

Научная статья
УДК 539.31
DOI: [10.34759/trd-2022-124-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-11)

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Илья Игоревич Петров¹, Дмитрий Олегович Сердюк²✉, Павел Дмитриевич Скопинцев³

^{1,2,3}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

¹PetrovIlya1998@yandex.ru

²d.serduk55@gmail.com✉

³pavelsskopin@ya.ru

Аннотация. Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка с постоянной толщиной, на боковую поверхность которой воздействует нестационарная нагрузка. Материал оболочки упругий и ортотропный, с симметрией относительно срединной поверхности оболочки. Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат, связанной с осью оболочки. В качестве модели оболочки приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. Фундаментальные решения (функции Грина, функции влияния) построены для цилиндрической оболочки большой протяженности и для шарнирно опертой по торцам цилиндрической оболочки. Фундаментальные решения для рассматриваемых конструкций представляют собой

решения задач о воздействии на оболочку мгновенной сосредоточенной нагрузки, математически моделируемой дельта-функцией Дирака. Фундаментальное решение для ортотропной цилиндрической оболочки большой протяженности построено с применением разложений в экспоненциальные ряды Фурье по угловой координате, интегрального преобразования Лапласа по времени и интегрального преобразования Фурье по продольной координате. Обратное интегральное преобразование Лапласа выполнено аналитически, а оригинал интегрального преобразования Фурье найден с использованием численных методов интегрирования быстро осциллирующих функций. Фундаментальное решение для ортотропной шарнирно опертой цилиндрической оболочки построено с применением разложений в двойные тригонометрические ряды Фурье по угловой и продольной координате, а также интегрального преобразования Лапласа по времени. Обратное интегральное преобразование Лапласа построено аналитически. Выполнена верификация найденных фундаментальных решений. Приведены примеры расчетов. Результаты представлены в виде графиков.

Ключевые слова: нестационарная динамика, ортотропный материал, цилиндрическая оболочка, интегральные преобразования, обобщенные функции, квадратурные формулы

Для цитирования: Петров И.И., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки // Труды МАИ. 2022. № 124.

DOI: [10.34759/trd-2022-124-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-11)

FUNDAMENTAL SOLUTIONS FOR ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL

Ilya I. Petrov¹, Dmitry O. Serdyuk²✉, Pavel D. Skopincev³

^{1,2,3}Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russia

¹PetrovIlya1998@yandex.ru

²d.serduk55@gmail.com✉

³pavelsskopin@ya.ru

Abstract. A circular cylindrical shell of constant thickness is considered, the side surface of which is affected by non-stationary load. The shell material has symmetry with respect to the median surface, is linearly elastic, orthotropic. The motion is described in a cylindrical coordinate system associated with the axis of the cylindrical shell. The mathematical model of the object under consideration is described using the Kirchhoff - Love hypotheses. Fundamental solutions (Green's functions, influence functions) are constructed for a cylindrical shell of great length, as well as a cylindrical shell pivotally supported at the ends. The Green function for an orthotropic shell is a solution to the problem of the effect of an instantaneous concentrated load on the shell, modeled by the Dirac delta function. To find the influence function in the case of an unlimited cylindrical shell, expansions into exponential Fourier series in angular coordinate, the integral Laplace transform in time and the integral Fourier transform in longitudinal coordinate are used. The inverse integral Laplace transform is being performed analytically, and the original integral Fourier transform is being found using numerical methods for integrating

rapidly oscillating functions. In the case of a limited cylindrical shell, expansion into double trigonometric Fourier series in the angular and longitudinal coordinates is applied, as well as the integral Laplace transform in time. The inverse integral Laplace transform in this case is performed analytically. Verification of fundamental solutions has been carried out. Examples of calculations are given. The results are presented in the form of graphs.

A new numerical-analytical fundamental solution of the dynamic problem of elasticity theory for an orthotropic elastic thin unlimited cylindrical shell is obtained, as well as an analytical fundamental solution in the case of a limited Kirchhoff-Love shell. The convergence of the solution is established. To demonstrate the realism of the constructed functions, examples of calculations for one variant of the symmetry of an elastic medium are presented. The nature of the movement of non-stationary perturbations allowed us to evaluate solutions.

Fundamental solutions open up opportunities for solving new contact and inverse problems of load identification, allow performing applied research on calculating the stress and strain levels of orthotropic shells.

Keywords: non-stationary dynamics, orthotropic material, cylindrical shell, integral transformations, generalized functions, quadrature formulas

For citation: Petrov I.I., Serdyuk D.O., Skopincev P.D. Fundamental solutions for orthotropic cylindrical shell. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. DOI: [10.34759/trd-2022-124-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-11)

Введение

Тонкостенные конструкции, такие как оболочки, широко применяются в авиационной и ракетно-космической промышленности. Развитие аддитивных технологий, фотополимерной 3D печати, технологий изготовления полимерных композитов с пространственным армированием дает возможность проектирования тонкостенных конструкций из ортотропных материалов. Такие конструкционные материалы требуют разработки новых математических моделей, методов и алгоритмов расчетов, применяемых при проектировании новых перспективных летательных и космических аппаратов. При этом особое и важное значение имеют проблемы расчета конструкций, работающих в условиях нестационарных режимов взаимодействия, поскольку в таких задачах искомое решение существенно неоднородно по пространственным координатам и времени.

Вопросам динамики оболочек посвящено немало количество публикаций. В работах Богдановича А.Е. [1, 2], посвященных динамике ортотропных цилиндрических оболочек, находящихся под воздействием продольного ударного нагружения, рассмотрено неосесимметричное деформирование при нестационарном внешнем давлении. Работа Singh V.P., Dwivedi J.P. и Upadhyay P.C. [3] посвящена теоретическому анализу неосесимметричного динамического отклика ортотропной цилиндрической оболочки, подвергающейся воздействию движущейся нагрузки вдоль оси оболочки. Сибиряковым А.В. описаны задачи динамики тонких однородных цилиндрических оболочек из композитных материалов, испытывающих внутреннее и внешнее импульсное воздействие [4]. Моделью композиционного

материала являлась ограниченная слоистая среда, состоящая из ортотропных упругих слоев постоянной толщины. В статье [5] Xianyi Li и Yangkang Chen были определены уравнения движения для нестационарного динамического нагружения ортотропных круговых цилиндрических оболочек под действием внешнего гидростатического давления. Авторами Ларичевым Е.А., Сафроновым В.С., Туркиным И.К. работы [6] была представлена методика определения критической динамической нагрузки композиционной оболочки при сложном динамическом термосиловом нагружении. В статье [7] Моисеева К.А. и Панова Ю.Н. исследовалось динамическое поведение анизотропной цилиндрической оболочки, подкрепленной нерегулярным набором кольцевых шпангоутов. В работе [8] авторы Ельмуратов С.К. и Джахаев А.Е. приводят постановку задачи о поведении гибких оболочек и пластин, находящихся под воздействием поперечного динамического нагружения. Статья Карпова В.В. и др. [9] посвящена исследованию прочности шарнирно-неподвижно закрепленных по контуру пологих ортотропных оболочек, находящихся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Авторами Фирсановым В.В. и Во А.Х. статьи [10] был рассмотрен вариант уточненной теории расчета напряженно-деформированного состояния продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной осесимметричной нагрузки. Исследовано влияние нагрузки, толщины оболочки и размера зоны локального нагружения на напряженное состояние оболочки. Reza Okhovat и Anders Boström в своей работе [11] исследуют динамику ортотропных цилиндрических оболочек, а также определяют трехмерное точное решение для

свободно опертой трансверсально-изотропной оболочки произвольной толщины. В работе [12] исследуется нестационарное деформирование тонкой неограниченной по длине анизотропной круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины при воздействии на ее боковую поверхность сосредоточенной и распределённой по произвольной области нагрузки с переменной во времени амплитудой. В статье Коровайцевой Е.А. [13] представлены результаты тестирования алгоритма решения задач нелинейного осесимметричного динамического деформирования мягких оболочек из высокоэластичных материалов. Для решения нелинейной начально-краевой задачи разработан алгоритм, заключающийся в сведении системы уравнений движения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В работе Дьяченко Ю.П. и др. [14] предлагается методика точного (в рамках сформулированных допущений) нестационарного динамического расчёта пластин и цилиндрических оболочек ступенчатого сечения. В статье [15] авторами Коган Е.А. и Юрченко А.А. дан анализ современного состояния исследований, посвященных свободным и вынужденным нелинейным колебаниям трехслойных и многослойных тонких упругих пластин и оболочек при периодических воздействиях. Обсуждены различные подходы к решению нелинейных динамических уравнений слоистых пластин и оболочек, применяемые к рассматриваемому классу задач. Проанализировано влияние физико-механических свойств, геометрических параметров, структуры пакета слоев, формы пластин и граничных условий на характер нелинейных колебаний и вид амплитудно-частотных характеристик слоистых пластин и оболочек. Взаимодействие плоской

поступательной звуковой волны с анизотропными цилиндрическими оболочками рассматривается в работе Rajabi M. и Behzad M. [16]. Расчеты вынужденной реакции цилиндров и цилиндрических оболочек методом конечных элементов опубликованы Renno J. M. и Mase V. R. в работе [17]. В статье Xu X., Karami B., Janghorban M. [18] уделено внимание динамике нанооболочек. Исследованию проблем, связанных с динамикой, прочностью и устойчивостью оболочек, посвящены работы [19-21]. В работе Grigorenko Y. M. и Grigorenko A. Y. [22] приведены статические и динамические задачи для анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение. В [23] авторами Marchuk M.V. и Tuchapskii R.I. исследована динамика геометрически нелинейно-упругих анизотропных оболочек переменной толщины. В статье Okhovat R., Boström A. [24] методом степенных рядов получены уравнения динамики анизотропной цилиндрической оболочки.

Представленный обзор демонстрирует широкий спектр проведенных исследований и полученных результатов, касающихся стационарных процессов в ортотропных цилиндрических оболочках. В то же время, исследования в области нестационарного деформирования упругих ортотропных цилиндрических оболочек остаются актуальными. В настоящей работе применен метод функции Грина. В работах [25–35] рассмотрено применение метода функций Грина для решения нестационарных задач теории упругости и теории оболочек. Исследованию нестационарных контактных задач для тонких сферических, цилиндрических оболочек и упругого полупространства посвящены труды Тарлаковского Д.В. [25–

29]. Рассмотрены задачи для ограниченной балки Тимошенко под воздействием нестационарной нагрузки, проанализированы вопросы идентификации дефектов в упругих стержнях автора Вахтеровой Я.А. [30, 31]. Оконечниковым А.С. исследованы случаи нестационарного воздействия жесткого индентора на упругую полуплоскость [32, 33]. В работах Земскова А.В. [34, 35] исследуются нестационарные упругодиффузионные колебания свободно опертой прямоугольной изотропной пластины Кирхгофа-Лява и ортотропной балки Бернулли-Эйлера при воздействии распределенной поперечной нагрузки.

Основной целью настоящей работы является построение новых, универсальных по отношению к свойствам материала оболочки (изотропный, трансверсально-изотропный, ортотропный) фундаментальных решений для нормальных перемещений цилиндрической оболочки большой протяженности и шарнирно опертой по торцам оболочки.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую упругую цилиндрическую оболочку постоянной толщины h и радиусом r . Материал оболочки ортотропный, с симметрией относительно её срединной поверхности. Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат $O\alpha z$. В качестве математической модели оболочки принята модель Кирхгофа-Лява. Упругие свойства ортотропной оболочки Кирхгофа-Лява характеризуются четырьмя независимыми упругими постоянными $c_{11} = C^{1111}$, $c_{12} = C^{1122}$, $c_{22} = C^{2222}$, $c_{66} = C^{1212}$ – компонентами тензора упругих свойств материала в главных осях.

На боковую поверхность оболочки воздействует нестационарное давление $P(z, \alpha, t)$, распределенное по произвольной области D , принадлежащей боковой поверхности оболочки:

$$P(z, \alpha, t) = p(z, \alpha, t)H(t)\theta(D),$$

где t – время, $H(t)$ – функция Хэвисайда, $\theta(D)$ – характеристическая функция множества D :

$$\theta(D) = \begin{cases} 1, M \in D \\ 0, M \notin D, \end{cases}$$

где $M(z, \alpha)$ – точка боковой поверхности оболочки.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения в перемещениях упругой ортотропной оболочки Кирхгофа-Лява, начальные и граничные условия.

С целью решения задачи как класса, а также для «замедления» времени и упрощения соотношений, решение построено в безразмерном виде. Безразмерные уравнения движения в перемещениях для ортотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа-Лява при действии только нормального нестационарного давления имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} &= KW + P, \quad K = (K_{ij})_{3 \times 3}, \\ W &= (u_\alpha, u_z, w)^T, \quad P = (0, 0, p)^T, \end{aligned} \tag{1}$$

где дифференциальные операторы K_{ij} следующие:

$$K_{11}(u_\alpha) = a_1 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + a_2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2}, \quad K_{12}(u_z) = a_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z}, \quad K_{13}(w) = a_1 \frac{\partial w}{\partial \alpha} - a_4 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2},$$

$$K_{21}(u_\alpha) = K_{12}(u_\alpha), K_{22}(u_z) = a_5 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + a_6 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, K_{23}(w) = a_7 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + a_8 \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$K_{31}(u_\alpha) = -K_{13}(u_\alpha), K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z),$$

$$K_{33}(w) = -a_9 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - a_{10} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial z^2} - a_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - a_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - a_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - a_{14} w.$$

Начальные условия:

$$u_i \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = w \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия шарнирного опирания торцов оболочки:

$$w \Big|_{z=0,l} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{z=0,l} = 0. \quad (3)$$

Входящие в (1 – 3) безразмерные параметры и коэффициенты следующие (штрихами обозначены размерные величины):

$$u_\alpha = \frac{u'_\alpha}{L}, u_z = \frac{u'_z}{L}, w = \frac{w'}{L}, z = \frac{z'}{L}, \tau = \frac{c_* t}{L}, c_* = \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}},$$

$$p = \frac{P'L}{hc_{11}}, k = \frac{r}{L}, L = h, C_1 = \frac{c_{12}}{c_{11}}, C_2 = \frac{c_{22}}{c_{11}}, C_3 = \frac{c_{66}}{c_{11}},$$

$$a_1 = \frac{1}{k^2}, a_2 = C_3 + \frac{C_3}{12k^2}, a_3 = \frac{C_1}{k} + \frac{C_3}{k} - \frac{C_3}{12k^3}, a_4 = \frac{C_3}{6k^2},$$

$$a_5 = \frac{C_3}{12k^4} + \frac{C_3}{k^2}, a_6 = C_2, a_7 = \frac{C_3}{6k^3}, a_8 = \frac{C_1}{k}, a_9 = \frac{1}{12k^4},$$

$$a_{10} = \frac{C_1}{6k^2} + \frac{C_3}{3k^2}, a_{11} = \frac{C_2}{12}, a_{12} = \frac{1}{6k^4}, a_{13} = \frac{C_1}{6k^2}, a_{14} = \frac{1}{k^2} + \frac{1}{12k^4},$$

где ρ – плотность материала оболочки, u'_i – компоненты вектора тангенциальных перемещений, w' – нормальное перемещение, c_* – характерная скорость, τ – безразмерное время, k – коэффициент отношения радиуса оболочки к ее толщине, P' – нормальное давление, L – характерный размер.

Соотношения (1), (2) образуют начальную задачу для ортотропной оболочки большой протяженности, а соотношения (1) – (3) образуют начально-краевую задачу для шарнирно опёртой по торцам ортотропной оболочки.

Решение задач (1), (2) и (1) – (3) о поиске нормального нестационарного перемещения ортотропной цилиндрической оболочки может быть построено при помощи фундаментального решения:

$$w(z, \alpha, \tau) = G_w(z, \alpha, \tau) *** P(z, \alpha, \tau). \quad (4)$$

В (4) через * обозначены свертки по пространственным координатам z, α и времени τ , $G_w(z, \alpha, \tau)$ – искомое фундаментальное решение для нормального нестационарного перемещения.

2. Фундаментальное решение для ортотропной цилиндрической оболочки большой протяженности

Постановка задачи о фундаментальных решениях для ортотропной цилиндрической оболочки большой протяженности согласно начальной задаче (1), (2) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = KG + P, \quad K = (K_{ij})_{3 \times 3}, \quad (5)$$

$$G = (G_\alpha, G_z, G_w)^T, \quad P = (0, 0, p)^T, \quad p = \delta(\alpha, z, \tau),$$

$$G_\alpha|_{\tau=0} = \frac{\partial G_\alpha}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = G_z|_{\tau=0} = \frac{\partial G_z}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = G_w|_{\tau=0} = \frac{\partial G_w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (6)$$

где G_w – фундаментальное решение для нормального перемещения, G_α , G_z – фундаментальные решения для тангенциальных перемещений, $\delta(\square)$ – дельта-функция Дирака.

Представив входящие в (5) функции в виде экспоненциальных рядов:

$$\begin{aligned}
 G_w(z, \alpha, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{wn}(z, \tau) e^{in\alpha}, \\
 G_\alpha(z, \alpha, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\alpha n}(z, \tau) e^{in\alpha}, \quad G_z(z, \alpha, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{zn}(z, \tau) e^{in\alpha}, \\
 p(z, \alpha, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(z, \tau) e^{in\alpha}, \quad p_n(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \delta(z) \delta(\tau), \quad \alpha \in [-\pi, \pi],
 \end{aligned} \tag{7}$$

и применяя с учетом начальных условий (6) интегральное преобразование Лапласа [36, 37] по времени τ и интегральное преобразование Фурье [37] по координате z , получим уравнения движения относительно изображений фундаментальных решений в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned}
 s^2 \cdot G_{\alpha n}^{LF} + (a_1 n^2 + a_2 q^2) G_{\alpha n}^{LF} + a_3 n q G_{zn}^{LF} + (-a_1 i n - a_4 i n \cdot q^2) G_{wn}^{LF} &= 0, \\
 s^2 G_{zn}^{LF} + a_3 n q G_{\alpha n}^{LF} + (a_5 n^2 + a_6 q^2) G_{zn}^{LF} + (-a_8 i q + a_7 n^2 i q) G_{wn}^{LF} &= 0, \\
 s^2 G_{wn}^{LF} - (-a_1 i n - a_4 i n q^2) G_{\alpha n}^{LF} - (-a_8 i q + a_7 n^2 i q) G_{zn}^{LF} + \\
 (a_9 n^4 + a_{10} n^2 q^2 + a_{11} q^4 - a_{12} n^2 - a_{13} q^2 + a_{14}) G_{wn}^{LF} &= \frac{1}{2\pi},
 \end{aligned} \tag{8}$$

где q – параметр интегрального преобразования Фурье, s – параметр интегрального преобразования Лапласа, n – коэффициенты рядов, i – мнимая единица. Верхний знак « LF » у функции обозначает её интегральное преобразование по Лапласу и Фурье. Система уравнений (8) имеет структуру:

$$\mathbf{A} \mathbf{G} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s^2 + Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_2 & s^2 + Q_4 & Q_5 \\ -Q_3 & -Q_5 & s^2 + Q_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{\alpha n}^{LF} \\ G_{zn}^{LF} \\ G_{wn}^{LF} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

а решение для искомых функций $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, где \mathbf{A}^{-1} – матрица, обратная матрице \mathbf{A} , даст следующий результат для изображения фундаментального решения в коэффициентах рядов для нормального перемещения:

$$G_{wn}^{LF}(q,s) = \frac{1}{2\pi} \frac{s^4 + s^2 R_1 + R_2}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5}. \quad (10)$$

В (9) и (10):

$$\begin{aligned} Q_1 &= a_1 n^2 + a_2 q^2, \quad Q_2 = a_3 nq, \quad Q_3 = -a_1 in - a_4 inq^2, \quad Q_4 = a_5 n^2 + a_6 q^2, \\ Q_5 &= a_7 n^2 iq - a_8 iq, \quad Q_6 = a_9 n^4 + a_{10} n^2 q^2 + a_{11} q^4 - a_{12} n^2 - a_{13} q^2 + a_{14}, \\ R_1 &= Q_1 + Q_4, \quad R_2 = Q_1 Q_4 - Q_2^2, \quad R_3 = Q_1 + Q_4 + Q_6, \\ R_4 &= Q_1 Q_4 + Q_1 Q_6 - Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4 Q_6 + Q_5^2, \\ R_5 &= Q_1 Q_4 Q_6 + Q_1 Q_5^2 - Q_6 Q_2^2 - 2Q_2 Q_3 Q_5 + Q_4 Q_3^2. \end{aligned}$$

Оригинал фундаментального решения (10) для нормальных перемещений ортотропной цилиндрической оболочки находим последовательно, обращая по Лапласу и Фурье.

Знаменатель соотношения (10) имеет бикубическую структуру, а его корни, согласно формулам Кардано, следующие:

$$\begin{aligned} s_1 &= t_1^{\frac{1}{2}}, s_2 = -s_1, s_3 = t_2^{\frac{1}{2}}, s_4 = -s_3, s_5 = t_3^{\frac{1}{2}}, s_6 = -s_5, \\ t_1 &= A + B - \frac{R3}{3}, \quad t_{2,3} = -\frac{A+B}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{A-B}{2} - \frac{R3}{3}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{D}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{D}}, \\ D &= \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2, \quad P = \frac{3R4 - R3^2}{3}, \quad Q = \frac{2R3^3 - 9R3R4 + 27R5}{27}. \end{aligned}$$

Используя вторую теорему разложения для преобразования Лапласа:

$$G_{wn}^F(q, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^6 A_k(q) e^{s_k \tau}, \quad A_k(q) = (s - s_k) G_{wn}^{LF}(q, s_k). \quad (12)$$

С учетом (11) знаменатель функции (10) можно представить, как:

$$\begin{aligned} s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5 &= \prod_{k=1}^6 (s - s_k) = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_3)(s + s_3)(s - s_5)(s + s_5), \end{aligned}$$

тогда выражения для $A_k(q)$ из (12) примут вид:

$$\begin{aligned} A_1(q) &= \frac{s_1^4 + s_1^2 R_1 + R_2}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, \quad A_2(q) = -A_1(q), \\ A_3(q) &= \frac{s_3^4 + s_3^2 R_1 + R_2}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, \quad A_4(q) = -A_3(q), \\ A_5(q) &= \frac{s_5^4 + s_5^2 R_1 + R_2}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, \quad A_6(q) = -A_5(q). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (13) получим фундаментальное решение для нормального перемещения в изображении по Фурье:

$$G_{wn}^F(q, \tau) = \frac{1}{\pi} (A_1(q) sh(s_1 \tau) + A_3(q) sh(s_3 \tau) + A_5(q) sh(s_5 \tau)). \quad (14)$$

Оригинал по Фурье функции (14) определяется по известной формуле обращения:

$$G_{wn}(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{wn}^F(q, \tau) e^{iqz} dq, \quad (15)$$

где, задав некоторое большое число H , заменим несобственный интеграл из (15) определенным интегралом:

$$G_{wn}(z, \tau) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-H}^H G_{wn}^F(q, \tau) e^{iqz} dq,$$

для взятия которого применим численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций [38]. В результате, оригинал фундаментального решения в коэффициентах рядов примет вид:

$$G_{wn}(z, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta}{2} \left(e^{i \frac{q_{k+1}z + q_k z}{2}} \cdot (D_1 G_{wn}^F(q_k, \tau) + D_2 G_{wn}^F(q_{k+1}, \tau)) \right). \quad (16)$$

$$\Delta = \frac{2H}{N}, \quad m = \frac{\Delta}{2}, \quad D_{1,2} = \frac{\sin m}{m} \pm \frac{m \cos m - \sin m}{m^2} i,$$

$$q_k = -H + k\Delta, \quad q_{k+1} = -H + (k+1)\Delta, \quad k = 0..N-1.$$

В (16) H – границы интегрирования, N – число шагов интегрирования, Δ – шаг интегрирования. Параметры численного интегрирования N и H определяются с заданной точностью по алгоритму (17) – (18).

Для произвольно заданных стартовых значений N_i^m и H_i (m, i – номера) проводится анализ функций G_{wn} (при $n=1$) по непрерывной норме до выполнения критерия:

$$\|G_{w1}^{i,m+1}(z, \tau_{\max}) - G_{w1}^{i,m}(z, \tau_{\max})\| = \max_{a_1 \leq z \leq a_2} |G_{w1}^{i,m+1}(z, \tau_{\max}) - G_{w1}^{i,m}(z, \tau_{\max})| = \delta_i^m, \quad \delta_i^m \leq \delta, \quad (17)$$

где δ – заданное минимальное значение нормы (заданная точность), $\tau_{\max}, z \in [a_1, a_2]$ – максимальное время и область исследования функции. В (17) функция $G_{w1}^{i,m}$ строится для N_i^m , а функция $G_{w1}^{i,m+1}$ для $N_i^{m+1} = N_i^m + \Delta_N$ ($\Delta_N = const$ – произвольно заданное число). В результате выполнения критерия (17) для произвольно установленных границ интегрирования H_i с заданной точностью δ вычисляется число шагов интегрирования N_i^{m+1} . Процедура (17) повторяется до выполнения критерия:

$$\|G_{w1}^{i+1}(z, \tau_{\max}) - G_{w1}^i(z, \tau_{\max})\| = \max_{a_1 \leq z \leq a_2} |G_{w1}^{i+1}(z, \tau_{\max}) - G_{w1}^i(z, \tau_{\max})| = \eta_i, \quad \eta_i \leq \delta, \quad (18)$$

что и определяет итоговые параметры N и H численного интегрирования.

С учетом (7) и (16) фундаментальное решение для нормальных перемещений ортотропной цилиндрической оболочки большой протяженности примет вид:

$$G_w(z, \alpha, \tau) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-T}^T e^{in\alpha} \frac{\Delta}{2} \left(e^{i \frac{q_{k+1}z + q_k z}{2}} \cdot (D_1 G_{wn}^F(q_k, \tau) + D_2 G_{wn}^F(q_{k+1}, \tau)) \right). \quad (19)$$

3. Фундаментальное решение для шарнирно опертой ортотропной цилиндрической оболочки

Постановка задачи о фундаментальных решениях для шарнирно опертой по торцам ортотропной цилиндрической оболочки согласно начально-краевой задаче (1) – (3) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 G^*}{\partial \tau^2} = K G^* + P, \quad K = (K_{ij})_{3 \times 3}, \quad (20)$$

$$G^* = (G_\alpha^*, G_z^*, G_w^*)^T, \quad P = (0, 0, p)^T, \quad p = \delta(\alpha, z - \xi, \tau),$$

$$G_\alpha^*|_{\tau=0} = \frac{\partial G_\alpha^*}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = G_z^*|_{\tau=0} = \frac{\partial G_z^*}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = G_w^*|_{\tau=0} = \frac{\partial G_w^*}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad G_w^*|_{z=0,l} = \frac{\partial^2 G_w^*}{\partial z^2} \Big|_{z=0,l} = 0, \quad (21)$$

где G_w^* – фундаментальное решение для нормального перемещения, G_α^* , G_z^* – фундаментальные решения для тангенциальных перемещений, $\delta(\square)$ – дельта-функция Дирака.

Представив входящие в (20) функции в виде двойных тригонометрических рядов Фурье, удовлетворяющих граничным условиям из (21):

$$\begin{aligned}
G_{\alpha}^*(z, \alpha, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{\alpha nm}^*(\tau) \sin(\lambda_n z) \sin(\mu_m \alpha), \\
G_z^*(z, \alpha, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_{z nm}^*(\tau) \cos(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \\
G_w^*(z, \alpha, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_{w nm}^*(\tau) \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \\
\delta(z - \xi, \alpha, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{nm}(\xi) \delta_{nm}(\tau) \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \\
\delta_{nm}(\xi) &= \frac{2}{\pi l} \sin(\lambda_n \xi), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \mu_m = m, \quad z \in [0, l], \alpha \in [-\pi, \pi],
\end{aligned} \tag{22}$$

где l – длина оболочки, n, m – коэффициенты рядов. И применив интегральное преобразование Лапласа по времени τ , получим следующую систему уравнений относительно фундаментальных решений в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned}
j^2 G_{\alpha nm}^{*L} + (a_1 \mu_m^2 + a_2 \lambda_n^2) G_{\alpha nm}^{*L} - a_3 \mu_m \lambda_n G_{z nm}^{*L} + (a_1 \mu_m + a_4 \mu_m \lambda_n^2) G_{w nm}^{*L} &= 0, \\
j^2 G_{z nm}^{*L} - a_3 \mu_m \lambda_n G_{\alpha nm}^{*L} + (a_5 \mu_m^2 + a_6 \lambda_n^2) G_{z nm}^{*L} + (a_7 \mu_m^2 \lambda_n - a_8 \lambda_n) G_{w nm}^{*L} &= 0, \\
j^2 G_{w nm}^{*L} + (a_1 \mu_m + a_4 \mu_m \lambda_n^2) G_{\alpha nm}^{*L} + (a_7 \mu_m^2 \lambda_n - a_8 \lambda_n) G_{z nm}^{*L} + \\
+ (a_9 \mu_m^4 + a_{10} \mu_m^2 \lambda_n^2 + a_{11} \lambda_n^4 - a_{12} \mu_m^2 - a_{13} \lambda_n^2 + a_{14}) G_{w nm}^{*L} &= \delta_{nm}(\xi),
\end{aligned} \tag{23}$$

где j – параметр интегрального преобразования Лапласа. Верхний знак « L » у функции обозначает её интегральное преобразование по Лапласу. Система уравнений (23) имеет структуру:

$$\mathbf{C}\mathbf{G} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} j^2 + \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_2 & j^2 + \Lambda_4 & \Lambda_5 \\ \Lambda_3 & \Lambda_5 & j^2 + \Lambda_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{\alpha nm}^{*L} \\ G_{z nm}^{*L} \\ G_{w nm}^{*L} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{nm}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{24}$$

а решение для искомых функций $\mathbf{G} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{D}$, где \mathbf{C}^{-1} – матрица, обратная матрице \mathbf{C} , даст следующий результат для изображения фундаментального решения в коэффициентах рядов для нормального перемещения:

$$G_{wmm}^{*L}(j; \xi) = \delta_{nm}(\xi) \frac{j^4 + j^2 P_1 + P_2}{j^6 + j^4 P_3 + j^2 P_4 + P_5}. \quad (25)$$

В (24) и (25):

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= a_1 \mu_m^2 + a_2 \lambda_n^2, \quad \Lambda_2 = -a_3 \mu_m \lambda_n, \quad \Lambda_3 = a_1 \mu_m + a_4 \mu_m \lambda_n^2, \quad \Lambda_4 = a_5 \mu_m^2 + a_6 \lambda_n^2, \\ \Lambda_5 &= a_7 \mu_m^2 \lambda_n - a_8 \lambda_n, \quad \Lambda_6 = a_9 \mu_m^4 + a_{10} \mu_m^2 \lambda_n^2 + a_{11} \lambda_n^4 - a_{12} \mu_m^2 - a_{13} \lambda_n^2 + a_{14}, \\ P_1 &= \Lambda_1 + \Lambda_4, \quad P_2 = \Lambda_1 \Lambda_4 - \Lambda_2^2, \quad P_3 = \Lambda_1 + \Lambda_4 + \Lambda_6, \\ P_4 &= \Lambda_1 \Lambda_4 + \Lambda_1 \Lambda_6 - \Lambda_2^2 - \Lambda_3^2 + \Lambda_4 \Lambda_6 - \Lambda_5^2, \\ P_5 &= \Lambda_1 \Lambda_4 \Lambda_6 - \Lambda_1 \Lambda_5^2 - \Lambda_2^2 \Lambda_6 + 2 \Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_5 - \Lambda_3^2 \Lambda_4. \end{aligned}$$

Оригинал фундаментального решения (25) для нормальных перемещений шарнирно опертой по торцам ортотропной цилиндрической оболочки найден аналитически с применением второй теоремы разложения для преобразования Лапласа.

Знаменатель соотношения (25) имеет бикубическую структуру, а его корни, согласно формулам Кардано, следующие:

$$\begin{aligned} j_1 &= f_1^{\frac{1}{2}}, j_2 = -j_1, j_3 = f_2^{\frac{1}{2}}, j_4 = -j_3, j_5 = f_3^{\frac{1}{2}}, j_6 = -j_5, \\ f_1 &= E + D - \frac{P3}{3}, f_{2,3} = -\frac{E + D}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{E - D}{2} - \frac{P3}{3}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \sqrt[3]{-\frac{Y}{2} + \sqrt{S}}, \quad D = \sqrt[3]{-\frac{Y}{2} - \sqrt{S}}, \\ S &= \left(\frac{U}{3}\right)^3 + \left(\frac{Y}{2}\right)^2, \quad U = \frac{3P4 - P3^2}{3}, \quad Y = \frac{2P3^3 - 9P3P4 + 27P5}{27}. \end{aligned}$$

Используя вторую теорему разложения для преобразования Лапласа:

$$G_{wmm}^*(\tau; \xi) = \delta_{nm}(\xi) \sum_{k=1}^6 V_k e^{j_k \tau}, \quad V_k = (j - j_k) G_{wmm}^{*L}(j_k; \xi). \quad (27)$$

С учетом (26) знаменатель функции (25) можно представить, как:

$$j^6 + j^4 P_3 + j^2 P_4 + P_5 = \prod_{k=1}^6 j - j_k = \\ = (j - j_1)(j + j_1)(j - j_3)(j + j_3)(j - j_5)(j + j_5)$$

тогда выражения для V_k из (27) примут вид:

$$V_1 = \frac{j_1^4 + j_1^2 R_1 + R_2}{2j_1(j_1^2 - j_3^2)(j_1^2 - j_5^2)}, V_2 = -V_1, \\ V_3 = \frac{j_3^4 + j_3^2 R_1 + R_2}{2j_3(j_3^2 - j_1^2)(j_3^2 - j_5^2)}, V_4 = -V_3, \\ V_5 = \frac{j_5^4 + j_5^2 R_1 + R_2}{2j_5(j_5^2 - j_3^2)(j_5^2 - j_1^2)}, V_6 = -V_5. \quad (28)$$

С учетом (22) и (28) фундаментальное решение для нормальных перемещений шарнирно опертой по торцам ортотропной цилиндрической оболочки примет вид:

$$G_w^*(z, \alpha, \tau; \xi) = \frac{4}{\pi l} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M (V_1 sh(j_1 \tau) + V_3 sh(j_3 \tau) + V_5 sh(j_5 \tau)) \times \\ \times \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha) \sin(\lambda_n \xi). \quad (29)$$

4. Анализ результатов

Анализ построенных фундаментальных решений проведен на примере шарнирно опертой оболочки и оболочки большой протяженности, выполненных из полимерного композитного материала со следующими приведенными техническими постоянными (модули упругости 1-го и 2-го рода в Па):

$$E_1 = 8,029 \times 10^{10}, E_2 = 3,226 \times 10^{10}, E_3 = 8,43 \times 10^9, \\ G_{12} = 1,656 \times 10^{10}, G_{23} = 1,656 \times 10^{10}, G_{31} = 1,656 \times 10^{10}, \\ \nu_{12} = 0,176, \nu_{23} = 0,176, \nu_{13} = 0,176,$$

что соответствует следующим значениям упругих постоянных c_{ij} :

$$c_{11} = 8,168 \times 10^{10}, c_{12} = 6,091 \times 10^9, c_{22} = 3,298 \times 10^{10}, c_{66} = 1,656 \times 10^{10}.$$

Отношение радиуса оболочки к ее толщине k принято равным 50, безразмерная длина шарнирно опертой оболочки $l = 20$.

Определим параметры численного интегрирования N , H в (16) и количество членов ряда T в (19). Результаты выполнения критерия (17) представлены в таблице 1 ($\tau_{\max} = 10, z \in [0, 20], \delta = 0,001$), а работа критерия (18) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \|G_{wl}^2(z, 10) - G_{wl}^1(z, 10)\| &= \max_{0 \leq z \leq 20} |G_{wl}^2(z, 10) - G_{wl}^1(z, 10)| = 0,00185 > \delta, \\ \|G_{wl}^3(z, 10) - G_{wl}^2(z, 10)\| &= \max_{0 \leq z \leq 20} |G_{wl}^3(z, 10) - G_{wl}^2(z, 10)| = 0,00087 < \delta. \end{aligned}$$

Таблица 1. Расчет параметров численного интегрирования

Этап №1	$H_1 = 10$						
N_1^m	$N_1^1 = 125$	$N_1^2 = 135$	$N_1^3 = 145$	$N_1^4 = 155$	$N_1^5 = 165$	$N_1^6 = 175$	$N_1^7 = 185$
Δ	0,16	0,14814	0,13793	0,12903	0,12121	0,11428	0,10811
$\ G_{wl}^{1,m+1} - G_{wl}^{1,m}\ $		0,00445	0,00376	0,003148	0,002407	0,001893	0,000773
Результаты этапа №1	$G_{wl}^1 : H_1 = 10, N_1 = 185, (\Delta = 0,10811).$						
Этап №2	$H_2 = 15$						
N_2^m	$N_2^1 = 295$	$N_2^2 = 305$	$N_2^3 = 315$	$N_2^4 = 325$	$N_2^5 = 335$	$N_2^6 = 345$	$N_2^7 = 355$
Δ	0,10169	0,09836	0,09523	0,09230	0,08955	0,08695	0,08450
$\ G_{wl}^{2,m+1} - G_{wl}^{2,m}\ $		0,001702	0,001658	0,001475	0,0013	0,00108	0,0005
Результаты этапа №2	$G_{wl}^2 : H_2 = 15, N_2 = 355, (\Delta = 0,084507).$						
Этап №3	$H_3 = 20$						
N_3^m	$N_3^1 = 435$	$N_3^2 = 445$	$N_3^3 = 455$	$N_3^4 = 465$	$N_3^5 = 475$	$N_3^6 = 485$	$N_3^7 = 495$
Δ	0,09195	0,08988	0,08791	0,08602	0,08421	0,08247	0,08081
$\ G_{wl}^{3,m+1} - G_{wl}^{3,m}\ $		0,0016	0,001271	0,001187	0,001096	0,00106	0,00098
Результаты этапа №3	$G_{wl}^3 : H_3 = 20, N_3 = 495, (\Delta = 0,08081)$						

Для вычисленных параметров численного интегрирования ($H = 20, N = 495$) результаты оценки сходимости функции $G_w(z, 0, 1)$ и $G_w(z, 0, 10)$ по количеству членов ряда T представлены на рис. 1 а, б соответственно (сплошная кривая – $T = 100$, штриховая кривая – $T = 200$, штрихпунктирная кривая – $T = 300$).

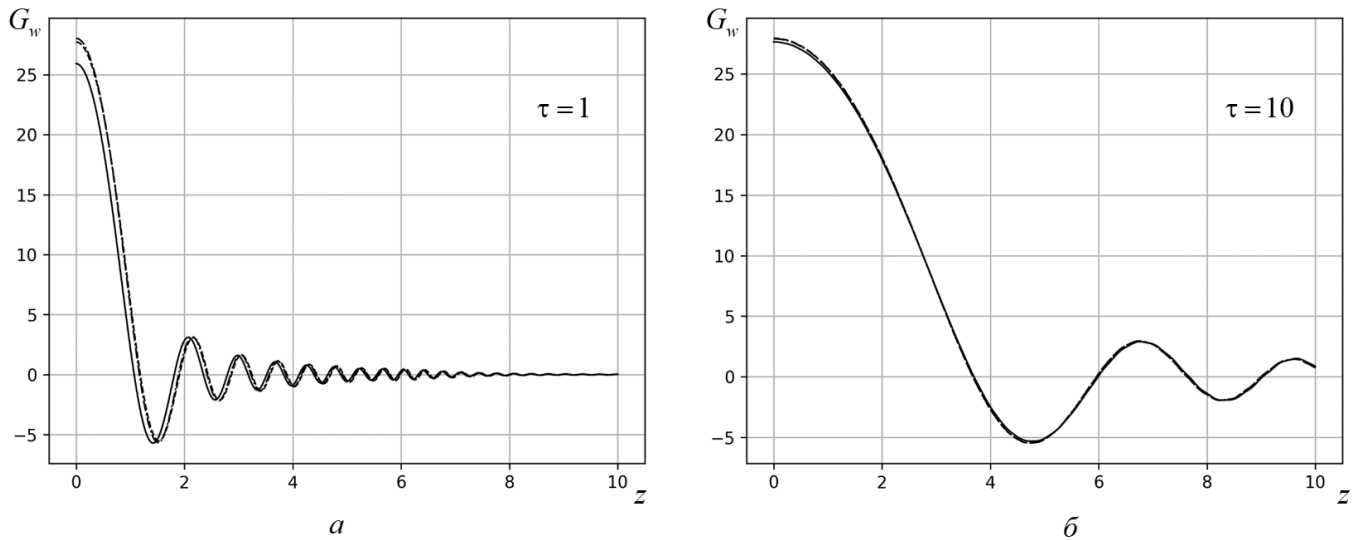


Рис. 1. Оценка сходимости функции G_w по количеству членов ряда T

Из результатов на рис. 1 а, б видно, что сходимость достигается при $T = 300$, кроме того:

$$\begin{aligned} \left\| G_w(z, 0, 1) \Big|_{T=300} - G_w(z, 0, 1) \Big|_{T=200} \right\| &= \max_{0 \leq z \leq 10} \left| G_w(z, 0, 1) \Big|_{T=300} - G_w(z, 0, 1) \Big|_{T=200} \right| = 0,465, \\ \left\| G_w(z, 0, 10) \Big|_{T=300} - G_w(z, 0, 10) \Big|_{T=200} \right\| &= \max_{0 \leq z \leq 10} \left| G_w(z, 0, 10) \Big|_{T=300} - G_w(z, 0, 10) \Big|_{T=200} \right| = 0,035. \end{aligned}$$

Для функции G_w^* (29) последовательно установим количество членов ряда N и M . Зададим произвольные стартовые значения $N = 50, M = 50$ и оценим сходимость функции $G_w^*(z, 0, 1)$, повышая число членов ряда N . Результаты в виде графиков представлены на рис. 2 (сплошная кривая – $N = 50$, штриховая кривая – $N = 100$, штрихпунктирная кривая – $N = 150$).

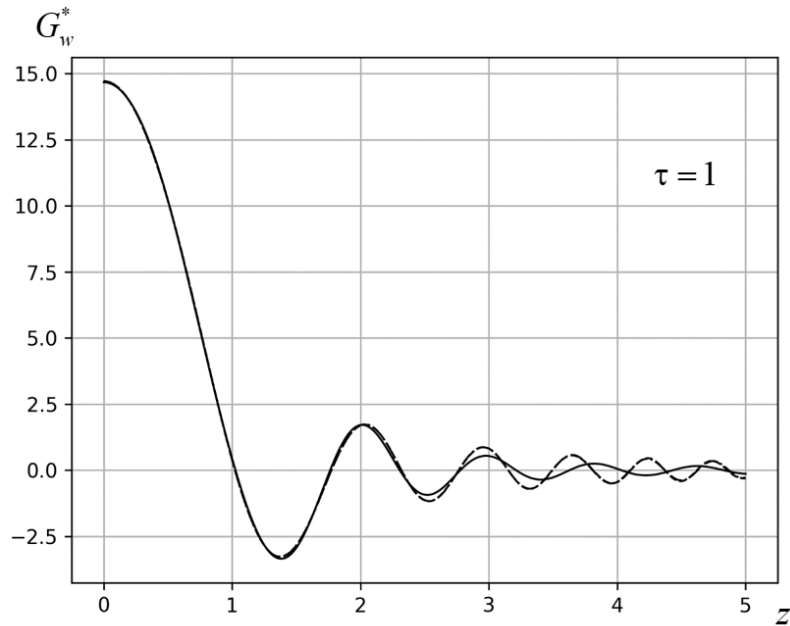


Рис. 2. Оценка сходимости функции G_w^* по количеству членов ряда N

Представленные на рис. 2 результаты демонстрируют сходимость при $N = 150$, а именно, норма функций при $N = 100$ и $N = 150$ составила:

$$\left\| G_w^*(z, 0, 1) \Big|_{N=150} - G_w^*(z, 0, 1) \Big|_{N=100} \right\| = \max_{0 \leq z \leq 5} \left| G_w^*(z, 0, 1) \Big|_{N=150} - G_w^*(z, 0, 1) \Big|_{N=100} \right| = 0,043.$$

Результаты оценки сходимости функции $G_w^*(z, 0, 1)$ и $G_w^*(z, 0, 10)$ по количеству членов ряда M при $N = 150$ представлены на рис. 3 а, б соответственно (сплошная кривая – $M = 100$, штриховая кривая – $M = 200$, штрихпунктирная кривая – $M = 300$).

Из результатов на рис. 3 а, б видно, что сходимость достигается при $M = 300$, кроме того:

$$\left\| G_w^*(z, 0, 1) \Big|_{M=300} - G_w^*(z, 0, 1) \Big|_{M=200} \right\| = \max_{0 \leq z \leq 10} \left| G_w^*(z, 0, 1) \Big|_{M=300} - G_w^*(z, 0, 1) \Big|_{M=200} \right| = 0,448,$$

$$\left\| G_w^*(z, 0, 10) \Big|_{M=300} - G_w^*(z, 0, 10) \Big|_{M=200} \right\| = \max_{0 \leq z \leq 10} \left| G_w^*(z, 0, 10) \Big|_{M=300} - G_w^*(z, 0, 10) \Big|_{M=200} \right| = 0,08.$$

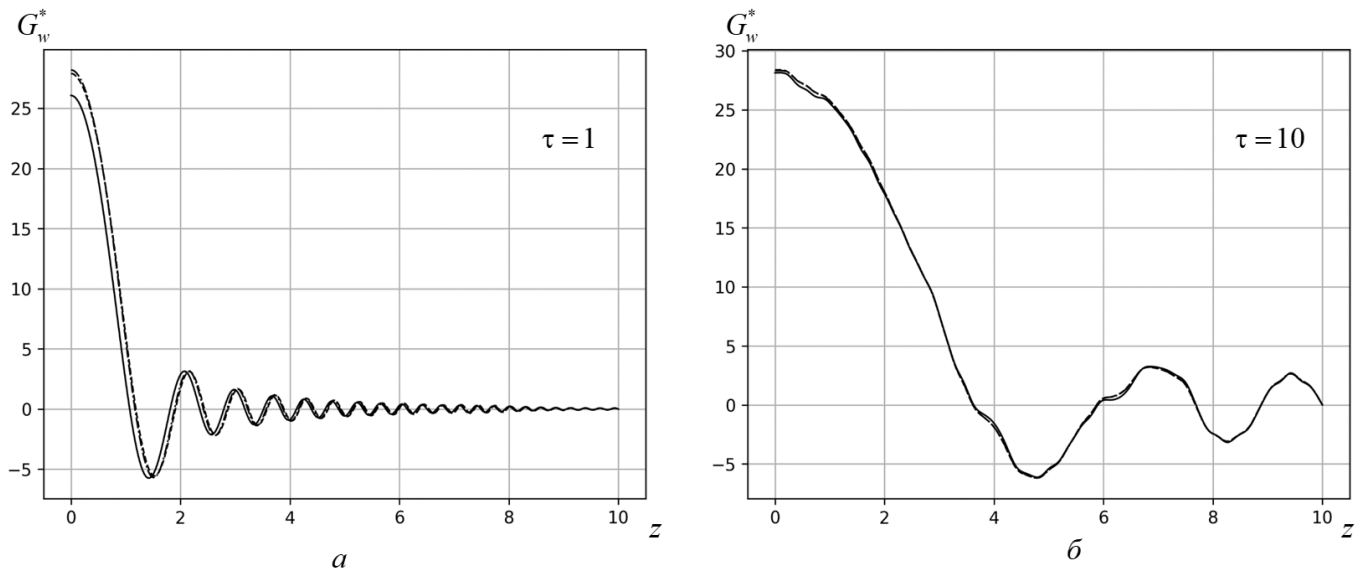


Рис. 3. Оценка сходимости функции G_w^* по количеству членов ряда M

Для установленных выше параметров численного интегрирования и суммирования на рис. 4 представлены графики зависимости значений фундаментальных решений G_w (19) и G_w^* (29) в координате воздействия дельта-функции Дирака от времени τ (сплошная кривая – $G_w(0,0,\tau)$, штриховая кривая – $G_w^*(0,0,\tau)$).

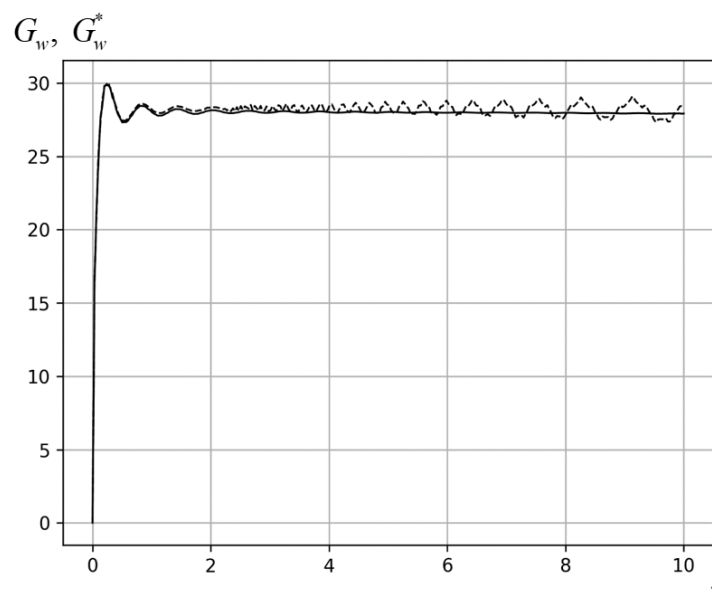


Рис. 4. Фундаментальные решения $G_w(0,0,\tau)$, $G_w^*(0,0,\tau)$

Из результатов, представленных на рис. 4, видно, что до момента времени $\tau \approx 1$ графики фундаментальных решений для шарнирно опертой оболочки и оболочки большой протяженности в точке действия дельта-функции Дирака имеют одинаковый характер и близки численно. Расхождение амплитуд для времени $\tau > 1$ обусловлено возрастающим влиянием граничных условий в шарнирно опертой оболочке.

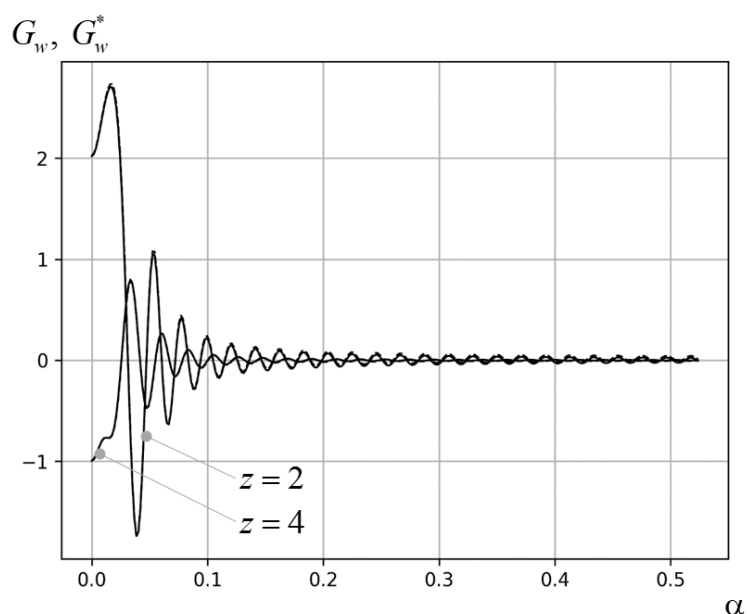


Рис. 5. Фундаментальные решения $G_w(2, \alpha, 1)$, $G_w(4, \alpha, 1)$ и $G_w^*(2, \alpha, 1)$, $G_w^*(4, \alpha, 1)$

На рис. 5 представлены зависимости фундаментальных решений G_w (19) и G_w^* (29) от угла α ($\alpha = 0.. \pi / 6$) при $z = 2$ и $z = 4$ в момент времени $\tau = 1$ (сплошная кривая – $G_w(2, \alpha, 1)$, $G_w(4, \alpha, 1)$, штриховая кривая – $G_w^*(2, \alpha, 1)$, $G_w^*(4, \alpha, 1)$).

Из результатов, представленных на рис. 5, видно, что графики имеют одинаковый характер и близки численно. В целом, результаты, представленные на рис. 1, рис. 3 – рис. 5 позволяют говорить об адекватности построенных фундаментальных решений и, в некоторой степени, об их верификации, поскольку

методы решения дифференциальных уравнений для производных $\frac{\partial^n}{\partial z^n}$ имеют принципиальные отличия – применение численного метода интегрирования быстро осциллирующих функций для оболочки большой протяжённости и разложение по собственным функциям в виде тригонометрических рядов Фурье для шарнирно опертой оболочки.

5. Пример расчета

Найденные фундаментальные решения (19) и (29) открывают широкие возможности в вопросах прикладного характера, связанных с исследованиями нестационарного нормального прогиба (4), а также напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек на основе функции (4) по известным соотношениям теории оболочек (39) и обобщенного закона Гука.

Для описанной выше шарнирно опертой ортотропной оболочки исследуем характер распространения нестационарных нормальных перемещений. В случае воздействия сосредоточенной, подвижной вдоль оси z нагрузки (по образующей цилиндрической оболочки), выражение (4) для нормального прогиба примет вид:

$$w(z, \alpha, \tau) = \int_0^{\tau} G_w^*(z, \alpha - \alpha_*, t - \tau; f(\tau)) p(\tau) d\tau, f(\tau) = z_* + V_1 \tau. \quad (30)$$

Здесь $p(\tau)$ – закон изменения амплитуды воздействия, $f(\tau)$ – закон изменения координат воздействия нагрузки, α_*, z_* – первоначальные координаты расположения нагрузки, V_1 – скорость движения нагрузки в направлении оси z .

Применяя к (30) метод прямоугольников [36], с учетом свойств дельта функции Дирака, выражение для нестационарного нормального прогиба шарнирно опертой ортотропной оболочки примет вид:

$$w(z, \alpha, \tau) \approx \frac{\tau}{m} \sum_{i=1}^m G\left(z, \alpha - \alpha_*, \tau - \frac{\tau}{m}i; f\left(\frac{\tau}{m}i\right)\right) p\left(\frac{\tau}{m}i\right). \quad (31)$$

Приняв в (30):

$$p(\tau) = -2\sin(\tau)e^{-2\tau}, f(\tau) = l/2 + \tau, \alpha_* = 0,$$

получим результаты, представленные на рис 6 а, б – нестационарный безразмерный нормальный прогиб ортотропной оболочки в фиксированные моменты времени при $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{6}$ соответственно (сплошная кривая – $\tau = 1$, штриховая кривая – $\tau = 2$, штрихпунктирная кривая – $\tau = 3$).

Из результатов, представленных на рис. 6 видно, что движение нагрузки приводит к смещению максимального прогиба оболочки в направлении ее движения. Кроме того, локальные максимумы прогиба за нагрузкой гораздо меньше, чем перед нагрузкой. Графики на рис. 6 построены при $m = 50$ в (31), что обусловлено анализом сходимости результатов.

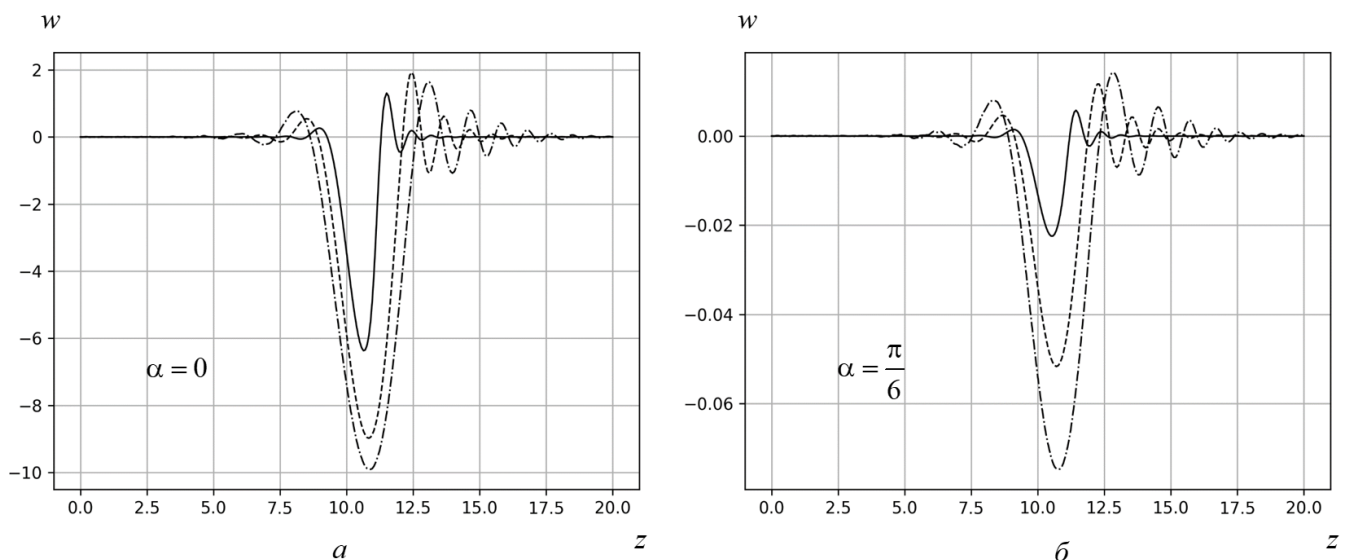


Рис. 6. Нестационарный безразмерный нормальный прогиб ортотропной шарнирно опертой оболочки

Реализация алгоритмов и построение приведенных изображений выполнено при помощи языка программирования Python.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-19-00217).

Выводы

Получено новое численно-аналитическое фундаментальное решение динамической задачи теории упругости для тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки большой протяженности, а также аналитическое фундаментальное решение для шарнирно опертой ортотропной оболочки Кирхгофа-Лява. Фундаментальное решение для ортотропной оболочки большой протяженности построено с применением экспоненциальных рядов Фурье и интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Фундаментальное решение для ортотропной шарнирно опертой по торцам оболочки построено с применением

двойных тригонометрических рядов Фурье и интегрального преобразования Лапласа.

Для заданных численных параметров установлена сходимость построенных нестационарных функций и проведен анализ и сопоставление результатов, позволивший дать оценку адекватности построенных фундаментальных решений. Приведен пример расчета нестационарного нормального прогиба шарнирно опертой ортотропной цилиндрической оболочки при воздействии подвижной нагрузки с переменной во времени амплитудой.

Построенные фундаментальные решения открывают возможности для решения новых контактных и обратных задач по идентификации нагрузки, а также, при переходе к размерным параметрам, позволяют выполнять прикладные исследования, связанные с оценкой нестационарного напряженно-деформированного состояния ортотропных оболочек.

Список источников

1. Богданович А.Е. Деформирование и прочность цилиндрических композитных оболочек при динамических нагрузках. Дисс. ... доктора физ.мат.наук. Рига, 1985, 560 с.
2. Богданович А.Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 295 с.

3. Singh V.P., Dwivedi J.P., Upadhyay P.C. Non-axisymmetric dynamic response of buried orthotropic cylindrical shells under moving load // Structural Engineering and Mechanics, 1999, vol. 8, issue 1, pp. 39-51.
4. Сибиряков А.В. Динамика слоистых композиционных пластин и оболочек при импульсном нагружении: дисс.... доктора техн. наук. Москва, 2002. 319 с.
5. Xianyi Li, Yangkang Chen. Transient dynamic response analysis of orthotropic circular cylindrical shell under external hydrostatic pressure // Journal of Sound and Vibration, 2002, vol. 257(5), pp. 967-976. DOI: [10.1006/jsvi.2002.5259](https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5259)
6. Ларичев Е.А., Сафронов В.С., Туркин И.К. Определение критической динамической нагрузки композитной оболочки при сложном термосиловом нагружении // Труды МАИ. 2007. № 27. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34009>
7. Моисеев К.А., Панов Ю.Н. Методика расчета колебаний подкрепленной анизотропной цилиндрической оболочки при действии подвижной нагрузки // Труды МАИ. 2011. № 48. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=27514>
8. Ельмуратов С.К., Джахаев А.Е. Вынужденные колебания ортотропных оболочек и пластин при действии сосредоточенных масс и возмущающей нагрузки // Наука и техника Казахстана. 2013. № 1-2. С. 23-26.
9. Карпов В.В., Семенов А.А., Холод Д.В. Исследование прочности пологих ортотропных оболочек из углепластика // Труды МАИ. 2014. № 76. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=49970>

10. Фирсанов В.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=98866>
11. Reza Okhovat, Anders Boström. Dynamic equations for an orthotropic cylindrical shell // Composite Structures, 2018, vol. 184, pp. 1197-1203. DOI: [10.1016/j.compstruct.2017.10.034](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.034)
12. Локтева Н.А., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д., Федотенков Г.В. Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161423>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)
13. Коровайцева Е.А. Исследование особенностей решения задач нестационарной динамики мягких оболочек из высокоэластичных материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2021. Т. 83. № 2. С. 151-159.
14. Дьяченко Ю.П., Еленицкий Э.Я., Петров Д.В. Нестационарные задачи динамики пластин и цилиндрических оболочек вращения ступенчатого сечения // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2011. № 2 (23). С. 278-288.
15. Коган Е.А., Юрченко А.А. Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор) // Известия МГТУ МАМИ. 2014. Т. 4. № 1(19). С. 55-70.

16. Rajabi M., Behzad M. Interaction of a plane progressive sound wave with anisotropic cylindrical shells // Composite Structures, 2014, vol. 116, no. 1, pp. 747-760. DOI: [10.1016/j.compstruct.2014.05.029](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.029).
17. Renno J.M., Mace B.R. Calculating the forced response of cylinders and cylindrical shells using the wave and finite element method // Journal of Sound and Vibration, 2014, vol. 333, no. 21, pp. 5340-5355. DOI: [10.1016/j.jsv.2014.04.042](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.04.042).
18. Xu X., Karami B., Janghorban M. On the dynamics of nanoshells // International Journal of Engineering Science, 2021, vol. 158. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2020.103431](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103431).
19. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ. 2019. №105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104003>
20. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58589>.
21. Карпов В.В., Семенов А.А., Холод Д.В. Исследование прочности пологих ортотропных оболочек из углепластика // Труды МАИ. 2014. № 76. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49970>.
22. Grigorenko Y.M., Grigorenko A.Y. Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review) // International Applied Mechanics, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 123-193. DOI: [10.1007/s10778-013-0558-x](https://doi.org/10.1007/s10778-013-0558-x).

23. Marchuk M.V., Tuchapskii R.I. Dynamics of Geometrically Nonlinear Elastic Nonthin Anisotropic Shells of Variable Thickness // *International Applied Mechanics*, 2017, vol. 53, no. 6, pp. 655-667. DOI: [10.1007/s10778-018-0848-4](https://doi.org/10.1007/s10778-018-0848-4).
24. Okhovat R., Boström A. Dynamic equations for an anisotropic cylindrical shell using a power series method // *Civil-Comp Proceedings*, 2014, vol. 106.
25. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction) // *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239–247. DOI: [10.3103/S0025654411020129](https://doi.org/10.3103/S0025654411020129).
26. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178).
27. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell // *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208-217. DOI: [10.3103/S0025654415020107](https://doi.org/10.3103/S0025654415020107)
28. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall // *Shell Structures: Theory and Applications*, 2017, vol. 4, pp. 305-308. DOI: [10.1201/9781315166605-68](https://doi.org/10.1201/9781315166605-68).
29. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier // In book: *Proceedings of the First International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics*, 2019, pp. 385-386. DOI: [10.1007/978-3-319-91989-8_92](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_92).

30. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length // Journal of Applied Engineering Science, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 687–692. DOI:[10.5937/jaes0-28073](https://doi.org/10.5937/jaes0-28073)
31. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439–447. DOI:[10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061)
32. Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V. Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2016, vol. 158, no 1, pp. 012073. DOI:[10.1088/1757-899X/158/1/012073](https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012073).
33. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 489-498. DOI: [10.1134/S1995080219030132](https://doi.org/10.1134/S1995080219030132).
34. Юй Гу, Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Упругодиффузионные колебания изотропной пластины Кирхгофа–Лява под действием нестационарной распределенной поперечной нагрузки // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2021. № 3. С. 48–57. DOI: [10.15593/perm.mech/2021.3.05](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.3.05)
35. Вестяк А.В., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Модель нестационарного изгиба упругодиффузионной балки Бернулли-Эйлера на винклеровском основании // Механика композиционных материалов и конструкций. 2021. Т. 27. № 1. DOI: [10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.110_124.08](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.110_124.08)

36. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований. – М.: Изд-во НАУКА, 1971. – 288 с.
37. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах: Учеб. пособие. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
38. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 630 с.
39. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 448 с.

References

1. Bogdanovich A.E. *Deformirovanie i prochnost' tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek pri dinamicheskikh nagruzkakh* (Deformation and Strength for Cylindrical Composite Shells under Dynamic Loads), Riga, 1985, 560 p.
2. Bogdanovich A.E. *Nelineinye zadachi dinamiki tsilindricheskikh kompozitnykh obolochek* (Non-linear Problems of Dynamics of Cylindrical Composite Shells), Riga, Zinatne, 1987, 295 p.
3. Singh V.P., Dwivedi J.P., Upadhyay P.C. Non-axisymmetric dynamic response of buried orthotropic cylindrical shells under moving load, *Structural Engineering and Mechanics*, 1999, vol. 8, issue 1, pp. 39-51.
4. Sibiriyakov A.V. *Dinamika sloistykh kompozitsionnykh plastin i obolochek pri impul'snom nagruzhenii* (Dynamics of layered composite plates and shells under pulsed loading), Dissertation of Doctor of Technical Sciences, Moscow, 2002, 319 p.

5. Xianyi Li, Yangkang Chen. Transient dynamic response analysis of orthotropic circular cylindrical shell under external hydrostatic pressure, *Journal of Sound and Vibration*, 2002, vol. 257(5), pp. 967-976. DOI: [10.1006/jsvi.2002.5259](https://doi.org/10.1006/jsvi.2002.5259)
6. Larichev E.A., Safronov V.S., Turkin I.K. *Trudy MAI*, 2007, no. 27. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34009>
7. Moiseev K.A., Panov Yu.N. *Trudy MAI*, 2011, no. 48. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=27514>
8. El'muratov S.K., Dzhakhaev A.E. *Nauka i tekhnika Kazakhstana*, 2013, no. 1-2, pp. 23-26.
9. Karpov V.V., Semenov A.A., Kholod D.V. *Trudy MAI*, 2014, no. 76. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49970>
10. Firsanov V.V., Vo A.Kh. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98866>
11. Reza Okhovat, Anders Boström. Dynamic equations for an orthotropic cylindrical shell, *Composite Structures*, 2018, vol. 184, pp. 1197-1203. DOI: [10.1016/j.compstruct.2017.10.034](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.034)
12. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D., Fedotenkov G.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161423>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-09](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-09)
13. Korovaitseva E.A. *Problemy prochnosti i plastichnosti*, 2021, vol. 83, no. 2, pp. 151-159.

14. D'yachenko Yu.P., Elenitskii E.Ya., Petrov D.V. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, 2011, no. 2 (23), pp. 278-288.
15. Kogan E.A., Yurchenko A.A. *Izvestiya MGTU MAMI*, 2014, vol. 4, no. 1(19). pp. 55-70.
16. Rajabi M., Behzad M. Interaction of a plane progressive sound wave with anisotropic cylindrical shells, *Composite Structures*, 2014, vol. 116, no. 1, pp. 747-760. DOI: [10.1016/j.compstruct.2014.05.029](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.029).
17. Renno J.M., Mace B.R. Calculating the forced response of cylinders and cylindrical shells using the wave and finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, 2014, vol. 333, no. 21, pp. 5340-5355. DOI: [10.1016/j.jsv.2014.04.042](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.04.042).
18. Xu X., Karami B., Janghorban M. On the dynamics of nanoshells, *International Journal of Engineering Science*, 2021, vol. 158. DOI: [10.1016/j.ijengsci.2020.103431](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103431).
19. Ivanov S.V., Mogilevich L.I., Popov V.S. Prodol'nye volny v nelineinoi tsilindricheskoi obolochke, sodержashchei vyazkuyu zhidkost', *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104003>
20. Nushtaev D.V., Zhavoronok S.I., Klyshnikov K.Yu., Ovcharenko E.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58589>.
21. Karpov V.V., Semenov A.A., Kholod D.V. *Trudy MAI*, 2014, no. 76. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49970>.
22. Grigorenko Y.M., Grigorenko A.Y. Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review),

International Applied Mechanics, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 123-193. DOI: [10.1007/s10778-013-0558-x](https://doi.org/10.1007/s10778-013-0558-x).

23. Marchuk M.V., Tuchapskii R.I. Dynamics of Geometrically Nonlinear Elastic Nonthin Anisotropic Shells of Variable Thickness, *International Applied Mechanics*, 2017, vol. 53, no. 6, pp. 655-667. DOI: [10.1007/s10778-018-0848-4](https://doi.org/10.1007/s10778-018-0848-4).

24. Okhovat R., Boström A. Dynamic equations for an anisotropic cylindrical shell using a power series method, *Civil-Comp Proceedings*, 2014, vol. 106.

25. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary Axisymmetric Problem of the Impact of a Spherical Shell on an Elastic Half-Space (Initial Stage of Interaction), *Mechanics of Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239–247. DOI: [10.3103/S0025654411020129](https://doi.org/10.3103/S0025654411020129).

26. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-Dimensional Nonstationary Contact of Elastic Cylindrical or Spherical Shells, *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. DOI: [10.3103/S1052618814010178](https://doi.org/10.3103/S1052618814010178).

27. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D Motion of an elastic Spherical Shell, *Mechanics of Solids*, 2015, vol. 50, no. 2, pp. 208-217. DOI: [10.3103/S0025654415020107](https://doi.org/10.3103/S0025654415020107)

28. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. The impact of liquid filled concentric spherical shells with a rigid wall, *Shell Structures: Theory and Applications*, 2017, vol. 4, pp. 305-308. DOI: [10.1201/9781315166605-68](https://doi.org/10.1201/9781315166605-68).

29. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Transient contact problem for liquid filled concentric spherical shells and a rigid barrier, *Proceedings of the First*

International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics, 2019, pp. 385-386. DOI: [10.1007/978-3-319-91989-8_92](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91989-8_92).

30. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length, *Journal of Applied Engineering Science*, 2020, vol. 18, no. 4, pp. 687–692. DOI: [10.5937/jaes0-28073](https://doi.org/10.5937/jaes0-28073)

31. Fedotenkov G.V., Tarlakovsky D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 439–447. DOI: [10.1134/S1995080219040061](https://doi.org/10.1134/S1995080219040061)

32. Okonechnikov A.S., Tarlakovski D.V., Ul'yashina A.N., Fedotenkov G.V. Transient reaction of an elastic half-plane on a source of a concentrated boundary disturbance, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2016, vol. 158, no 1, pp. 012073. DOI: [10.1088/1757-899X/158/1/012073](https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012073).

33. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Transient Interaction of Rigid Indenter with Elastic Half-plane with Adhesive Force, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, no. 4, pp. 489-498. DOI: [10.1134/S1995080219030132](https://doi.org/10.1134/S1995080219030132).

34. Yui Gu, Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2021, no. 3, pp. 48–57. DOI: [10.15593/perm.mech/2021.3.05](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.3.05)

35. Vestyak A.V., Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Model' nestatsionarnogo izgiba uprugodiffuzionnoi balki Bernulli-Eilera na vinklerovskom osnovanii, *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2021, vol. 27, no. 1. DOI: [10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.110_124.08](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2021.27.01.110_124.08)

36. Dech G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa i Z-preobrazovaniy* (Guide to the Practical application of Laplace and Z-transforms), Moscow, Nauka, 1971, 288 p.
37. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in Continuous Media Study guide: for universities), Moscow, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
38. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennyye metody* (Numerical Methods), Moscow, Nauka, 1975, 630 p.
39. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek* (General theory of anisotropic shells), Moscow, Nauka, 1974, 448 p.

Статья поступила в редакцию 04.04.2022

Статья после доработки 05.04.2022

Одобрена после рецензирования 06.04.2022

Принята к публикации 21.06.2022

The article was submitted on 04.04.2022; approved after reviewing on 06.04.2022; accepted for publication on 21.06.2022