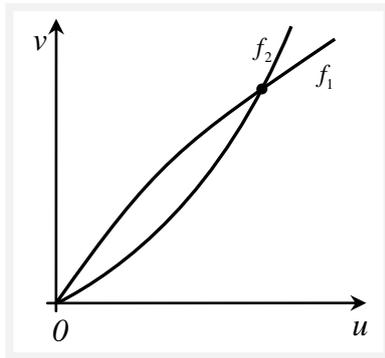
при $0 < \alpha < \alpha_0$ и $\alpha > \alpha_0$. Вариант $\delta_1 = \delta_2 = -1$ относится только к случаю $\kappa'' < \kappa < 0$ и $0 < \alpha < \alpha_{1+}$ (рис.3,е).

Объединяя результаты, найдем, что в случае $\kappa < \kappa''$ при $\alpha < \alpha_{2+}$ или $\alpha > \alpha_{1+}$ модельная система имеет одно, а при $\alpha_{2+} < \alpha < \alpha_{1+}$ — три положения равновесия (для $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$). Если $\kappa'' < \kappa < 0$, то при $0 < \alpha < \alpha_{2+}$ имеется пять положений равновесия (три для случая $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ и два — для $\delta_1 = \delta_2 = -1$), при $\alpha_{2+} < \alpha < \alpha_{1+}$ три положения равновесия (одно для $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ и два для $\delta_1 = \delta_2 = -1$), а при $\alpha > \alpha_{1+}$ одно положение равновесия (для $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$). В случае $\kappa = -1/32$ и $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1$ имеются три (при $0 < \alpha < \alpha_0$) или одно (при $\alpha > \alpha_0$) положения равновесия.

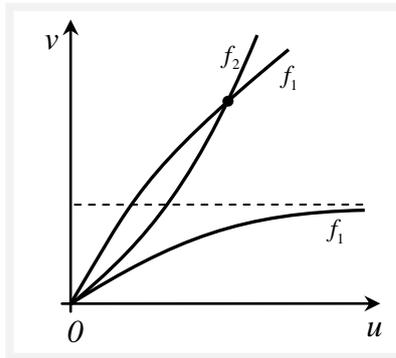
Совершенно аналогично рассматривается случай $\gamma_{20} < 0, \gamma_{02} > 0$. Не приводя соответствующие графические изображения, укажем, что в случае $\kappa < \kappa''$ при $\alpha < \alpha_{1-}$ или $\alpha > \alpha_{2-}$ модельная система имеет одно, а при $\alpha_{1-} < \alpha < \alpha_{2-}$ — три положения равновесия (для $\delta_1 = -1, \delta_2 = 1$). При $\kappa'' < \kappa < 0$ и $0 < \alpha < \alpha_{1-}, \alpha_{1-} < \alpha < \alpha_{2-}$ и $\alpha > \alpha_{2-}$ имеются соответственно одно, три и пять положений равновесия, а при $\kappa = -1/32$ — одно ($0 < \alpha < \alpha_0$) или три ($\alpha > \alpha_0$).

В случае $\gamma_{20} < 0, \gamma_{02} < 0$ возможен один из восьми вариантов взаимного расположения кривых $f_1(u, v) = 0$ и $f_2(u, v) = 0$ (рис.4,а-з). Анализируя результаты, получаем, что если выполнено условие $\kappa > 1/4$, то на интервале $\alpha < \alpha_2$ в модельной системе имеются четыре положения равновесия, а на интервале $\alpha > \alpha_2$ — три. Если

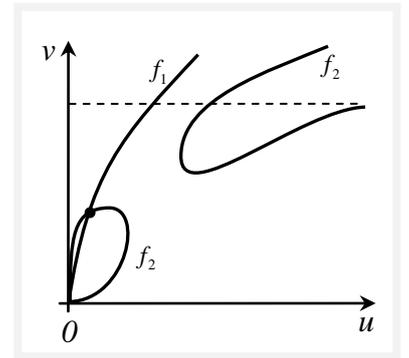
же $0 < \kappa < 1/4$, то при условиях $\alpha < \alpha_1$, $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ и $\alpha > \alpha_2$ имеются соответственно два, одно или три положения равновесия.



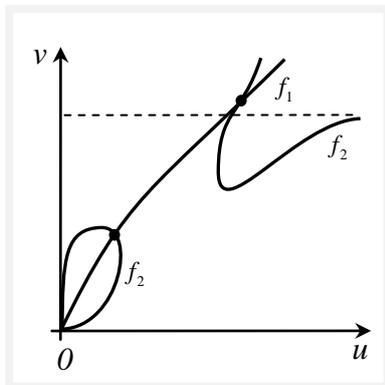
(а) (1,1), $\kappa > 1/4$



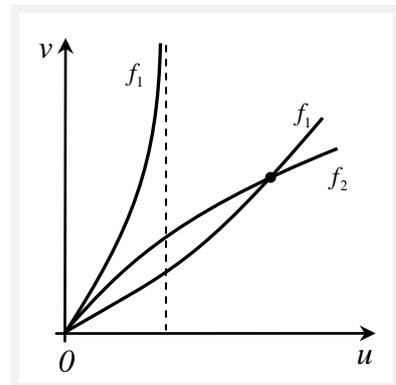
(б) (1,-1), $\kappa > 1/4$, $\alpha > \alpha_2$



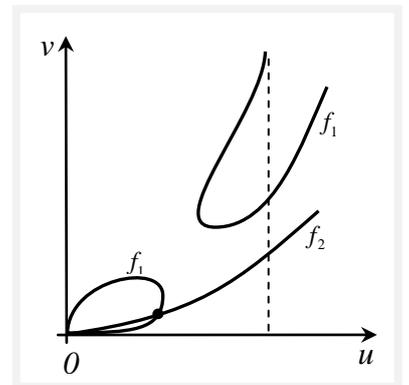
(в) (1,-1), $0 < \kappa < 1/4$, $\alpha < \alpha_2$



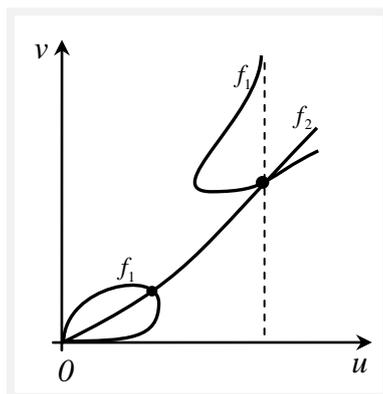
(г) (1,-1), $\kappa > 1/4$, $\alpha < \alpha_2$



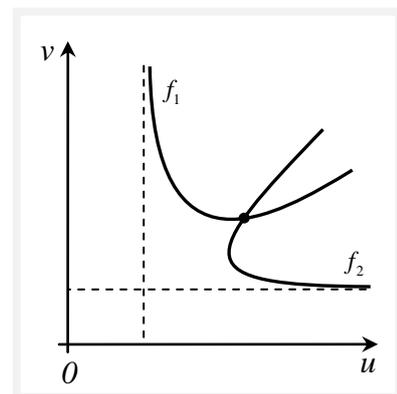
(д) (-1,1), $\kappa > 1/4$, $\alpha < \alpha_1$



(е) (-1,1), $\kappa > 1/4$, $\alpha > \alpha_1$



(ж) (-1,1), $0 < \kappa < 1/4$, $\alpha > \alpha_1$



(з) (-1,-1), $0 < \kappa < 1/4$

Рис. 4. Случай $\gamma_{20} < 0$, $\gamma_{02} < 0$.

3. Положения равновесия в модельной задаче о движении симметричного спутника в окрестности гиперболоидальной прецессии

Рассмотрим движение динамически симметричного спутника моделируемого твердым телом, относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле. Орбиту центра масс спутника предполагаем слабоэллиптической с эксцентриситетом e ($0 < e \ll 1$).

Введем орбитальную систему координат $OXYZ$, оси OX , OY и OZ которой направлены соответственно по трансверсали, по нормали к плоскости орбиты и вдоль радиус-вектора центра масс O тела относительно притягивающего центра. Введем также жестко связанную с телом систему координат $Oxyz$ с осями, совпадающими с главными центральными осями инерции спутника; ее ориентацию в системе $OXYZ$ зададим при помощи углов Эйлера ψ , θ , φ . В рассматриваемой задаче координата φ циклическая, и существует первый интеграл $r = r_0 = \text{const}$, где r — проекция вектора угловой скорости тела в орбитальной системе координат на ось его динамической симметрии.

В предельном случае круговой орбиты центра масс ($e = 0$) имеется [20] частное решение

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \psi_0 = -\alpha\beta, \quad p_\theta = \sin \psi_0, \quad p_\psi = 0 \quad (12)$$

системы канонических уравнений Гамильтона, описывающих движение спутника относительно центра масс. Здесь p_θ , p_ψ — импульсы, сопряженные с координатами θ и ψ и обезразмеренные при помощи множителя $A\omega_0$, ω_0 — среднее движение

центра масс тела по орбите; $\alpha = C/A$ ($0 \leq \alpha \leq 2$), $\beta = r_0/\omega_0$ — безразмерные параметры, A и C — осевой и экваториальный моменты инерции спутника.

Решение (12) существует при условии $|\alpha\beta| \leq 1$ и соответствует такому движению тела (называемому гиперболоидальной прецессией), для которого ось его динамической симметрии расположена перпендикулярно радиус-вектору центра масс и составляет угол $\pi - \psi_0$ с нормалью к плоскости орбиты.

Задача об устойчивости гиперболоидальной прецессии исследована в работах [20-22]. Область ее устойчивости в линейном приближении задается неравенствами $1 < \alpha < 2$ и $0 < \psi_0 < \pi/2$, а частоты ω_1, ω_2 ($\omega_1 \geq \omega_2$) малых линейных колебаний приведенной системы с двумя степенями свободы являются корнями уравнения

$$\omega^4 - (3\alpha - 2)\omega^2 + 3(\alpha - 1)\sin^2 \psi_0 = 0. \quad (13)$$

Уравнение частот (13) имеет при $\alpha = \alpha_* = 6/5$ и $\psi_0 = \psi_{0*} = \arcsin(4\sqrt{15}/25)$ решение $\omega_1 = 6/5$, $\omega_2 = 2/5$, удовлетворяющее двум соотношениям резонанса третьего порядка вида $\omega_1 + 2\omega_2 = 2$, $2\omega_1 - \omega_2 = 2$.

Рассмотрим движения спутника на слабоэллиптической орбите в окрестности его гиперболоидальной прецессии на круговой орбите для указанных резонансных значений параметров. В статье [23] показано, что в случае $0 < e \ll 1$ при любых значениях параметров α и ψ_0 из области устойчивости решение (12) переходит в 2π -периодическое по ν (ν — истинная аномалия) решение $\tilde{\theta}(\nu)$, $\tilde{\psi}(\nu)$, $\tilde{p}_\theta(\nu)$, $\tilde{p}_\psi(\nu)$, которое может быть представлено рядами по

степеням e [11]. Для малой окрестности $\alpha = \alpha_* + e^2 \alpha_1$, $\psi_0 = \psi_{0*} + e^2 \psi_{01}$ резонансной точки эти ряды таковы (слагаемые с α_1 и ψ_{01} имеют порядок по e не меньше, чем третий):

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}(\nu) &= \frac{\pi}{2} + \frac{10575\sqrt{15}}{39424} e^2 \sin(2\nu) + O(e^3), \\ \tilde{\psi}(\nu) &= \psi_{0*} - \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{77}} e \cos \nu + \frac{\sqrt{3}}{1024\sqrt{77}} e^2 (3673 \cos(2\nu) - 4096) + O(e^3), \\ \tilde{p}_\theta(\nu) &= \sin \psi_0 + \frac{37\sqrt{15}}{1971200} e^2 (18125 \cos(2\nu) - 26624) + O(e^3), \\ \tilde{p}_\psi(\nu) &= \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{77}} e \sin \nu + \frac{423\sqrt{3}}{512\sqrt{77}} e^2 \sin(2\nu) + O(e^3).\end{aligned}$$

Расчеты показывают, что для выписанного решения резонансные значения

$$\lambda_1 = 6/5, \quad \lambda_2 = 2/5 \quad \text{реализуются для значений} \quad \alpha_1 = -\frac{128473}{255255}, \quad \psi_{01} = -\frac{82274957\sqrt{385}}{707566860},$$

а нормализованный до членов четвертой степени включительно относительно возмущений гамильтониан возмущенного движения приводится к виду (1.7), в котором следует положить

$$\alpha = \frac{5544098698}{183538366011} \sqrt{77}, \quad \gamma_{02} = -\frac{5641}{2708}, \quad \gamma_{20} = -\frac{3479}{8124}, \quad \delta = -\frac{14\sqrt{77}}{677}.$$

Отбросим на первом этапе исследования слагаемое, соответствующее резонансу четвертого порядка. Учитывая теоретические результаты, полученные в разд.2, заключаем, что для данного набора параметров модельная система имеет три положения равновесия, удовлетворяющие условиям (см. рис.5а,б,е соответственно).

1. $P_1 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = 1, R_1 = 1.341089436, R_2 = 0.652672425\}$,
2. $P_2 = \{\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, R_1 = 0.25022341, R_2 = 0.1602438\}$,
3. $P_3 = \{\delta_1 = -1, \delta_2 = 1, R_1 = 0.00102888, R_2 = 0.0000191907\}$.

Рассмотрим вопрос об устойчивости (в линейном приближении) найденных положений равновесия. Введем возмущения $\Phi_j = \Phi_{j0} + x_j$, $R_j = R_{j0} + y_j$ ($j=1, 2$) переменных модельной системы относительно их равновесных значений. Характеристическое уравнение соответствующих линеаризованных уравнений возмущенного движения представляется в виде $\lambda^4 + a\lambda^2 + b = 0$. Коэффициенты характеристического уравнения и корни этого уравнения соответственно равны:

1. $a = 13.18987578, b = 8.79845627, \lambda_{1,2} = \pm 0.83947184 i, \lambda_{3,4} = \pm 3.53343498 i$
2. $a = 0.40637444, b = -0.09649832, \lambda_{1,2} = \pm 0.40988365, \lambda_{3,4} = \pm 0.075787799 i$
3. $a = -0.00091687, b = -6.14555252 \cdot 10^{-9}, \lambda_{1,2} = \pm 0.03038958, \lambda_{3,4} = \pm 0.00257962 i$

Отсюда следует, что для положения равновесия P_1 корни характеристического уравнения чисто мнимые, и имеет место устойчивость в линейном приближении. У характеристических уравнений, отвечающих положениям равновесия P_2 и P_3 , имеются корни с положительными вещественными частями, и эти равновесия неустойчивы, причем не только в линейной, но и в полной нелинейной задаче.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований (проект № 17-01-00123).*

Библиографический список

1. Куницын А.Л. Об устойчивости в критическом случае чисто мнимых корней при внутреннем резонансе // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. № 9. С. 1704 - 1706.
2. Хазина Г.Г. Некоторые вопросы устойчивости при наличии резонансов // Прикладная математика и механика. 1974. Т. 3. № 1. С. 56 - 65.
3. Куницын А.Л., Медведев С.В. Об устойчивости при наличии нескольких резонансов // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41. № 3. С. 422 - 429.
4. Куницын А.Л., Ташимов Л.Т. Некоторые задачи устойчивости нелинейных резонансных систем. - Алма-Ата: Гылым, 1990. - 196 с.
5. Хазин Л.Г. Об устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем дифференциальных уравнений (Взаимодействие резонансов третьего порядка). - М.: Ин-т прикладной математики АН СССР. Препринт № 133, 1981. - 20 с.
6. Хазин Л.Г. Взаимодействие резонансов третьего порядка в задачах устойчивости гамильтоновых систем // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. № 3. С. 494 - 498.
7. Маркеев А.П. О кратном резонансе в линейных системах Гамильтона // Доклады Академии Наук. 2005. Т. 402. № 3. С. 339 - 343.
8. Маркеев А.П. О кратном параметрическом резонансе в системах Гамильтона // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. № 2. С. 200 - 220.
9. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центр масс. - М. - Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2009. - 396 с.

10. Маркеев А.П. Об одном особом случае параметрического резонанса в задачах небесной механики // Письма в астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 5. С. 388 - 394.
11. Маркеев А.П. Кратный резонанс в одной задаче об устойчивости движения спутника относительно центра масс // Письма в астрономический журнал. 2005. Т. 31. № 9. С. 701 - 708.
12. Холостова О.В. О движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при наличии кратных резонансов третьего порядка // Нелинейная динамика. 2012. Т. 8. № 2. С. 267 - 288.
13. Холостова О.В. О взаимодействии резонансов третьего и четвертого порядков в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2015. Т. 11. № 4. С. 671 - 683.
14. Kholostova O. Stability of triangular libration points in a planar restricted elliptic three body problem in cases of double resonances // International Journal of Non-Linear Mechanics, 2015, vol. 73, pp. 64 - 68.
15. Холостова О.В. Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. - М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. - 308 с.
16. Холостова О.В. Исследование формальной устойчивости неавтономных гамильтоновых систем в случаях кратных резонансов четвертого порядка // Аналитическая механика, устойчивость и управление // Труды XI Международной Четаевской конференции (Казань, 13 – 17 июня 2017). - Казань: Изд-во КНИТУ-КАИ, 2017. Т. 2. С. 222 - 229.

17. Сафонов А.И., Холостова О.В. О периодических движениях гамильтоновой системы в окрестности неустойчивого равновесия в случае двойного резонанса третьего порядка // Вестник Удмуртского университета. 2016. Т. 26. № 3. С. 418 - 438.
18. Бардин Б.С. Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=65212>
19. Бардин Б.С. Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=72568>
20. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд-во МГУ, 1975. - 308 с.
21. Дубошин Г.Н. О вращательном движении искусственных небесных тел // Бюллетень ИТА АН СССР. 1960. № 7. С. 511 - 520.
22. Черноусько Ф.Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 28. № 1. С. 155 - 157.
23. Сарычев В.А. Асимптотически устойчивые стационарные вращения спутника // Космические исследования. 1965. Т. 3. № 5. С. 667 - 673.