

УДК: 537.86

Цепочки полей электромагнетизма

Р. И. Храпко

Аннотация

Последовательное использование внешних дифференциальных форм в электромагнетизме показывает, что поля электромагнетизма представляются геометрическими величинами двух различных типов: дифференциальными формами и контравариантными (антисимметричными) тензорными плотностями. Соответственно, электромагнитные поля изображаются силовыми трубками или семейством бипервешностей. Эти величины связаны между собой специфической операцией, названной сопряжением, которая является частью операции Ходжа. Сопряжение делает возможным многократное дифференцирование полей и таким образом приводит к цепочкам полей. Оператор Лапласа выражен в терминах сопряжения и изучено его воздействие на отдельные цепочки. Подробно и наглядно рассмотрены цепочки полей, связанные с электрическим и магнитным диполями. Разложение Гельмгольца представляет собой разложение поля на замкнутую и незамкнутую после сопряжения части. Широко используется понятие границы поля. Найдено некоторое достаточное условие гармоничности поля.

Ключевые слова:

дифференциальные формы; разложение Гельмгольца; операция Ходжа; оператор Лапласа

1. Введение. Разложение Гельмгольца

При преподавании курса электромагнетизма естественно используется идея о том, что источником безвихревого (продольного) электрического поля являются электрические заряды. Это иллюстрируется тем, что силовые линии (правильнее, силовые трубки) этого поля исходят из зарядов, как на рис. 1, взятом из [1], или на

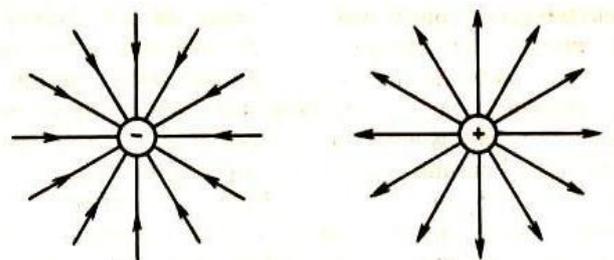


Рис. 1

Безвихревое векторное поле.
Силовые линии исходят из зарядов.

рис. 4. Мы обращаем внимание на то, что, таким образом, заряды оказываются границей силовых трубок этого поля [2]. Мы говорим, что плотность электрических зарядов ρ является *границей* безвихревого электрического поля и что это поле является *наполнением* этой границы. Переход от поля к его границе осуществляется дифференциальной операцией, в данном случае дивергенцией:

$$\rho / \varepsilon_0 = \operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \partial_i E^i. \quad (1.1)$$

Мы показываем, что такая же ситуация складывается в отношении всех других пар полей: $-\dot{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \mathbf{E}$, $-\mathbf{E} = \operatorname{grad} \varphi$, $-\dot{\rho} = \operatorname{div} \mathbf{j}$, $\mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$. Именно, геометрическое многообразие, изображающее некоторое поле, имеет своей границей многообразие, изображающее источник этого поля. В то же время само это поле рассматривается как наполнение его границы. Соотношение $-\mathbf{E} = \operatorname{grad} \varphi$ изображено на рис.6. Соотношение $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ изображено на рис. 7а. При этом математически переход от поля к его границе всегда осуществляется подходящей дифференциальной операцией первого порядка.

Существуют, однако, поля, граница которых равна нулю. Наиболее простой пример это соленоидальное (поперечное) электрическое поле, для которого $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Оно изображено на рис. 2, взятом из [3] вместе с текстом. Силовые линии (силовые трубки) этого поля не имеют концов. Мы называем это поле *замкнутым* и показываем, что такая же ситуация складывается для всех других полей, граница которых равна нулю, т.е. для полей, удовлетворяющих, например, $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{B} = 0$. Именно, геометрические многообразия, изображающие такие поля, замкнуты.

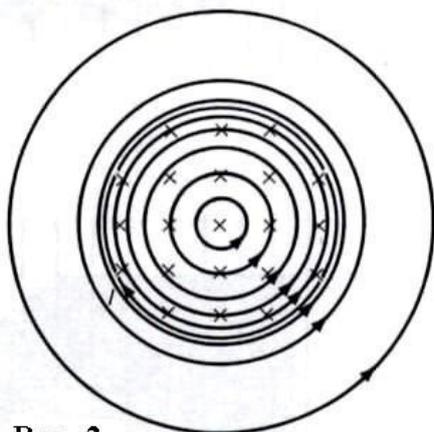


Рис. 2.

Fig. 32.22 Electric field lines (black) within solenoid and outside of solenoid.

Соленоидальное электрическое поле, порожденное переменным магнитным полем.

Силовые линии образуют замкнутые петли, они не имеют концов.

Известное разложение Гельмгольца [4,5] заключается как раз в том, что некоторое поле, например, электрическое векторное поле \mathbf{E} , представляется суммой двух векторных полей, безвихревого поля, которое мы обозначаем \mathbf{E}_{\times} , и соленоидального поля, которое мы обозначаем \mathbf{E}_{\circ} :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\times} + \mathbf{E}_{\circ}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\times} \equiv \nabla \times \mathbf{E}_{\times} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_{\circ} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E}_{\circ} = 0. \quad (1.2)$$

Безвихревое электрическое поле обычно обозначают \mathbf{E}_{\perp} [4] или \mathbf{E}_{\parallel} , однако главной чертой этого поля является то, что его силовые линии выходят из зарядов как показано на рис 1. Чтобы подчеркнуть это

свойство, мы используем крестик \times для обозначения первого слагаемого в формуле (1.2).

Соленоидальное электрическое векторное поле обычно обозначают E_t [4] или E_{\perp} , однако главной чертой этого поля является замкнутость его силовых линий (рис 2). Поэтому мы выбрали кружок \circ для обозначения второго слагаемого разложения Гельмгольца (1.2).

2. Дифференциальные формы, тензорные плотности, граница, etc

Важно осознавать, что электромагнитные поля на самом деле описываются геометрическими величинами двух различных типов [5-7].

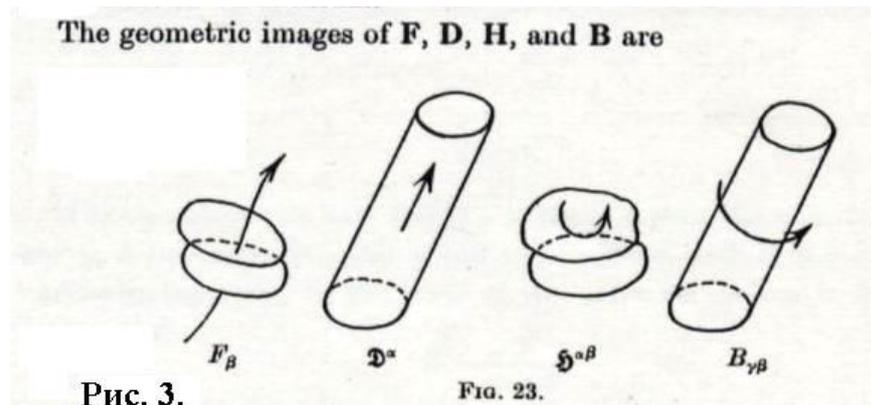


Рис. 3.

Fig. 23.

На этом рисунке показана разница между дифференциальными формами и контравариантными тензорными плотностями.

Мы обозначаем $F \rightarrow E_i$, $D \rightarrow E^i$, $H \rightarrow B^{ij}$, $B \rightarrow B_{ij}$

Во-первых, это контравариантные (антисимметричные) тензорные плотности:

$B^k_{\wedge}, j^i_{\wedge}, E^i_{\wedge}, \rho_{\wedge}$. В число таких полей входит рассмотренное выше «векторное поле E », которое в действительность является векторной плотностью.

Во-вторых, это ковариантные (антисимметричные) тензоры, в частности, скалярные функции и ковектора, именно, $\varphi, E_i, A_i, B_{ij}$, которые называются внешними дифференциальными формами (кратко, формами).

Разница между формами и тензорными плотностями известна давно (см. рис. 3), взятый из [6] вместе с текстом. Классическая монография [6,7] выросла из лекций, которые профессор Схоутен читал на эту тему перед войной. В частности, поле векторной плотности должно изображаться не силовыми линиями, как на рис. 1, а силовыми трубками (рис. 4), а ковариантное векторное поле (ковекторное поле) должно изображаться семейством двойных поверхностей (биповерхностями). Сходная интерпретация ковектора представлена в [8] (рис. 5). Заметьте, что величина ковектора пропорциональна плотности листов, то есть обратно

пропорциональна толщине. Так же величина векторной плотности обратно пропорциональна площади поперечного сечения трубок.

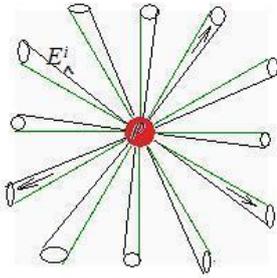


Рис. 4. Плотность заряда является границей силовых трубок векторной плотности E^i_{\wedge} . Трубки имеют внутреннюю ориентацию

Now consider a covector. This should be familiar to most students in terms of a gradient. We can picture a gradient best in terms of the equipotential surfaces to which it refers, and this is the basis of the pictorial representation. That is, draw the surfaces themselves, along with some sense of direction, which might be indicated by a wavy line with an arrow at the end, or with a whorl on one of the sheets:

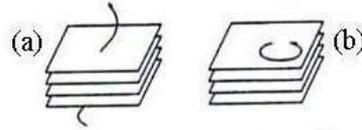


Рис. 5.

- (a) Ковектор. Он имеет внешнюю ориентацию.
- (b) Бивекторная плотность. Внутренняя ориентация.

К сожалению, разница между формами и тензорными плотностями игнорируется большинством физиков. Эта разница теряется при написании векторов полужирным шрифтом. Мы используем тензорные индексы, потому что они несут необходимую информацию. Кроме того, для написания тензорных *плотностей* мы не используем обычный для этого готический шрифт (как на рис3). Вместо этого мы отмечаем плотности знаком ‘wedge’ \wedge . Его использовал И.А. Кунин [7] при замечательном переводе на русский язык монографии [6]. Однако, в отличие от [7], мы ставим знак \wedge на уровне нижних или верхних индексов для плотностей веса $+1$ или -1 соответственно. Например, элемент объема, который является плотностью веса -1 , обозначается dV^{\wedge} . Мы отмечаем псевдо тензоры звездочкой, а псевдо плотности знаком тильда, \sim : E_{ij}^* , B_i^* , ε_{ijk}^{\sim} (ε_{ijk}^{\sim} - символ Леви-Чивита).

В электродинамике используется внешняя производная дифференциальных форм [9-11]. Внешняя производная скаляра является обычной частной производной, т.е. градиентом,

$$E_i = \partial_i \phi \Leftrightarrow \mathbf{E} = \text{grad } \phi = \nabla \cdot \phi \quad (2.1)$$

(мы не пишем минус в этой формуле, соответственно, $\rho = \nabla^2 \phi$). Однако в общем случае внешняя производная предполагает антисимметризацию по индексам. Внешняя производная ковектора является ротором, например,

$$B_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{или} \quad \dot{B}_{ij} = -2\partial_{[i} E_{j]} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{B}} = -\text{rot } \mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (2.2)$$

где $\partial_{[i} A_{j]} = \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$. Внешняя производная ковариантного тензора валентности 2 является дивергенцией,

$$3\partial_{[k} B_{ij]} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

где $\partial_{[k} B_{ij]} = \frac{1}{3!}(\partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki} - \partial_k B_{ji} - \partial_i B_{kj} - \partial_j B_{ik}) = \frac{1}{3}(\partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki})$.

При дифференцировании контравариантных тензорных плотностей в электродинамике предполагается свертка с последним контравариантным индексом. Такая производная векторной плотности является дивергенцией:

$$\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\wedge}^i \Leftrightarrow \rho = \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (2.4)$$

производная бивекторной плотности является ротором

$$j_{\wedge}^i = \partial_k B_{\wedge}^{ik} \Leftrightarrow \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad \text{или} \quad E_{\circ\wedge}^i = \partial_j \Pi_{\wedge}^{ij} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}. \quad (2.5)$$

Производная скалярной плотности есть ноль,

$$\partial_i \rho_{\wedge} \equiv 0 \Leftrightarrow \operatorname{grad} \rho_{\wedge} \equiv 0, \quad (2.6)$$

потому что ρ_{\wedge} не имеет контравариантных индексов для свертки. Производная (2.6) аналогична внешней производной N -формы, где N есть размерность пространства.

Мы подчеркиваем, что все представленные здесь дифференциальные операции являются ковариантными операциями в том смысле, что их запись не зависит от того, евклидовы или криволинейные координаты использованы, и все частные производные являются ковариантными без использования символов Кристоффеля: $\partial_k B_{\wedge}^{ik} = \nabla_k B_{\wedge}^{ik}$, $\partial_{[i} A_{j]} = \nabla_{[i} A_{j]}$.

Обычно мы обозначаем производные обоих типов символом ∂ без индексов и называем производное поле *границей*, а дифференцируемое поле называем *наполнением* этой границы. Это выглядит так: (граница) = ∂ (наполнение). Например,

$$\rho_{\wedge} = \partial E_{\wedge}^i, \quad E_i = \partial \phi, \quad B_{ij} = \partial A_j, \quad E_{\circ\wedge}^i = \partial \Pi_{\wedge}^{ij}, \quad j_{\wedge}^i = \partial B_{\wedge}^{ik}, \quad \partial B_{ij} = 0. \quad (2.7)$$

Термин «граница» оправдан, потому что, например, зарядовая плотность ρ_{\wedge} ограничивает силовые трубки плотности электрического поля E_{\wedge}^i в соответствии с $\rho_{\wedge} = \partial E_{\wedge}^i$ (рис. 4).

Двойные поверхности поля E_i ограничивают поле электрического потенциала ϕ в соответствии с $E_i = \partial \phi$ (рис. 6). Трубки магнитного поля B_{ij} ограничивают биповерхности ковекторного поля магнитного потенциала A_j в соответствии с $B_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]}$. Причем внешняя ориентация биповерхностей A_j соответствует внешней ориентации трубок B_{ij} (рис. 7а). Трубки электрической векторной плотности $E_{\circ\wedge}^i$ с внутренней ориентацией ограничивают биповерхности (би)векторного электрического потенциала Π_{\wedge}^{ij} в соответствии

с $E_{\Lambda}^i = \partial_j \Pi_{\Lambda}^{ij}$ (рис. 7б). Так же трубки векторной плотности тока j_{Λ}^i с внутренней ориентацией ограничивают бипервности магнитного поля B_{Λ}^{ij} в соответствии с $j_{\Lambda}^i = \partial_j B_{\Lambda}^{ij}$.

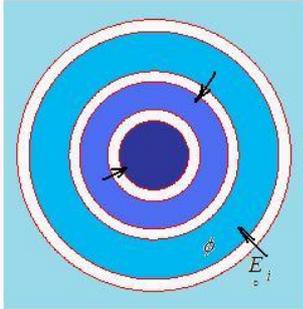


Рис. 6. Замкнутое ковекторное поле E_i является границей для скалярного поля ϕ . Плотность заливки пропорциональна величине поля ϕ . Поле E_i имеет внешнюю ориентацию

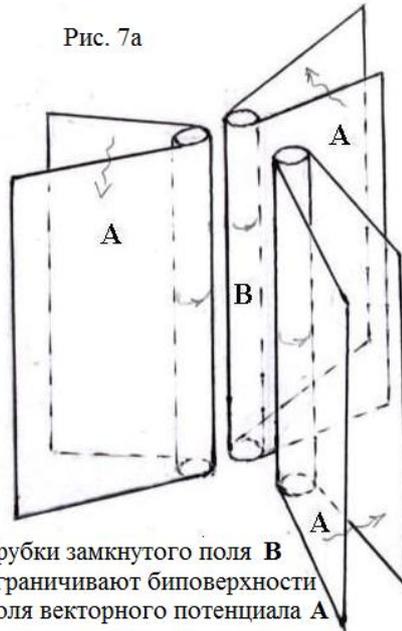


Рис. 7а
Трубки замкнутого поля B ограничивают бипервности поля векторного потенциала A

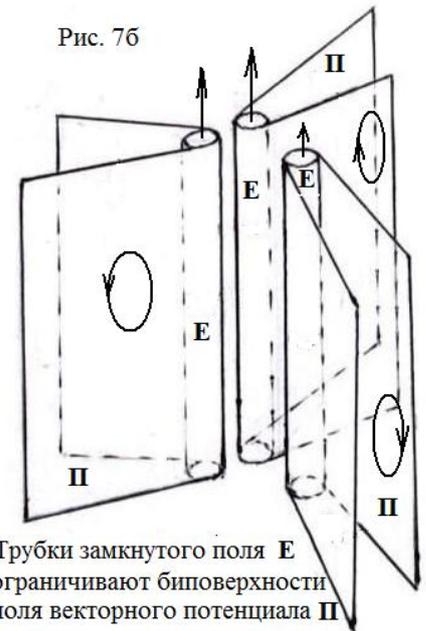


Рис. 7б
Трубки замкнутого поля E ограничивают бипервности поля векторного потенциала Π

С другой стороны, символ ∂ означает «граница» в теории множеств. И это как раз то значение, которое имеет наш символ ∂ .

Однако, для того, чтобы что-то ограничивать, граница должна быть замкнута. Так оно и есть. Двукратное дифференцирование дает ноль, $\partial\partial = 0$. Например, если $E_i = \partial_i \phi$, то $\partial_{[k} E_{i]} = \partial_{[ki]}^2 \phi = 0$. Так что граница границы равна нулю. Если граница некоторого поля равна нулю, мы говорим, что поле замкнуто. Например, поле E_i в формуле (2.1) и поле B_{ij} замкнуты. Соответственно, бипервности поля E_i на рис. 6 и трубки поля B_{ij} на рис. 7а не имеют концов. Трубки поля B_{ij} могли бы оканчиваться на магнитных монополях, но таких нет в природе. Пример замкнутого электрического векторного поля E_{Λ}^i , $\partial_i E_{\Lambda}^i = 0$, представлен на рис. 7б и рис. 2 (там должны быть изображены трубки, а не силовые линии).

Граница не имеет границы, но граница имеет *наполнение* в силу теоремы Пуанкаре (в пространстве без топологических осложнений). В случае $E_i = \partial_i \phi$, E_i является границей, а ϕ есть ее наполнение. Наполнение этой границы функцией ϕ наглядно показано на рис. 6. Точно так же можно сказать, что бипервности поля A_i на рис. 7а наполняют пространство, вокруг замкнутых (бесконечно длинных) трубок поля B_{ij} , которые являются их границей,

$B_{ij} = \partial A_j$, а биповерхности (би)векторного электрического потенциала Π_{\wedge}^{ij} наполняют пространство вокруг трубок поля E_{\wedge}^i , $E_{\wedge}^i = \partial_j \Pi_{\wedge}^{ij}$. Отношение между E_{\wedge}^i и Π_{\wedge}^{ij} изображены на рисунке 7б, который отличается от рис. 7а заменой внешней ориентации на внутреннюю.

Таким образом, символ ∂ выражает отношение между границей и ее наполнением, т.е. ∂ является оператором границы. Отметим, что граница некоторого поля однозначна, в то время как наполнение границы не однозначно, если к наполнению можно добавить замкнутое поле. Это происходит без изменения границы. Тем не менее, различные наполнения некоторой границы не все эквивалентны между собой. Имеются *истинные* наполнения (или класс истинных наполнений), которые выделяются с помощью операции *сопряжения*, рассматриваемой в следующем разделе.

Когда наш символ ∂ применяется к форме, он означает внешнее дифференцирование, вместо стандартного обозначения d [9-11]. Например, ∂B_{ij} означает внешнее произведение

форм $d^1 \wedge B^2$, то есть $\partial B_{ij} = \partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki}$ (2.3). Мы убеждены, что стандартное

использование символа d для обозначения внешнего дифференцирования сугубо антипедагогично. Символ d применяется в физике и математике для обозначения инфинитезимальной величины. Например, $dq = \rho(x)dV$ обозначает инфинитезимальный заряд инфинитезимального объема dV . Другой пример: $\mathbf{r} + \mathbf{v}dt = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, где \mathbf{v} есть скорость, а $d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$ есть инфинитезимальное приращение радиус-вектора \mathbf{r} за время dt , и dx, dy, dz суть инфинитезимальные приращения координат его конца. Также пишут $df(x) = f'(x)dx$, и можно записать $d(df) = d^2 f = f''(dx)^2$ или даже $d^2 f = f''(dx)^2 + f' d^2 x$.

Вопреки этому, в теории дифференциальных форм d используется как оператор, который каждой p -форме ω ставит в соответствие $(p+1)$ -форму $d\omega$, и $d(d\omega) = 0$ всегда [9-11]. Соответственно, выражения dx, dy, dz суть безиндексные обозначения координатных 1-форм, т.е. координатных ковекторов, а не компонентов инфинитезимального вектора $d\mathbf{r}$, т.е. dx, dy, dz означают: $dx = \partial_i x = \delta_i^1$, $dy = \partial_i y = \delta_i^2$, $dz = \partial_i z = \delta_i^3$, где δ_i^j есть символ Кронекера.

Такая путаница недопустима. Возможно, двусмысленность обозначения d объясняется тем, что область применения теории дифференциальных форм не пересекалась с областью применения обычной физики и математики. Однако, сейчас мы рассматриваем

электромагнитные поля как дифференциальные формы. Поэтому двусмысленность символа d должна быть устранена.

3. Сопряжение, etc.

Поднимание и опускание тензорных индексов обычно выполняется метрическим тензором g^{ik} или g_{ik} . Однако в электромагнетизме этот процесс сопровождается переходом между дифференциальной формой и контравариантной плотностью, например, между ковектором E_i и векторной плотностью E_{\wedge}^i , как показано на рис. 8. Поэтому в этот процесс включен корень из детерминанта метрического тензора, $\sqrt{g_{\wedge}}$, который является скалярной плотностью веса +1. Так что, вместо g^{ik} или g_{ik} , в электромагнетизме используется тензорная плотность $g_{\wedge}^{ik} = g^{ik} \sqrt{g_{\wedge}}$ или $g_{\wedge}^{ik} = g_{ik} / \sqrt{g_{\wedge}}$. Если применяются декартовы координаты, то абсолютное значение детерминанта равно единице, однако корень из детерминанта имеет вполне определенное геометрическое значение. Процесс поднятия или опускания тензорных индексов изменяет геометрический смысл поля. Этот процесс в электродинамике мы называем *сопряжением* [12,13] и обозначаем пяти-лучевой звездочкой $*$ (в отличие от оператора Ходжа $*$ [11,14]). Например,

$$*E_i = g_{\wedge}^{ik} E_i = E_{\wedge}^k, \quad *E_{\wedge}^k = g_{\wedge}^{ik} E_{\wedge}^k = E_i, \quad *B_{\wedge}^{mn} = g_{mi} g_{nj} g_{\wedge}^{ij} B_{\wedge}^{mn} = B_{ij}, \quad *B_{ij} = g^{im} g_{\wedge}^{jn} B_{ij} = B_{\wedge}^{mn}. \quad (3.1)$$

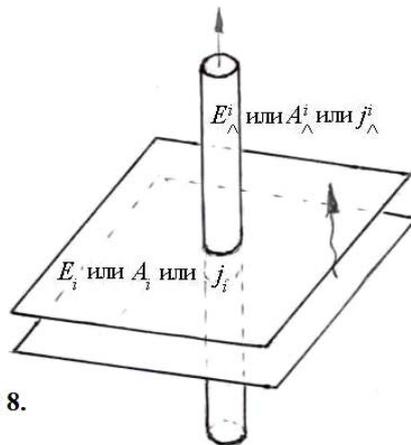


Рис. 8.

Взаимно сопряженные ковектор и векторная плотность образуют тандем. Например, E_i и E_{\wedge}^i . Элемент двойной поверхности ортогонален силовой трубке. Внешняя ориентация двойной поверхности соответствует внутренней ориентации силовой трубки

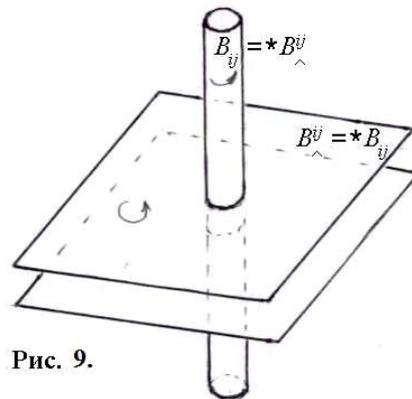


Рис. 9.

Взаимно сопряженные 2-форма и бивекторная плотность образуют тандем. Элемент двойной поверхности ортогонален силовой трубке. Внутренняя ориентация двойной поверхности соответствует внешней ориентации силовой трубки

Сопряжение, очевидно, инволютивно: $** = 1$. Мы говорим, что поле и сопряженное ему поле образуют *тандем*. Например, E_i & E_{\wedge}^i или B_{\wedge}^{ij} & B_{ij} суть тандемы. Они изображены на рисунках 8 и 9.

Сопряжение $*$ отличается от операции Ходжа $*$. Оператор Ходжа выполняет сопряжение $*$, но затем перенумеровывает компоненты поля антисимметричной псевдо

плотностью $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$. Например, $*E_i = \varepsilon_{mnj}^{def} g_{\wedge}^{ij} E_i = \tilde{\varepsilon}_{mnj} E_j = E_{mn}^*$. Здесь оператор Ходжа

преобразует 1-форму E_i в псевдо 2-форму E_{mn}^* . Однако перенумерация не имеет физического и геометрического значения, потому что E_{mn}^* имеет тот же самый геометрический смысл, что и векторная плотность $E_{\wedge}^j = *E_i$. В то же время, гораздо приятнее иметь дело с векторной плотностью E_{\wedge}^j , чем с псевдо 2-формой E_{mn}^* . Поэтому добавление перенумерации к сопряжению не имеет смысла. К тому же, оператор Ходжа не применим к контравариантным плотностям. Мы не используем оператор Ходжа.

Для сокращения мы будем в дальнейшем иногда называть контравариантные антисимметричные плотности сопряженными формами или кратко *коформами*.

Замечательно, что сопряжение часто превращает замкнутое поле в не замкнутое. Например, замкнутое поле B_{ij} превращается в поле B_{\wedge}^{mn} , которое имеет границей плотность тока:

$$\partial B_{ij} = 0, \text{ но } \partial * B_{ij} = \partial_n (g^{im} g^{jn} B_{ij}) = \partial_n B_{\wedge}^{mn} = \mu_0 j_{\wedge}^m. \quad (3.2)$$

Поля, замкнутые до или после применения сопряжения, мы называем *сопряженно-замкнутыми* или кратко *козамкнутыми* полями. Например, B_{ij} замкнуто, но B_{\wedge}^{mn} козамкнуто, потому что $\partial * B_{\wedge}^{mn} = \partial B_{ij} = 0$. Истинное *наполнение* некоторой границы, о котором упоминалось в предыдущем разделе, должно быть козамкнуто. Поэтому добавление к наполнению замкнутого поля, вообще говоря, нарушает истинность. Так истинным наполнением зарядовой плотности ρ_{\wedge} является козамкнутая напряженность E_{\times}^i (рис. 1, 6). Добавление замкнутой напряженности E_{\circ}^i не меняет границы поля E_{\wedge}^i , однако поле $E_{\wedge}^i = E_{\times}^i + E_{\circ}^i$ не является истинным наполнением плотности ρ_{\wedge} , поскольку E_{\circ}^i не козамкнуто: $\partial * E_{\circ} = -\partial_i \mathbf{V}$ (рис. 2).

Отметим, что если метрика сопряжения положительно определена, то *ограниченное* поле, которое замкнуто и одновременно козамкнуто, может быть только постоянным.

Оператор Ходжа используется для определения так называемого *кодифференциала* от формы [14, p. 315]

$$\delta \omega = (-1)^{np+n+1} * \partial * \omega, \quad (3.3)$$

где δ есть символ внешнего дифференцирования, n есть размерность пространства, и p есть степень формы ω . Оказывается, конструкция $* \delta *$ отличается от $* \partial *$ только знаком:

$$* \delta * \omega = (-1)^{np+n+p+1} * \partial * \omega. \quad (3.4)$$

Это дает простое выражение кодифференциала через сопряжение. Оно не зависит от размерности пространства:

$$\delta \omega = (-1)^p * \partial * \omega . \quad (3.5)$$

Теперь возвратимся к разложению Гельмгольца (1.1). Оно должно быть переписано в индексной форме в терминах векторной плотности,

$$E_{\wedge}^i = E_{\times}^i + E_{\circ}^i . \quad (3.6)$$

Безвихревое кулоновское поле $\mathbf{E} = E_{\times}^i$, которое удовлетворяет $\text{rot } \mathbf{E} \equiv \nabla \times \mathbf{E} = 0$, козамкнуто, потому что дифференциальная операция rot , применяемая к векторной плотности, подразумевает предварительное сопряжение:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 2\partial_{[k} (g_{j]i} E_{\times}^i) = \partial * \mathbf{E} = 0 . \quad (3.7)$$

Таким образом, метка \times , которая использовалась в разделе 1, отмечает козамкнутые поля.

В результате мы видим, что разложение Гельмгольца (1.1) является разложением поля на козамкнутую и замкнутую части.

4. Цепочки полей

Свойство сопряжения превращать замкнутые поля в козамкнутые обеспечивает существование бесконечных или конечных цепочек полей. Мы представляем здесь в качестве примера бесконечную цепочку электростатики.

$$\cdots (\partial) \rho_{\times} (*) \rho_{\wedge} (\partial) E_{\times}^i (*) E_{\circ}^i (\partial) \phi_{\times} (*) \phi_{\wedge} (\partial) Z_{\times}^i (*) Z_{\circ}^i (\partial) \psi_{\times} (*) \psi_{\wedge} (\partial) \cdots \quad (4.1)$$

Здесь звенья цепочки, т.е. поля $\rho_{\wedge}(x)$, $E_{\times}^i(x)$, $\phi_{\times}(x)$, $Z_{\circ}^i(x)$, *etc.*, разделены символами (∂) и $(*)$. Это значит, например, что $\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\times}^i$, $E_{\times}^i = *E_{\circ}^i$, $E_{\circ}^i = \partial_i \phi_{\times}$, $\phi_{\wedge} = \partial_i Z_{\times}^i$, где Z^i есть так называемый электрический вектор Герца (см., например, [15] с. 128). ψ есть гипотетическое поле типа потенциала.

Если $\rho_{\wedge} = \delta_{\wedge}(x)$ является дельта функцией Дирака, то мы имеем дело с полем точечного заряда. В этом случае цепочка в явном виде выглядит так:

$$\cdots \delta_{\wedge} (*) \delta_{\wedge} (\partial) \frac{r_{\wedge}^i}{4\pi r^3} (*) \frac{r_i}{4\pi r^3} (\partial) \frac{-1}{4\pi r} (*) \frac{-1_{\wedge}}{4\pi r} (\partial) \frac{-r_{\wedge}^i}{8\pi r} (*) \frac{-r_i}{8\pi r} (\partial) \frac{-r}{8\pi} (*) \frac{-r_{\wedge}}{8\pi} (\partial) \frac{-rr_{\wedge}^i}{32\pi} (*) \frac{-rr_i}{32\pi} \cdots \quad (4.2)$$

Действительно, замкнутая плотность точечного заряда $\rho_{\wedge}(x) = \delta_{\wedge}(x)$ является границей козамкнутой плотности векторного электрического поля $E_{\times}^i = r_{\wedge}^i / 4\pi r^3$, а сопряженное ему замкнутое ковекторное поле $E_{\circ}^i = r_i / 4\pi r^3$ является границей потенциала $\phi = -1/4\pi r$ и т.д.

Ограничившись этим примером, представим теперь в общем виде четыре возможные цепочки полей в 4-мерном пространстве (пространстве-времени)

$$\dots(\partial) \xi_{\lambda\mu\nu}^{\times}(\ast) \xi_{\circ\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) T_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\ast) T_{\circ\wedge}^{\eta\lambda\mu\nu}(\partial) \Pi_{\times\wedge}^{\lambda\mu\nu}(\ast) \Pi_{\circ\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) U_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\ast) U_{\circ\wedge}^{\eta\lambda\mu\nu}(\partial) R_{\times\wedge}^{\lambda\mu\nu}(\ast) R_{\circ\wedge}^{\alpha\beta\gamma} \dots \quad (4.3)$$

$$\dots Q_{\circ\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) \xi_{\times}^{\alpha\beta\gamma}(\ast) \xi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu}(\partial) B_{\times\wedge}^{\mu\nu}(\ast) B_{\circ\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) \Pi_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\ast) \Pi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu}(\partial) Z_{\times\wedge}^{\mu\nu}(\ast) Z_{\circ\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) R_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\ast) R_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu} \dots \quad (4.4)$$

$$\dots(\ast) Q_{\circ\wedge}^{\mu\nu}(\partial) j_{\times}^{\nu}(\ast) j_{\circ\wedge}^{\alpha}(\partial) B_{\times\wedge}^{\alpha\beta}(\ast) B_{\circ\wedge}^{\mu\nu}(\partial) A_{\times\wedge}^{\nu}(\ast) A_{\circ\wedge}^{\alpha}(\partial) Z_{\times\wedge}^{\alpha\beta}(\ast) Z_{\circ\wedge}^{\mu\nu}(\partial) \psi_{\times}^{\nu}(\ast) \psi_{\circ\wedge}^{\alpha}(\partial) \dots \quad (4.5)$$

$$\dots(\partial) P_{\times}^{\ast} P_{\circ\wedge}^{\ast}(\partial) j_{\times\wedge}^{\alpha}(\ast) j_{\circ\wedge}^{\nu}(\partial) b_{\times}^{\ast} b_{\circ\wedge}^{\ast}(\partial) A_{\times\wedge}^{\alpha}(\ast) A_{\circ\wedge}^{\nu}(\partial) q_{\times}^{\ast} q_{\circ\wedge}^{\ast}(\partial) \psi_{\times\wedge}^{\alpha}(\ast) \psi_{\circ\wedge}^{\nu}(\partial) \dots \quad (4.6)$$

Греческие индексы пробегает значения 0, 1, 2, 3.

В цепочках (4.4), (4.5) мы обозначили электромагнитный тензор через $B_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ вместо $F_{\mu\nu}$, чтобы 4-ток был границей электромагнитного поля, $j_{\wedge}^{\alpha} = \partial_{\beta} B_{\wedge}^{\alpha\beta}$ вместо обычного равенства $j_{\wedge}^{\alpha} = -\partial_{\beta} F_{\wedge}^{\alpha\beta}$.

В цепочках (4.5), (4.6) наш магнитный векторный 4-потенциал A_{ν} удовлетворяет равенству $B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$, и потому противоположен по знаку к обычному векторному 4-потенциалу A_{ν} : $A_{\nu} = -A_{\nu}$, $A^{\alpha} = -A^{\alpha}$.

Цепочки (4.1) и (4.2) используют евклидову метрику для сопряжения, $g_{ij} = \text{diag}\{+1,+1,+1\}$. Однако цепочки электромагнетизма (4.3) – (4.6) используют $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{+1,-1,-1,-1\}$. Поэтому, $A_0 = A^0 = A_0 = A^0 = \phi = -\varphi$, но $B_{i0} = -B^{i0} = E_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_i \varphi + \partial_0 A_i$ или $B_{31} = B^2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3$. При использовании полужирного шрифта обычно пишут $A_4^{\alpha} = (\varphi, \mathbf{A})$. Это означает $A^i = A_i^i = -A^i$, где A^i обозначает котравариантные компоненты пространственного вектора \mathbf{A} . Однако в отношении пространственного вектора \mathbf{A} действует евклидова метрика. Поэтому для ковариантных компонент вектора \mathbf{A} будет $A_i = -A_i = A_i$. Для нашего 4-потенциала A справедливо $A^{\alpha} = (-\varphi, -\mathbf{A})$, $A_{\nu} = (-\varphi, \mathbf{A})$.

Из цепочки (4.4) в литературе представлены уравнения Максвелла $\xi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu} = 3\partial_{[\lambda} B_{\times}^{\mu\nu]} = 0$, справедливые вследствие отсутствия токов магнитных монополей $\xi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu}$, и формула с электрическим 3-векторным потенциалом $\Pi_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\circ\wedge}^{\alpha\beta} = \partial_{\gamma} \Pi_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}$. При электро-магнитной симметрии магнитные токи монополей $\xi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu}$ существуют. Тогда они подчиняются

уравнению непрерывности $\partial_{\circ} \xi_{\lambda\mu\nu} = 4\partial_{[\eta} \xi_{\lambda\mu\nu]} = 0$, т.е. $\partial_0 \xi_{ijk} - \partial_i \xi_{0jk} + \partial_j \xi_{0ik} - \partial_k \xi_{0ij} = 0$. Это уравнение принимает знакомую 3-мерную форму, именно, $\partial_0 \xi_{\sim} + \partial_i \xi_{\sim}^i = 0$, если провести дуализацию, т.е. ввести псевдо плотность магнитных зарядов $\xi_{\sim} = \xi_{ijk} \varepsilon_{\sim}^{ijk} / 3!$ и псевдоплотность магнитных токов $\xi_{\sim}^i = \xi_{jk} \varepsilon_{\sim}^{ijk}$, где мы обозначили $\xi_{jk} = \xi_{j0k}$.

Из цепочки (4.5) в литературе представлены уравнения Максвелла $j_{\circ}^{\alpha} = \partial_{\beta} B_{\times}^{\alpha\beta}$, формула с магнитным векторным 4-потенциалом, $B_{\circ}^{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$, и формулы с вектором Герца [14, (42.4)] $A_{\circ}^{\alpha} = \partial_{\beta} Z_{\times}^{\alpha\beta}$.

Заметьте, что четыре цепочки (4.3) – (4.6) попарно комплементарны: (4.3) и (4.4) комплементарны между собой относительно магнитного тока ξ , потенциала Π , гипотетического поля R ; (4.4) и (4.5) комплементарны относительно электро магнитного поля B , поля Герца Z ; (4.5) и (4.6) комплементарны относительно электрического тока j , потенциала A , гипотетического поля C .

Если значения индексов ограничить числами 1, 2, 3, цепочка (4.3) выпадает, а вместо цепочек (4.4) – (4.6) мы получим формулы магнитостатики:

$$\dots Q_{\circ}^{ij}(\partial) \xi_{\times}^{ijr}(\ast) \xi_{\circ}^{mkl}(\partial) B_{\times}^{kl}(\ast) B_{\circ}^{ij}(\partial) \Pi_{\times}^{ijr}(\ast) \Pi_{\circ}^{mkl}(\partial) Z_{\times}^{kl}(\ast) Z_{\circ}^{ij}(\partial) R_{\times}^{ijr}(\ast) R_{\circ}^{mkl} \dots \quad (4.7)$$

$$\dots (\ast) Q_{\circ}^{kl}(\partial) j_{\times}^i(\ast) j_{\circ}^i(\partial) B_{\times}^{ij}(\ast) B_{\circ}^{kl}(\partial) A_{\times}^i(\ast) A_{\circ}^i(\partial) Z_{\times}^{ij}(\ast) Z_{\circ}^{kl}(\partial) \psi_{\times}^i(\ast) \psi_{\circ}^i(\partial) \dots \quad (4.8)$$

$$\dots (\partial) P_{\times}(\ast) P_{\circ}^i(\partial) j_{\times}^i(\ast) j_{\circ}^i(\partial) b_{\times}(\ast) b_{\circ}^i(\partial) A_{\times}^i(\ast) A_{\circ}^i(\partial) q_{\times}(\ast) q_{\circ}^i(\partial) \psi_{\times}^i(\ast) \psi_{\circ}^i(\partial) \dots \quad (4.9)$$

(здесь использованы компоненты пространственного вектора \mathbf{A} и евклидова метрика)

В цепочке (4.7) соотношение $\xi_{\circ}^{mkl} = 3\partial_{[m} B_{\times}^{kl]}$, т.е. $\xi_{\sim} = 3\partial_m B_{\times}^m$, означает $\xi = \text{div } \mathbf{B}$, т.е. магнитный заряд (псевдо скалярная плотность монополей) является границей (псевдо векторной плотности) магнитного поля. После сопряжения это поле делается замкнутым, и оказывается границей потенциала магнитного поля. $B_{\circ}^{ij} = \partial_r \Pi_{\times}^{ijr}$, т.е. $B_{\circ}^{\ast} = \partial_k \Pi_{\times}^{\ast}$, означает $\mathbf{B} = \text{grad } \Pi$.

В цепочке (4.8) соотношение $j_{\circ}^i = \partial_j B_{\times}^{ij}$ означает $\mathbf{j} = \text{rot } \mathbf{B}$. После сопряжения поле B_{\times}^{ij} делается замкнутым и оказывается границей магнитного потенциала: $B_{\circ}^{kl} = 2\partial_{[k} A_{\times}^{l]}$. Z в цепочках (4.7), (4.8) является магнитным вектором Герца.

Если одному из индексов в (4.3) – (4.5) придать значение 0, но при этом полагать, что производная по времени равна нулю, $\partial_0 = 0$, получатся формулы электростатики:

$$\dots(\partial) \xi_{mn}(\ast) \xi_{\circ\wedge}^{ij}(\partial) T_{\times\wedge}^{ijk}(\ast) T_{\circ\wedge}^{lmn}(\partial) \Pi_{\times mn}(\ast) \Pi_{\circ\wedge}^{ij}(\partial) U_{\times\wedge}^{ijk}(\ast) U_{\circ\wedge}^{lmn}(\partial) R_{\times mn} \dots \quad (4.10)$$

$$\dots Q_{\circ\wedge}^i(\partial) \xi_{\times}^{ij}(\ast) \xi_{\circ\wedge}^{kl}(\partial) E_{\times l}(\ast) E_{\circ\wedge}^i(\partial) \Pi_{\times\wedge}^{ij}(\ast) \Pi_{\circ\wedge}^{kl}(\partial) Z_{\times l}(\ast) Z_{\circ\wedge}^i(\partial) R_{\times\wedge}^{ij}(\ast) \dots \quad (4.11)$$

$$\dots(\ast) Q_{\circ\wedge}^k(\partial) \rho_{\times}(\ast) \rho_{\circ\wedge}^i(\partial) E_{\times\wedge}^i(\ast) E_{\circ\wedge}^k(\partial) \phi_{\times}(\ast) \phi_{\circ\wedge}(\partial) Z_{\times\wedge}^i(\ast) Z_{\circ\wedge}^k(\partial) \psi(\ast) \dots \quad (4.12)$$

Мы здесь обозначили: $\rho = j_0 = j^0$, $E_{\circ\wedge}^i = B_{\circ\wedge}^{0i}$, $E_k = B_{k0}$, скалярный электрический потенциал $\phi = A_0 = A^0$, векторный электрический потенциал $\Pi_{mn} = \Pi_{m0n}$, $\Pi_{\circ\wedge}^{ij} = \Pi_{\circ\wedge}^{i0j}$, ток магнитных монополей $\xi_{\circ\wedge}^{ji} = \xi_{\circ\wedge}^{0ij}$, $\xi_{lk} = \xi_{kl0}$ и т.д. Эти цепочки содержат, в частности, знакомые звенья.

В цепочке (4.12), которая повторяет цепочку (4.1), имеются звенья $\rho = \text{div } \mathbf{E}$ и $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$. Эта цепочка и цепочка (4.10) содержат только дивергенции и градиенты.

В цепочке (4.11) звено $\xi_{lk} = 2\partial_{[k} E_{l]}$, т.е. $\vec{\xi} = -\text{rot } \mathbf{E}$, означает, что границей соленоидального электрического поля после сопряжения является (псевдо) плотность тока магнитных монополей $\vec{\xi}$, за неизменением переменного магнитного поля в рассматриваемом статическом случае (стрелка использована, поскольку нет жирных греческих букв).

В той же цепочке (4.11) звено $E_{\circ\wedge}^i = \partial_j \Pi_{\times\wedge}^{ij}$ означает $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{\Pi}$, т.е., что соленоидальное поле является границей электрического векторного потенциала (рис. 7б). Цепочка (4.11) содержит только роторы.

5. Наполнения сингулярных границ. Три примера

5.1. Поле электрического диполя

Интересно, что из цепочки, связанной с точечным зарядом (4.2), легко получить цепочку полей, связанную с точечным электрическим диполем. Для этого обозначим точку, являющуюся носителем дельта функции, через x' , $\delta_{\circ\wedge}(x, x')$, и применим ко всей цепочке (4.2) оператор $p^{k'} \partial_{k'}$, где $p^{k'}$, вектор электрического момента в точке x' , а $\partial_{k'}$ оператор дифференцирования в точке x' :

$$\dots(\ast) p^{k'} \partial_{k'} \delta_{\circ\wedge}(x, x') (\partial) p^{k'} \partial_{k'} \frac{r^i(x, x')}{4\pi r^3} (\ast) p^{k'} \partial_{k'} \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3} (\partial) p^{k'} \partial_{k'} \frac{-1}{4\pi r} (\ast) \dots \quad (5.1)$$

Здесь замкнутая сингулярная дипольная плотность заряда имеет вид $\rho_{\circ\wedge} = p^{k'} \partial_{k'} \delta_{\circ\wedge}(x, x')$. Ее несингулярная модель представлена на рис 10.

Наполнением этой плотности является козамкнутая напряженность векторного поля электрического диполя $E_{\mathbf{x}}^i$,

$$E_{\mathbf{x}}^i = p^{k'} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = -p^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = \frac{-p_{\wedge}^i}{4\pi r^3} + \frac{3r_{\wedge}^i p^k r_k}{4\pi r^5} \quad (5.2)$$

поскольку

$$\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\mathbf{x}}^i(x, x'), \quad (5.3)$$

в силу известного выражения δ -функции

$$\delta_{\wedge}(x, x') = \partial_i \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (5.4)$$

Несингулярная модель поля $E_{\mathbf{x}}^i$ представлена на рис 11.

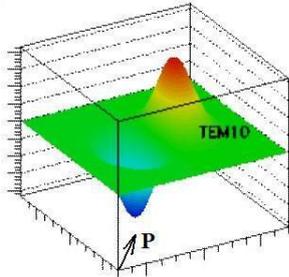


Рис. 10. Модель производной дельта-функции, умноженной на вектор \mathbf{P} .

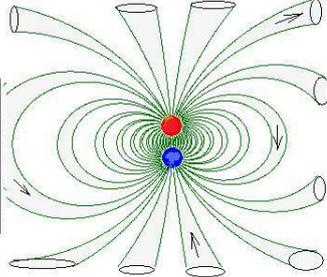


Рис. 11. Силовые трубки поля векторной плотности напряженности поля диполя. Их границей служит скалярная плотность заряда

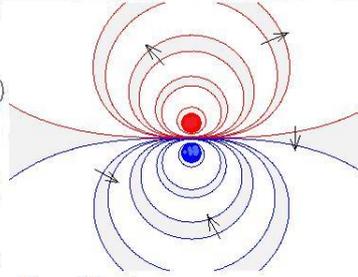


Рис. 12. Разрез замкнутых бипервностей ковекторной напряженности поля диполя, которая сопряжена векторной плотности рисунка 11.

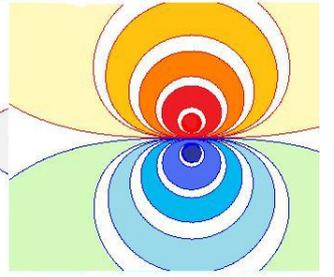


Рис. 13. Поле потенциала. Его границей является ковекторная напряженность рисунка 12.

Замкнутая напряженность ковекторного поля диполя, сопряженная к полю $E_{\mathbf{x}}^i$ (рис. 12),

$$E_{\circ i} = *E_{\mathbf{x}}^i = -p^k \partial_k \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (5.5)$$

является границей потенциала ϕ (рис 13):

$$E_{\circ i} = \partial_i \phi, \quad \phi = p^k \partial_k \frac{1}{4\pi r(x, x')} = \frac{-p^k r_k}{4\pi r^3}. \quad (5.6)$$

5.2. Поле элемента тока

Цепочку полей электрического диполя (5.1) интересно сравнить с цепочкой полей (5.12), связанных с элементом тока $j_{\wedge}^i = I^i \delta_{\wedge}(x, x')$. Сначала применяем закон Био-Савара:

$$B_{\mathbf{x}}^{ik}(x, x') = 2 \int I^i \delta_{\wedge}(x'', x') \frac{r_{\wedge}^{k1}(x, x'') dV_{\wedge}''}{4\pi r^3(x, x'')} = \frac{2I^i r^{k1}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (5.7)$$

Граница этого магнитного поля, являющаяся замкнутым векторным полем плотности электрического тока, не равна элементу тока $I^i \delta_\wedge(x, x')$, а равна его замкнутой части

$$j_\circ^\wedge^i = \partial_k B_\times^{\wedge ik}(x, x') = I^i \partial_k \frac{r_\wedge^k(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} - I^k \partial_k \frac{r_\wedge^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = I^i \delta_\wedge(x, x') - I^k \partial_k \frac{r_\wedge^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (5.8)$$

Это замкнутое поле очень похоже на козамкнутую векторную напряженность

электрического поля диполя E_\times^i (5.2), изображенную на рис 11. Рисунки этих полей

совпадают в случае действительно сингулярного элемента тока. Однако ток $j_\circ^\wedge^i$ (5.8)

замкнут, а электрическая напряженность E_\times^i (5.2) козамкнута. Это отличие происходит из-за

δ -функции, присутствующей в (5.8): последний член в (5.8), совпадающий с E_\times^i ,

сокращается с козамкнутой частью этой δ -функции. Этот феномен проиллюстрирован на рис.

14, взятом из [16].

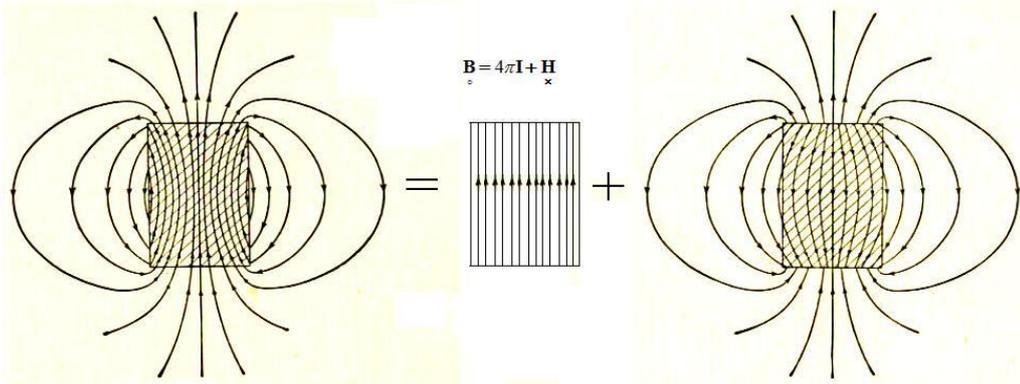


Рис. 14. Иллюстрация к тому, как замкнутый ток $j_\circ^\wedge^i$ (5.8) получен добавлением сингулярного элемента $I^i \delta_\wedge(x)$ к козамкнутому полю, совпадающему с E_\times^i из (5.2) (рис. 11).

Ток, сопряженный с $j_\circ^\wedge^i$ (5.8),

$$j_\times^i = I_i \delta(x, x') - I^k \partial_k \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (5.9)$$

козамкнут. Оператор границы ∂ , примененный к этому току, обращает в ноль его замкнутую часть, совпадающую с E_\circ^i (последний член в (5.9)),

$$-\partial_{[i} I^k \partial_k \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = 0, \quad (5.10)$$

и остается замкнутое сингулярное колечко с внешней ориентацией, которое можно назвать пра-током,

$$G_\circ^{li} = 2\partial_{[i} \delta(x, x') I_{l]}. \quad (5.11)$$

Цепочка магнитного поля, созданного сингулярным элементом тока $I^i \delta_\wedge(x, x')$, не входящим в эту цепочку, выглядит как (4.8):

$$\dots G_{\wedge}^{ji}(\ast) G_{\circ li}(\partial) j_{\wedge}^i(\ast) j_{\circ}^i(\partial) B_{\wedge}^{ik}(\ast) B_{\circ ik} \dots \quad (5.12)$$

Возникновение замкнутого поля j_{\wedge}^i (5.8) за счет прибавления сингулярного элемента $I^i \delta_\wedge(x, x')$ к козамкнутому полю, совпадающему с E_{\wedge}^i (рис. 11), проиллюстрировано на несингулярной модели в книге [16] на примере однородно намагниченного круглого цилиндра: $\mathbf{V} = 4\pi\mathbf{I} + \mathbf{H}$ (см. рис. 14). На рис.14 изображены, как это принято, силовые линии, а не трубки, как должно быть.

5.3. Поле кольцевого тока

Сингулярное колечко с внешней ориентацией (5.11) названо пра-током, потому что плотность тока имеет внутреннюю ориентацию, как (5.8). Сингулярный кольцевой ток с внутренней ориентацией, j_{\wedge}^i , являющийся аналогом электрического диполя, является границей козамкнутого магнитного поля, B_{\wedge}^{ij} , аналогичного электрическому полю E_{\wedge}^i (5.2). Естественно, это магнитное поле получается заменой электрического дипольного момента p^k на магнитный момент M^{ki} в формуле (5.2):

$$B_{\wedge}^{ij} = 2M^{k[i} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^{j]1}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = -2M^{k[i} \partial_k \frac{r_{\wedge}^{j]1}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (5.13)$$

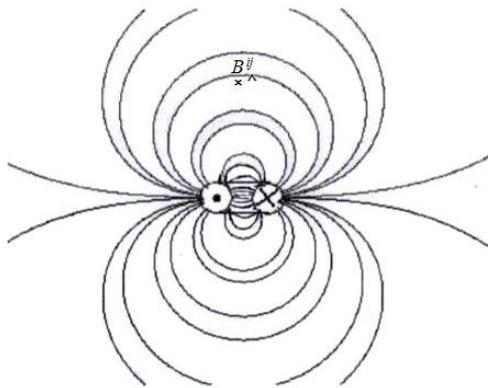


Рис. 15. Разрез козамкнутых бипервностей B_{\wedge}^{ij} с внутренней ориентацией, опирающихся на токовое колечко j_{\wedge}^i с внутренней ориентацией

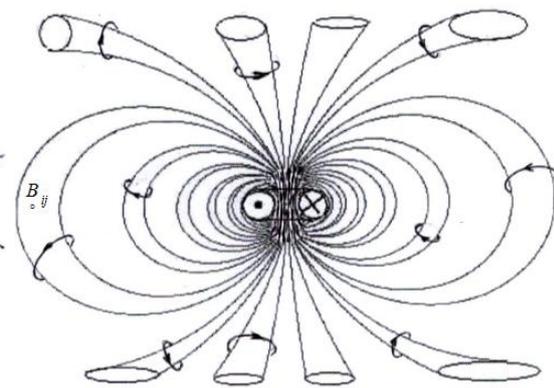


Рис. 16. Замкнутые силовые трубки B_{\circ}^{ij} с внешней ориентацией, сопряженные с бипервностями рисунка 15. Они являются границами векторного потенциала A_{\wedge}^j

Несингулярная модель этого поля изображена на рис. 15. Там же видна граница поля в виде кольцевого тока j_{\wedge}^i , который получается дифференцированием поля (5.13),

$$j_{\circ \wedge}^i = \partial_j B_{\times \wedge}^{ij} = -M^{ki} \partial_j \partial_k \frac{r_{\wedge}^j(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} + M^{kj} \partial_j \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = -M^{ki} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x'). \quad (5.14)$$

(второе слагаемое равно нулю из-за антисимметрии M^{kj}). На рисунке 16 изображена несингулярная модель замкнутого поля $B_{\circ ij}$, сопряженного полю $B_{\times \wedge}^{ij}$ (5.13),

$$B_{\circ ij} = -2M_{k[i} \partial^k \frac{r_{j]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (5.15)$$

служащего границей векторному потенциалу $A_{\times j}$, который не представлен на рисунке.

При действительно сингулярном токе $j_{\circ \wedge}^i = -M^{ki} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x')$ (5.14) вид поля $B_{\times \wedge}^{ij}$ (рис. 15) совпадает с видом поля $E_{\circ i}$ (рис. 12) так же, как совпадает между собой вид сопряженных к ним полей $B_{\circ ij}$ (рис. 16) и $E_{\times \wedge}^i$ (рис. 11). Однако существует разница, которая хорошо видна на несингулярных моделях: биповерхности на рисунке 12 замкнуты и имеют внешнюю ориентацию, а биповерхности рисунка 15 опираются на токовое колечко и имеют согласованную с ним внутреннюю ориентацию; трубки на рисунке 11 исходят из зарядов диполя и имеют внутреннюю ориентацию, а трубки на рисунке 16 замкнуты и имеют внешнюю ориентацию. Такую же внешнюю ориентацию будут иметь биповерхности поля $A_{\times j}$. Математически разница между полями (5.13) рис. 15 и (5.5) рис. 12, между полями (5.15) рис. 16 и (5.2) рис. 11 обусловлена присутствием δ -функций в выражениях (5.13) и (5.15). Действительно, представим, например поле (5.13) в дуальном виде:

$$\begin{aligned} B_{\times \wedge}^{*i} &= \frac{1}{2} B_{\times \wedge}^{ij} \varepsilon_{ijl}^{\sim} = -\varepsilon_{ijl}^{\sim} M^{ki} \partial_k \frac{r_{\wedge}^j}{4\pi r^3} = -\varepsilon_{ijl}^{\sim} \varepsilon_{\sim}^{kin} M_n^{\sim} \partial_k \frac{r_{\wedge}^j}{4\pi r^3} = 2\delta_{jl}^{[kn]} M_n^{\sim} \partial_k \frac{r_{\wedge}^j}{4\pi r^3} = 2M_{[l}^{\sim} \partial_{j]} \frac{r_{\wedge}^j}{4\pi r^3} = \\ &= M_l^{\sim} \partial_j \frac{r_{\wedge}^j}{4\pi r^3} - M_j^{\sim} \partial_l \frac{r_{\wedge}^j}{4\pi r^3} = M_l^{\sim} \delta_{\wedge} - M_j^{\sim} \partial_l \frac{r_j}{4\pi r^3} = M_l^{\sim} \delta_{\wedge} - M_j^{\sim} \partial_j \frac{r_l}{4\pi r^3}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

здесь использовано $\partial_{[l} \frac{r_{j]} }{4\pi r^3} = 0$. (5.16) рис. 15 отличается от (5.5) наличием дельта функции и псевдовектора, который ответственен за внутреннюю ориентацию.

6. Оператор Лапласа

Граница суммы замкнутого и козамкнутого полей равна границе козамкнутого слагаемого, потому что оператор границы элиминирует замкнутое поле,

$$\partial_i (E_{\circ \wedge}^i + E_{\times \wedge}^i) = \partial_i E_{\times \wedge}^i. \quad (6.1)$$

Однако лапласиан, оператор второго порядка, $\nabla^2 E_\wedge^k = g^{ij} \nabla_i \nabla_j E_\wedge^k$, который использует метрику, во-первых, обрабатывает оба слагаемых такой суммы, во-вторых, должен обязательно содержать ковариантные производные. Как известно, [14, p.316],

$$\nabla^2 = -\delta\delta - \partial\delta, \quad (6.2)$$

где δ есть кодифференциал (3.3), (3.5) (сигнатура метрического тензора g^{ij} здесь $+++$). Наша цель записать члены формулы (6.2) в терминах сопряжения, а не оператора Ходжа, который содержится в δ . Вследствие (3.5), имеем

$$\delta\delta\omega = \delta\alpha = (-1)^{p+1} * \partial * \alpha = -(-1)^p * \partial * \partial\omega, \quad \partial\delta\omega = (-1)^p \partial * \partial * \omega. \quad (6.3)$$

Следовательно, для p -формы ω , уже не зависимо от сигнатуры метрического тензора, будет

$$\nabla^2 \omega = (-1)^p (*\partial * \partial - \partial * \partial*)\omega, \quad (6.4)$$

см. также [12]. Слагаемые в формуле (6.4) имеют разные знаки, в отличие от (6.2).

Аналогично можно показать, что для контравариантной плотности валентности p , β_\wedge^p ,

$$\nabla^2 \beta_\wedge^p = (-1)^{p+1} (*\partial * \partial - \partial * \partial*)\beta_\wedge^p. \quad (6.5)$$

Заметим здесь, что формулы (6.4), (6.5) являются выражением оператора Лапласа над формами и коформами через *частные* производные. Например, для скалярной функции, т.е. нуль-формы, $\omega(x)$, формула (6.4) дает, поскольку, согласно (2.6), $\partial * \omega = 0$,

$$\begin{aligned} * \partial * \partial \omega - \partial * \partial * \omega &= * \partial * \partial \omega = \\ &= (1/\sqrt{g_\wedge}) \partial_i (g^{ij} \sqrt{g_\wedge} \partial_j \omega) = [\partial_i g^{ij} + g^{ij} (1/\sqrt{g_\wedge}) \partial_i \sqrt{g_\wedge}] \partial_j \omega + g^{ij} \partial_i \partial_j \omega \end{aligned}$$

Заменяя в первом слагаемом индекс $j \rightarrow k$ и пользуясь формулой (86,6) [17]

$$g^{ij} \Gamma_{ij}^k = -\partial_i g^{ik} - g^{ik} (1/\sqrt{g_\wedge}) \partial_i \sqrt{g_\wedge},$$

получаем

$$* \partial * \partial \omega - \partial * \partial * \omega = g^{ij} (-\Gamma_{ij}^k \partial_k \omega + \partial_i \partial_j \omega) = g^{ij} \nabla_i (\nabla_j \omega) = \nabla^2 \omega.$$

Отметим, что представление лапласиана в виде (6.4), (6.5) для произвольных геометрических величин не действительно.

Согласно (6.4), (6.5), лапласиан осуществляет переход вдоль цепочки полей от некоторого звена на четыре звена влево, иногда умножая на -1 . Например, для цепочки электростатики (4.1) или (4.2), для поля ϕ_\wedge , которое замкнуто, согласно (6.5) ($p = 0$), будет

$$\nabla^2 \phi_\wedge = \partial * \partial * \phi_\wedge = \rho_\wedge, \quad \text{или} \quad \nabla^2 \frac{-1}{4\pi r} = \partial * \partial * \frac{-1}{4\pi r} = \delta_\wedge(x). \quad (6.6)$$

Здесь знак при сдвиге по цепочке не меняется. Напротив, в цепочке магнитостатики (4.8), для замкнутого поля A_{\circlearrowleft}^i , согласно (6.5) ($p = 1$), знак изменяется относительно сдвига по цепочке (см. также [1, (5.31)]).

$$\nabla^2 A_{\circlearrowleft}^i = -\partial * \partial * A_{\circlearrowleft}^i = -j_{\circlearrowleft}^i. \quad (6.7)$$

Однако для козамкнутого поля $A_{\times\circlearrowleft}^i$ из цепочки (4.9) знак не меняется. Поэтому, если векторный магнитный потенциал магнитостатики не удовлетворяет кулоновской калибровке, $\partial_i A_{\times\circlearrowleft}^i \neq 0$, т.е. содержит звенья обеих комплементарных цепочек (4.8), (4.9), $A_{\circlearrowleft}^i = A_{\times\circlearrowleft}^i + A_{\circlearrowleft}^i$, то, согласно (6.5), в соответствии с [4, (5.30)],

$$\nabla^2 A_{\circlearrowleft}^i = \nabla^2 (A_{\times\circlearrowleft}^i + A_{\circlearrowleft}^i) = * \partial * \partial A_{\times\circlearrowleft}^i - \partial * \partial * A_{\circlearrowleft}^i = j_{\times\circlearrowleft}^i - j_{\circlearrowleft}^i = \text{grad div } \mathbf{A} - \mathbf{j}. \quad (6.8)$$

Для пространства-времени формула (6.8) выглядит

$$\nabla^2 A_{\circlearrowleft}^{\alpha} = * \partial * \partial A_{\circlearrowleft}^{\alpha} - \partial * \partial * A_{\circlearrowleft}^{\alpha} = j_{\times\circlearrowleft}^{\alpha} - j_{\circlearrowleft}^{\alpha} \quad (6.9)$$

(мы считаем, что в пространстве-времени $\nabla^2 = \partial_0^0 + \partial_k^k = \partial_{00} - \partial_{kk}$). Для $\alpha = 0$, согласно (6.9),

$$\partial_{00} A^0 - \partial_{kk} A^0 = \partial_0 (\partial_0 A^0 + \partial_k A^k) - j^0, \quad \text{т.е.} \quad \partial_{kk} \phi = \partial_0 \partial_k A^k + \rho. \quad (6.10)$$

Это совпадает с [1, (6.10)], если учесть обозначение ϕ (2.1). Для $\alpha = i$, будет

$$\partial_{00} A^i - \partial_{kk} A^i = \partial^i (\partial_0 A^0 + \partial_k A^k) - j^i, \quad \text{т.е.} \quad \partial_{00} A^i - \partial_{kk} A^i = \partial_i (\partial_0 \phi - \partial_k A^k) + j^i. \quad (6.11)$$

Это совпадает с [1, (6.11)] или с (6.8) при $\partial_0 = 0$.

При лоренцевой калибровке, именно, $\partial_{\alpha} A_{\circlearrowleft}^{\alpha} = \partial_0 A_{\circlearrowleft}^0 + \partial_i A_{\circlearrowleft}^i = 0$, $A_{\times\circlearrowleft}^{\alpha} = 0$, получается просто $\nabla^2 A_{\circlearrowleft}^{\alpha} = -j_{\circlearrowleft}^{\alpha}$, т.е.

$$\partial_{00} \phi - \partial_{kk} \phi = -\rho, \quad \partial_{00} A^i - \partial_{kk} A^i = j^i. \quad (6.12)$$

При кулоновской (не лоренцевой) калибровке, $\partial_k A^k = 0$, имеем вместо (6.10) и (6.11)

$$\partial_{kk} \phi = \rho, \quad \text{и} \quad \partial_{00} A^i - \partial_{kk} A^i = \partial_i \partial_0 \phi + j^i, \quad (6.13)$$

что совпадает с [1, (6.22)], [1, (6.24)]

Применение формулы (6.4) к левому концу цепочки (4.5) дает интересный результат, не встречающийся в литературе:

$$\nabla^2 B_{\circlearrowleft}^{\mu\nu} = -\partial * \partial * B_{\circlearrowleft}^{\mu\nu} = -Q_{\circlearrowleft}^{\mu\nu} = -2\partial_{[\mu} j_{\nu]}. \quad (6.14)$$

В трехмерном векторном виде этот результат выглядит

$$(\partial_{00} - \partial_{kk}) \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{j}, \quad (\partial_{00} - \partial_{kk}) \mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{j} - \text{grad } \rho. \quad (6.15)$$

7. Тандемно замкнутые поля

При знакопеременном метрическом тензоре существуют *тандемно замкнутые* поля, т.е. поля, которые замкнуты и козамкнуты одновременно. Мы отмечаем такие поля парой значков $\times \circ$. Например, обычная электромагнитная плоская волна

$$B_{\times \circ \wedge}^{01} = E^1 = e^{iz-it}, \quad B_{\times \circ \wedge}^{31} = B_2 = e^{iz-it}, \quad B_{\times \circ 01} = -e^{iz-it}, \quad B_{\times \circ 31} = -B_{\times \circ 13} = e^{iz-it}, \quad (7.1)$$

составляет тандемно замкнутое поле $B_{\times \circ \wedge}^{\alpha\beta}$, $B_{\times \circ \mu\nu}$, поскольку электрические и магнитные 4-токи равны нулю:

$$\partial_\beta B_{\times \circ \wedge}^{1\beta} = \partial_0 B_{\times \circ \wedge}^{10} + \partial_3 B_{\times \circ \wedge}^{13} = 0, \quad \partial_{[\lambda} B_{\times \circ \mu\nu]} = \partial_3 B_{\times \circ 10} + \partial_0 B_{\times \circ 31} = 0. \quad (7.2)$$

В этом случае оба поля тандема замкнуты. Мы называем такой тандем *концевым* тандемом, потому что цепочка кончается слева таким тандемом. Очевидно, концевой тандем служит концом двух (комплементарных) цепочек. Например, (7.2) означает (ср. (4.4), (4.5)),

$$0(\partial) B_{\times \circ \mu\nu} (*) B_{\times \circ \wedge}^{\alpha\beta} (\partial) \Pi_{\times \wedge}^{\alpha\beta\gamma} (*) \Pi_{\circ \wedge \mu\nu} (\partial) Z_{\times \mu\nu} (*) Z_{\circ \wedge}^{\alpha\beta} (\partial) R_{\times \wedge}^{\alpha\beta\gamma} (*) R_{\circ \wedge \mu\nu} (\partial) \dots \quad (7.3)$$

$$0(\partial) B_{\times \circ \wedge}^{\alpha\beta} (*) B_{\times \circ \mu\nu} (\partial) A_{\times \nu} (*) A_{\circ \wedge}^\alpha (\partial) Z_{\times \wedge}^{\alpha\beta} (*) Z_{\circ \mu\nu} (\partial) \psi_{\times \nu} (*) \psi_{\circ \wedge}^\alpha (\partial) \dots \quad (7.4)$$

В цепочке (7.4) электромагнитное поле $B_{\times \circ \mu\nu}$ является границей магнитного векторного потенциала $A_{\times \nu}$: $B_{\times \circ \mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\times \nu]}$, $A_{\times 1} = -A_{\circ \wedge}^1 = -ie^{iz-it}$, однако сопряженное с ним электромагнитное поле $B_{\times \circ \wedge}^{\alpha\beta}$ в цепочке (7.3) является границей электрического три-векторного потенциала $\Pi_{\times \wedge}^{\alpha\beta\gamma}$: $B_{\times \circ \wedge}^{\alpha\beta} = \partial_\gamma \Pi_{\times \wedge}^{\alpha\beta\gamma}$, $\Pi_{\times \wedge}^{103} = \Pi_{\circ 103} = ie^{iz-it}$. Несколько следующих звеньев цепочек выглядят так:

$$Z_{\times 10} = -Z_{\circ \wedge}^{10} = \frac{1+i(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad Z_{\times 13} = Z_{\circ \wedge}^{13} = \frac{1-i(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad R_{\times \wedge}^{103} = R_{\circ 103} = -\frac{(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad (7.5)$$

$$Z_{\times \wedge}^{10} = -Z_{\circ 10} = \frac{-1+i(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad Z_{\times \wedge}^{13} = Z_{\circ 13} = \frac{1+i(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad C_{\times 1} = -C_{\circ \wedge}^1 = -\frac{(t+z)}{4} e^{iz-it}, \quad (7.6)$$

Поскольку лапласиан осуществляет сдвиг вдоль цепочки на четыре звена влево, мы имеем, согласно (7.3) и (6.5),

$$B_{\times \circ \wedge}^{\alpha\beta} = \partial * \partial * Z_{\circ \wedge}^{\alpha\beta} = \nabla^2 Z_{\circ \wedge}^{\alpha\beta}. \quad (7.7)$$

Но то же поле $B_{\times \circ \wedge}^{\alpha\beta}$, согласно (7.4) и (6.5), равно

$$B_{\times \circ \wedge}^{\alpha\beta} = * \partial * \partial Z_{\times \wedge}^{\alpha\beta} = -\nabla^2 Z_{\times \wedge}^{\alpha\beta}. \quad (7.8)$$

Тут мы получаем интересный общий вывод:

Сумма однородных членов комплементарных цепочек является гармоническим полем, если сдвиг на четыре звена влево приводит к концевому тандему (7.9)

Действительно,

$$\nabla^2 Z_{\wedge}^{\alpha\beta} = \nabla^2 (Z_{\circ\wedge}^{\alpha\beta} + Z_{\times\wedge}^{\alpha\beta}) = B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta} - B_{\circ\wedge}^{\alpha\beta} = 0. \quad (7.10)$$

Между прочим, мы можем рассматривать гармоническое поле $Z_{\wedge}^{\alpha\beta}$ из (7.5), (7.6), как некую плоско поляризованную электромагнитную волну, поскольку она удовлетворяет однородному волновому уравнению (7.10). По аналогии с (7.1) мы можем считать

$$Z_{\wedge}^{01} = Z_{\times\wedge}^{01} + Z_{\circ\wedge}^{01} = E^1 = \frac{1}{2} e^{iz-it} \quad \text{и} \quad Z_{\wedge}^{31} = Z_{\times\wedge}^{31} + Z_{\circ\wedge}^{31} = B_2 = -\frac{1}{2} e^{iz-it} \quad (7.11)$$

электрическим и магнитным полем этой волны, используя формулы (7.5), (7.6). Но это очень странная волна. Вектор Пойнтинга, $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{B}}) / 2$, имеет z -компоненту, направленную противоположно направлению движения волны: $S_z = -1/8$, и волна сопровождается электрическим j_{\wedge}^{α} и магнитным $J_{\lambda\mu\nu}$ токами, роль которых играют обычные магнитный и электрический векторные потенциалы:

$$j_{\wedge}^{\alpha} = \partial_{\beta} Z_{\times\wedge}^{\alpha\beta} = A_{\circ\wedge}^{\alpha}, \quad J_{\lambda\mu\nu} = 3\partial_{[\lambda} Z_{\times\wedge}^{\mu\nu]} = \Pi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu}. \quad (7.12)$$

Совсем простой пример концевой тандема, приведен в [2]. При этом там использован знакопостоянный метрический тензор. Зато там поля растут на бесконечности.

Заключение

Описание электромагнитных полей, представленное в данной статье, возможно, более соответствует природе электромагнетизма, чем стандартное описание. Использование понятий сопряжения и границ полей выявляет естественные связи и различия между полями. Источники полей оказываются границами многообразий, изображающих эти поля. Это придает полям необычную наглядность. Идея применения дифференциальных форм при изложении электромагнетизма, по-видимому, впервые оказалась реализованной, и это привело к упрощению изложения.

Материал настоящей статьи был направлен в следующие журналы: УФН (13.06.95, 28.03.01, 16.05.08, 27.07.09), Письма в ЖЭТФ (14.05.98), АЖР (12.04.05), Известия вузов. Физика (25.04.05).

Библиографический список

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Том 3, часть 1. (М.: Наука, 1996)
2. Храпко Р.И. Разложение Гельмгольца, *etc.* -
<http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num19/article9/author.htm> (05.07.05)
3. Ohanian H. C. Physics. - N.Y.: W.W.Norton, 1985.- 881p.
4. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. - Wiley, 1999.- 808p.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.- М.: Наука, 1984.- 832с.
6. Schouten J. A. Tensor Analysis for Physicists. - Clarendon, Oxford, 1951.- 275p.
7. Схоутен Я. А. Тензорный анализ для физиков. - М.: Наука, 1965.- 455с.
8. Napolitano J. and Lichtenstein R. Answer to Question #55 Are the pictorial examples that distinguish covariant and contravariant vectors? // American J. Physics – 1997, **65**. – p.1037
9. Cartan H. Calcul Differentiel. Formes Differentielles. - Herman, Paris, 1967.- 302с..
10. Картан А. Дифференциальное исчисление, Дифференциальные формы. - М.: Мир, 1971.- 392с.
11. Flanders H. Differential Forms (Academic, New York, 1963)
12. Khrapko R. I. Violation of the gauge equivalence - <http://arXiv.org/abs/physics/0105031> (11.12.01).
13. Храпко Р. И. Силовые трубки и биповерхности в электромагнетизме. -
<http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num4/article7/author.htm> (18.05.01)
14. Von Westenholz C. Differential Forms in Mathematical Physics (North Holland, 1978)
15. Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика (М.: Высшая школа, 1990) 352с.
16. Abraham M., Becker R. The Classical Theory of Electricity and Magnetism (Hafner, N. Y.) 289p.
17. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля (М.: Наука, 1973) 504с.

Сведения об авторе

Храпко Радий Игоревич, доцент кафедры физики Московского авиационного института
(Государственного технического университета), к.ф.-м.н.

Контакты: 4991446312, khrapko_ri@hotmail.com, персональный сайт
<http://khrapkori.wmsite.ru>

125993 Москва, Волоколамское шоссе 4, Российская Федерация

Chains of electromagnetic's fields

R. I. Khrapko

Annotation.

A consistent use of the exterior differential forms in the electromagnetism shows that fields of electromagnetism are geometrical quantities of two different types: differential forms and contravariant (antisymmetric) tensor densities. These types are connected with each other by a specific operation, named the conjugation, which is a part of the Hodge operation. Field tubes and families of bisurfaces depict electromagnetic fields. The conjugation allows a many-fold differentiation of the fields and leads to field chains. The Helmholtz's decomposition of a field is a decomposition into a closed part and a closed after conjugation part of the field. Chains of fields of electric and magnetic dipoles are considered in detail. Concept of boundary of a field is used widely. Laplacian is represented in terms of the conjugation, and its action on isolated chains is considered. A sufficient condition of harmonicity of a field is found.

Key words

Differential forms, Helmholtz decomposition, Hodge operation, Laplacian.

Author

Khrapko Radi Igorevch, Moscow aviation institute (state technical university).

Contacts: +7 4991446312, khrapko_ri@hotmail.com, personal website <http://khrapkori.wmsite.ru>