

Научная статья
УДК 539.39
DOI: [10.34759/trd-2022-126-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-07)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РОДРИГА-ГАМИЛЬТОНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ОПРОКИДЫВАНИИ ПРИЗЕМЛЯЮЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА С АМОРТИЗАТОРАМИ

Игорь Олегович Аверьянов^{1✉}, Александр Владимирович Зинин²

¹АО «МКПК «Универсал» им. А.И. Привалова», Москва, Россия

²Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

¹i.averyanov@mail.ru✉

²allzin@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается возможность использования параметров Родрига-Гамильтона вместо кинематических соотношений, используемых при интегрировании уравнений движения, в задаче о приземлении объекта с системой амортизации [1]. Представлен алгоритм реализации рассматриваемого метода, для подтверждения достоверности и устойчивости которого проводится исследование собственного вращательного движения объекта. Для апробации разработанного алгоритма приведено решение о неравномерном приземлении объекта с системой амортизации, приводящему к его опрокидыванию.

Ключевые слова: пневматический амортизатор, пневмоамортизатор, система мягкой посадки, десантируемая техника, модель надёжности процесса приземления, статистическое моделирование, вертикальная посадка, параметры Родрига-Гамильтона, кватернион.

Для цитирования: Аверьянов И.О., Зинин А.В. Использование параметров Родрига-Гамильтона для решения задачи об опрокидывании приземляющегося объекта с амортизаторами // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-07)

Original article

THE USE OF RODRIGUES-HAMILTON PARAMETERS IN MATHEMATICAL MODEL OF CARGO LANDING SYSTEM WITH DAMPERS IN TASKS OF ITS OVERTURN

Igor O. Averyanov^{1✉}, Alexander V. Zinin²

¹JSC «МКПК «Universal» by A.I. Privalov», Moscow, Russia

²Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

¹i.averyanov@mail.ru ✉

²allzin@yandex.ru

Abstract. In the previous article [1] we described the mathematical model of dynamic landing process for cargo dropped systems with dampers (System) that we developed for statistical modelling of the process. That dynamic model consisted of spatial equations of

forces and moments equilibrium, kinematic Euler's equations and contained contact boundaries from rigid plane to dampers and to cargo. The method of forth integration was used to solve the equations and the idea was that such modeling of landing process had allowed us to detect all the failures well known for such Systems. One of the possible System failure that may occur during landing is its overturn. In this case we have a deal with large angles that may lead to problems with kinematic Euler's equations. Researching of sources shows that the problem of System overturn usually considers separately with analytical approaches, while the method we used implies continuity of the solution from the beginning of the process to its end.

To avoid such problems in this article we consider the use of Rodrigues-Hamilton parameters (or quaternion) instead of kinematic Euler's equations to solve the dynamic task of complex System moving. We use the fourth order of Runge-Kutta method to realize the algorithm of Rodrigues-Hamilton parameters. To convert the quaternion to spatial angles Krilov's equations are used.

To demonstrate accuracy and stability of the developed algorithm the task of complex rigid body spatial free motion is considered. Comparison of these results with the solution that comes from commonly used CAE shows us their similarity. After that, we also consider the task of System landing with its overturn. These results are considered from qualitative analysis point of view.

Thus, the use of algorithm we realized with Rodrigues-Hamilton parameters instead of kinematic Euler's equation in the mathematical model of System landing process allows

us to avoid “special points” and to generalize the solution to the tasks of large spatial angles, including System overturn.

Keywords: soft landing system, air damper, dropped cargo landing, dependability model of landing process, statistics modelling tasks.

For citation: Averyanov I.O., Zinin A.V. The use of Rodrigues-Hamilton parameters in mathematical model of cargo landing system with dampers in tasks of its overturn. *Trudy MAI*, 2022, no.126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-07)

Введение

Одной из важных задач при проектировании средств десантирования – авиационных систем, предназначенных для реализации сохранного приземления десантируемых грузов [2, 3] – является прогнозирования характеристик надёжности, которое проводится преимущественно с использованием математических моделей физических процессов методом статистического моделирования [4]. Изучению динамики работы приземляющихся грузов с системами мягкой посадки (далее – объект) посвящено множество работ [5-12]. Однако их применимость к описанным в [4] задачам статистического моделирования ограничена [1]. В [1] разработана динамическая модель процесса приземления объекта, позволяющая получить непрерывное на всём процессе решение и выявить большинство присущих этому процессу характерных отказов [4]. В основе модели лежит реализация динамики его контактного взаимодействия с площадкой приземления (ПП), решение уравнений

пространственного движения объекта ищется методом их прямого интегрирования. К недостаткам модели [1] следует отнести трудность, связанную с получением решения при возникновении больших углов поворота объекта в пространстве и, как следствие, невозможность выявления в явном виде такого отказа как опрокидывание объекта.

В данной работе рассматривается возможность использования параметров Родрига-Гамильтона в качестве альтернативы кинематическим соотношениям Эйлера, используемым в [1] при интегрировании уравнений пространственного движения приземляющегося объекта.

Описание математической модели

В соответствии с [1] пространственное движение объекта как твёрдого тела при контакте с ПП описывается системой уравнений (1)-(2). Уравнения (1) описывают поступательное и вращательное движения центра масс объекта. Кинематические соотношения Эйлера (2) по форме представления аналогичны используемым в [7, 8 и 13]. Все компоненты векторов уравнений движения приводятся в локальной системе координат (СК) объекта.

$$\begin{aligned}
M \left(\frac{dV_x}{dt} + V_z \omega_y - V_y \omega_z \right) &= M \cdot g_x + \sum_{i=1}^n (N_{x_i} + R_{x_i}) + \sum_{i=1}^n Q_{x_i}, \\
M \left(\frac{dV_y}{dt} + V_x \omega_z - V_z \omega_x \right) &= M \cdot g_y + \sum_{i=1}^n (N_{y_i} + R_{y_i}) + \sum_{i=1}^n Q_{y_i}, \\
M \left(\frac{dV_z}{dt} + V_y \omega_x - V_x \omega_y \right) &= M \cdot g_z + \sum_{i=1}^n (N_{z_i} + R_{z_i}) + \sum_{i=1}^n Q_{z_i}, \\
I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= \sum_{i=1}^n (N_{z_i} + R_{z_i}) y_i - \sum_{i=1}^n (N_{y_i} + R_{y_i}) z_i + \sum_{i=1}^n Q_{z_i} (y_i - h_i) - \sum_{i=1}^n Q_{y_i} z_i, \\
I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x &= \sum_{i=1}^n (N_{x_i} + R_{x_i}) z_i - \sum_{i=1}^n (N_{z_i} + R_{z_i}) x_i + \sum_{i=1}^n Q_{x_i} z_i + \sum_{i=1}^n Q_{z_i} x_i, \\
I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= \sum_{i=1}^n (N_{y_i} + R_{y_i}) x_i - \sum_{i=1}^n (N_{x_i} + R_{x_i}) y_i + \sum_{i=1}^n Q_{y_i} x_i - \sum_{i=1}^n Q_{x_i} (y_i - h_i),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma, \\
\frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta \cdot (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma), \\
\frac{d\psi}{dt} &= (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma) / \cos \vartheta.
\end{aligned} \tag{2}$$

Здесь: M – масса объекта; n – количество амортизаторов; V_x, V_y, V_z – проекции вектора скорости поступательного движения центра масс объекта; g_x, g_y, g_z – проекции ускорения свободного падения; $N_{x_i}, N_{y_i}, N_{z_i}$ – проекции нормальных составляющих сил, действующих на груз при обжатию АУ и контакте с ПП; $R_{x_i}, R_{y_i}, R_{z_i}$ – проекции реактивных составляющих сил, действующих на груз со стороны ПП; $Q_{x_i}, Q_{y_i}, Q_{z_i}$ – проекции боковых составляющих сил, действующих на объект при обжатию АУ; $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции вектора угловой скорости; I_x, I_y, I_z – главные центральные моменты инерции объекта; x_i, y_i, z_i – координаты точки

приложения усилий i -го АУ, приходящие на основание груза; ϑ, γ, ψ - углы поворота объекта.

Не смотря на то, что использование кинематических соотношений, представленных в виде (2), является удобным с точки зрения простоты их реализации при алгоритмизации математической модели, в случае возникновения больших углов поворота – например при моделировании опрокидывания ПО – возникают разрывы решения в некоторой окрестности $\vartheta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ($n = 0, 1, \dots$). Это обстоятельство приводит к необходимости введения дополнительных проверок численных значений ϑ при алгоритмизации соотношений (2), чтобы избежать деления на нуль. При реализации описываемой в данной работе математической модели приземления объекта, вместо кинематических соотношений (2) использовались параметры Родрига-Гамильтона, характеризующиеся тем, что используемые уравнения не содержат тригонометрических функций, а потому не вырождаются ни при каких положениях тела в пространстве [16]. Данный метод широко применяется в задачах построения бесплатформенных инерциальных систем [17-19]. В кватернионной записи кинематическое уравнение вращательного движения запишется следующим образом [21] (символ « \circ » означает кватернионное умножение)

$$2 \frac{dq}{dt} = q \circ \omega(t). \quad (3)$$

Здесь: $q = q_0 + q_1 i_1 + q_2 i_2 + q_3 i_3$ - кватернион в форме гиперкомплексного числа, задающий ориентацию объекта в пространстве в каждый рассматриваемый момент времени; $\omega(t)$ - вектор угловой скорости тела.

Система уравнений (3) в скалярном виде запишется следующим образом

$$\begin{cases} 2dq_0/dt = -\omega_x(t) \cdot q_1 - \omega_y(t) \cdot q_2 - \omega_z(t) \cdot q_3 \\ 2dq_1/dt = \omega_x(t) \cdot q_0 + \omega_z(t) \cdot q_2 - \omega_y(t) \cdot q_3 \\ 2dq_2/dt = \omega_y(t) \cdot q_0 - \omega_z(t) \cdot q_1 + \omega_x(t) \cdot q_3 \\ 2dq_3/dt = \omega_z(t) \cdot q_0 + \omega_y(t) \cdot q_1 - \omega_x(t) \cdot q_2 \end{cases} \quad (4)$$

После конвертации соотношений (4) в углы Крылова, проведя обратное преобразование, можно получить следующие соотношения [22]

$$\begin{aligned} \vartheta &= \text{atctg} \frac{2(q_1 q_2 + q_0 q_3)}{2(q_0^2 + q_1^2) - 1}, \\ \gamma &= \text{atctg} \frac{2(q_2 q_3 + q_0 q_1)}{2(q_0^2 + q_3^2) - 1}, \\ \psi &= \text{asin} \left(2(q_0 q_2 + q_1 q_3) \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношения (5) позволяют однозначно определить углы поворота ϑ и γ в пределах $(-\pi/2, \pi/2)$.

Алгоритмизация кинематических соотношений

В соответствии с [1] для математического моделирования пространственного приземления объекта применяется метод прямого интегрирования уравнений

движения (1) и (2) по времени, реализованный с помощью метода конечных разностей с использованием усовершенствованного метода Эйлера [14, 15]. Последовательность интегрирования уравнений движения соответствует структуре их записи: сначала по известным на j -м шаге интегрирования значениям проекций векторов угловой и поступательной скоростей (1) производится их расчёт для $(j+1)$ -го шага интегрирования по времени, после чего производится расчёт угловых положений объекта по кинематическим соотношениям (2).

При алгоритмизации кинематических уравнений (3)-(4) и соотношений (5) вместо используемых в [1] кинематических соотношений (2) представляется удобным записать систему уравнений (4) в матричном виде

$$2 \begin{pmatrix} dq_0/dt \\ dq_1/dt \\ dq_2/dt \\ dq_3/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x(t) & -\omega_y(t) & -\omega_z(t) \\ \omega_x(t) & 0 & \omega_z(t) & -\omega_y(t) \\ \omega_y(t) & -\omega_z(t) & 0 & \omega_x(t) \\ \omega_z(t) & \omega_y(t) & -\omega_x(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Так как значения угловых скоростей $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ на каждом $(j+1)$ -м шаге интегрирования уравнений движения (1) по времени определены, вводятся следующие обозначения для компонент правой части системы (6)

$$\|\omega_{j+1}\| = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{x_{j+1}} & -\omega_{y_{j+1}} & -\omega_{z_{j+1}} \\ \omega_{x_{j+1}} & 0 & \omega_{z_{j+1}} & -\omega_{y_{j+1}} \\ \omega_{y_{j+1}} & -\omega_{z_{j+1}} & 0 & \omega_{x_{j+1}} \\ \omega_{z_{j+1}} & \omega_{y_{j+1}} & -\omega_{x_{j+1}} & 0 \end{pmatrix}, \quad \|q_j\| = \begin{pmatrix} q_{0_j} \\ q_{1_j} \\ q_{2_j} \\ q_{3_j} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Вектор $\|q_j\|$ известен из граничных условий (j -го шага интегрирования).

В момент времени $t=0$ с, соответствующему началу рассматриваемого процесса приземления объекта, вектор $\|q_j\|$ принимает значения $(1, 0, 0, 0)$.

Система дифференциальных уравнений (3) может быть записана в виде

$$\frac{dq}{dt} = f(t, q). \quad (8)$$

Тогда для решения системы уравнений (8) может быть применён метод Рунге-Кутты четвёртого порядка [21]. Алгоритм вычисления значения кватерниона q на искомом $j+1$ шаге интегрирования указанным методом реализуется следующим образом

$$\begin{aligned} \|k_{1_{j+1}}\| &= \frac{\Delta t}{2} \cdot \|\omega_{j+1}\| \cdot \|q_j\|, \\ \|k_{2_{j+1}}\| &= \frac{\Delta t}{2} \cdot \|\omega_{j+1}\| \cdot \left(\|q_j\| + \frac{1}{2} \|k_{1_{j+1}}\| \right), \\ \|k_{3_{j+1}}\| &= \frac{\Delta t}{2} \cdot \|\omega_{j+1}\| \cdot \left(\|q_j\| + \frac{1}{2} \|k_{2_{j+1}}\| \right), \\ \|k_{4_{j+1}}\| &= \frac{\Delta t}{2} \cdot \|\omega_{j+1}\| \cdot \left(\|q_j\| + \|k_{3_{j+1}}\| \right), \\ \|q_{j+1}\| &= \|q_j\| + \frac{1}{6} \left(\|k_{1_{j+1}}\| + 2\|k_{2_{j+1}}\| + 2\|k_{3_{j+1}}\| + \|k_{4_{j+1}}\| \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\|k_{1_{j+1}}\|$, $\|k_{2_{j+1}}\|$, $\|k_{3_{j+1}}\|$, $\|k_{4_{j+1}}\|$ - векторы-столбцы промежуточных коэффициентов;

$\|q_{j+1}\|$ - вектор столбец искомых значений коэффициентов, определяющих кватернион по формуле (3); Δt - шаг интегрирования.

Искомые углы поворота ϑ_{j+1} , γ_{j+1} и ψ_{j+1} определяются по формулам (5) с помощью коэффициентов $\|q_{j+1}\|$, определённых по формулам (9). Так как рассматриваемая в данной работе задача предполагает возможность опрокидывания приземляющегося объекта (т.е. наличия больших углов его поворота), при реализации алгоритма расчёта вводится «счётчик поворотов», позволяющий накапливать значения рассматриваемых углов поворота на каждом шаге интегрирования, оставаясь при этом в области допустимых значений, определённых соотношениями (5).

Исследование собственного движения объекта

Для подтверждения достоверности результатов расчётов и устойчивости решения, получаемых с использованием рассматриваемой математической модели пространственного движения объекта, реализованной уравнениями (1) и кинематическими соотношениями (3) с помощью алгоритма (9), рассматривается задача о собственном движении объекта (твёрдого тела) в пространстве.

В виду того, что кинематические уравнения являются функциями угловых скоростей, уравнения поступательных движений объекта – первые три уравнения формулы (1) – в данной постановке не рассматриваются. Таким образом, система уравнений, описывающая движение вращающегося объекта в задаче исследования характеристик его собственного движения запишется как

$$\begin{aligned}
I_x \frac{d\omega_x}{dt} + (I_z - I_y) \omega_y \omega_z &= 0, \\
I_y \frac{d\omega_y}{dt} + (I_x - I_z) \omega_z \omega_x &= 0, \\
I_z \frac{d\omega_z}{dt} + (I_y - I_x) \omega_x \omega_y &= 0, \\
2 \frac{dq}{dt} &= q \circ \omega(t).
\end{aligned}
\tag{10}$$

Рассматривается объект - пластина, массой 6,24 кг, с массовыми моментами инерции $I_x = I_z = 0,0416$ кг·м², $I_y = 0,0832$ кг·м². Координаты характерных точек приведены в таблице 1 ниже.

Таблица 1 – Координаты точек в системе координат объекта

№ точки	x, м	y, м	z, м
1	0,1414	0	0,1414
2	-0,1414	0	0,1414
3	-0,1414	0	-0,1414
4	0,1414	0	-0,1414

В момент времени $t = 0$ с угловые скорости объекта $\omega_x = \omega_y = 10$ рад/с. Шаг интегрирования $\Delta t = 0,0002$ с. Графики угловых скоростей и перемещений соответствующих точек объекта по осевым направлениям представлены на рисунках 1-4 ниже. Полученные расчётные характеристики собственного движения объекта (сплошные линии на графиках, названия графиков обозначены с индексом «расч.») сравниваются со значениями, полученными с помощью общеизвестного программного пакета анализа динамики движения многомассовых систем

MSC Adams. (штриховые линии на графиках, названия графиков обозначены с индексом «изв.»).

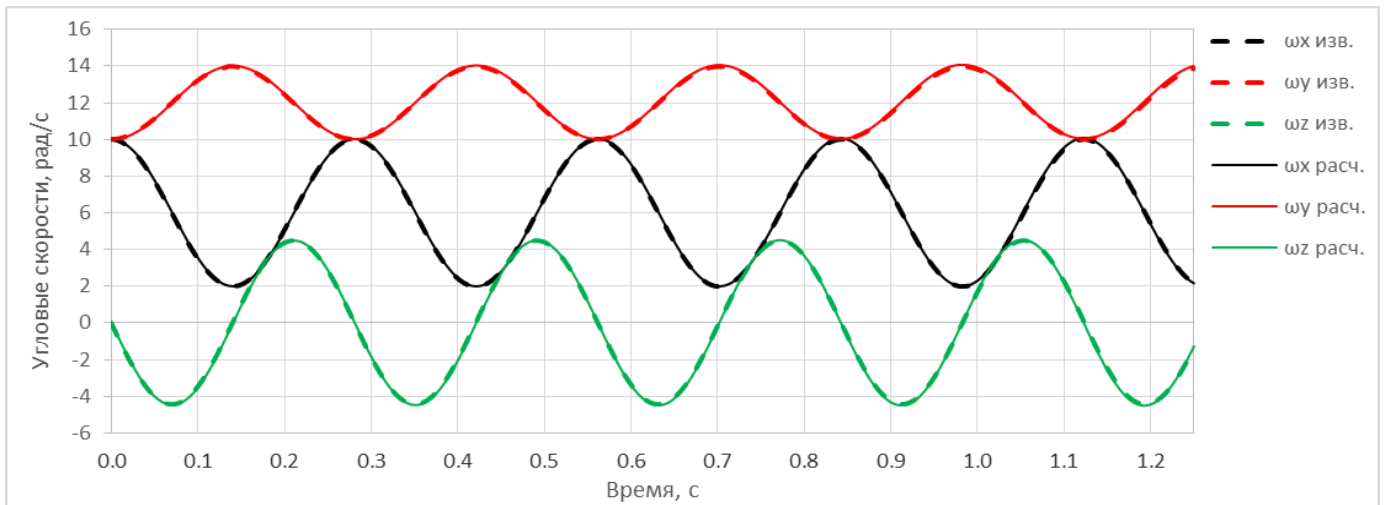


Рисунок 1. Угловые скорости, рад/с

Заданные в начальный момент времени в системе координат объекта проекции вектора угловой скорости $\vec{\omega}$ приводят к его сложному вращательному движению, при котором ненулевыми оказываются все его проекции.

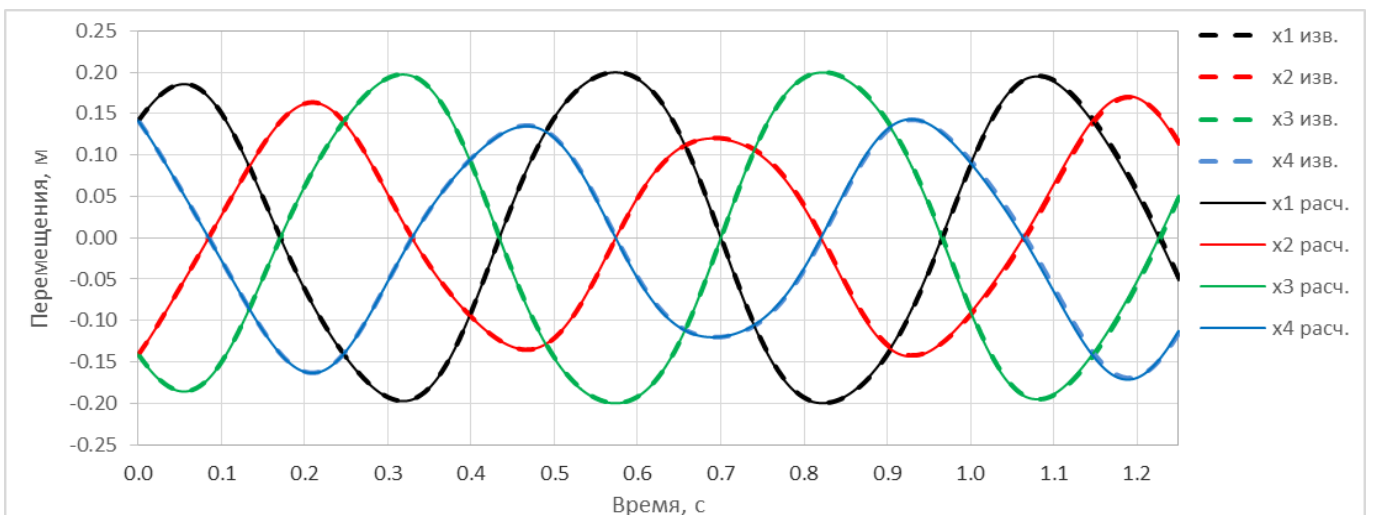


Рисунок 2. Перемещения по направлению X, м

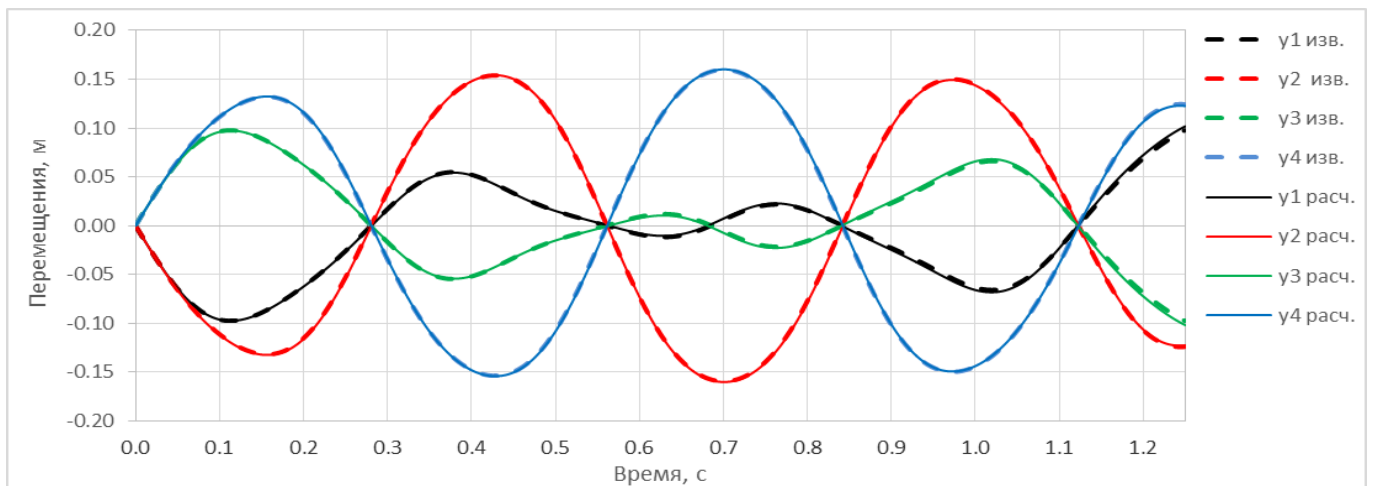


Рисунок 3. Перемещения по направлению Y, м

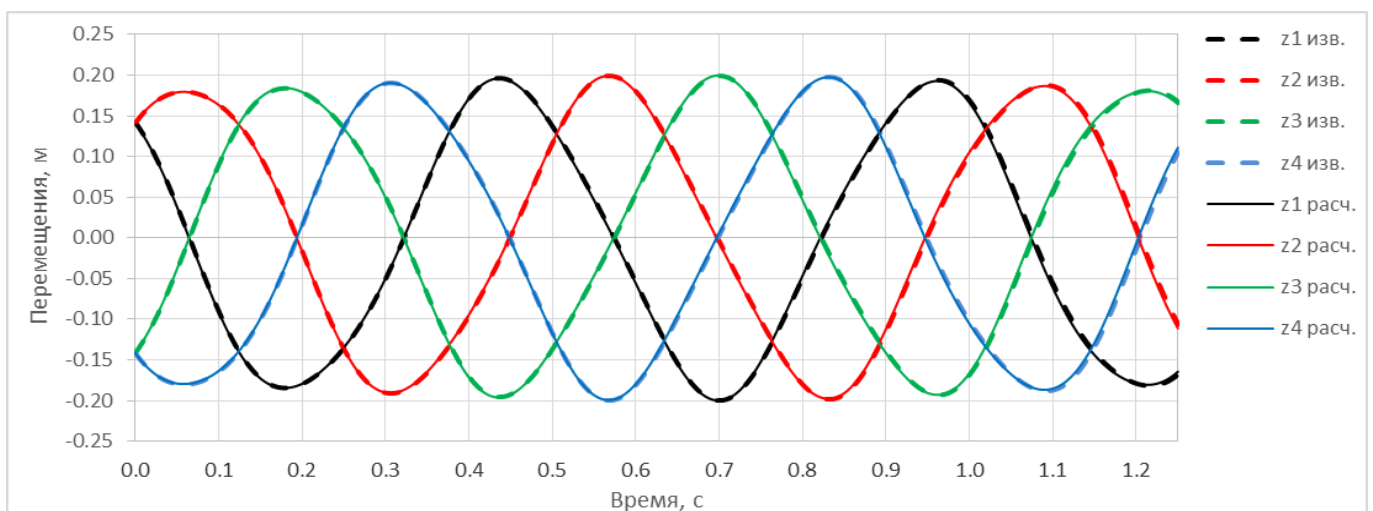


Рисунок 4. Перемещения по направлению Z, м

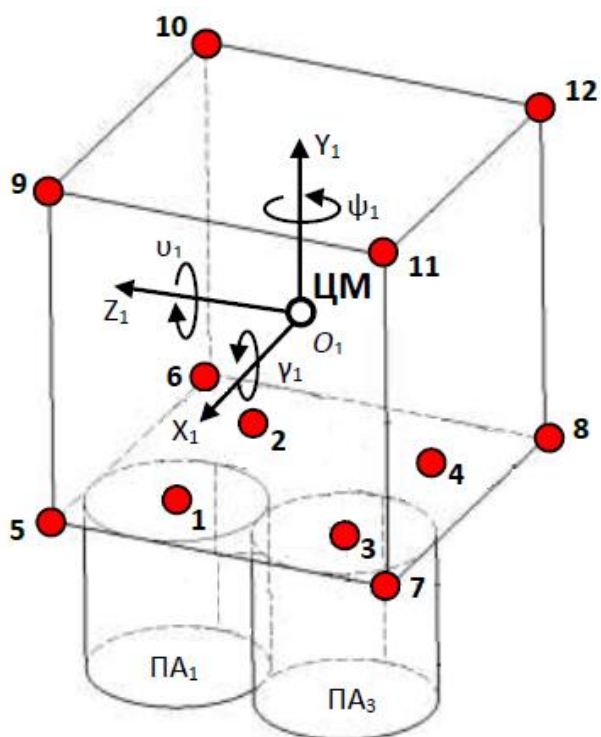
Полученные по разработанной математической модели характеристики собственного движения объекта согласуются с аналогичным решением, полученном с помощью стороннего общеизвестного расчётного программного комплекса. Анализ приведённых выше графиков перемещений точек объекта и угловых скоростей позволяет сделать вывод об устойчивости получаемого решения во времени.

Таким образом, можно заключить, что использование параметров Родрига-Гамильтона (3) вместо кинематических соотношений Эйлера (2) способом, реализованным в данной работе – см. алгоритм расчёта (9) и соотношения (5), – позволяет получать неразрывное (без особых точек) и достоверное решение задачи сложного пространственного движения объекта, при наличии больших углов его поворота.

Апробация алгоритма разработанной математической модели на примере задачи об опрокидывании приземляющегося объекта

Рассматривается задача о неравномерном вертикальном приземлении объекта с пневматическими амортизаторами и его движении с опрокидыванием. Общая постановка задачи аналогична задаче №1 в [1]: находящийся в гравитационном поле груз кубической формы с длиной ребра 2 м и массой 5000 кг, к днищу которого закреплены цилиндрические тканевые пневматические амортизаторы высотой 1 м, приземляется на ПП с некоторой вертикальной скоростью $V_y = V_{y_0} = -7,0$ м/с (мгновенное значение, соответствует моменту касания амортизаторами ПП). Алгоритм и параметры контактного взаимодействия груза с ПП, а также закон стравливания клапанов амортизаторов - также в соответствии с [1]. Газ в камерах амортизаторов принимается идеальным, сжимающимся по адиабатическому закону. Начальное избыточное давление в камерах амортизаторов равно нулю. В отличие от

рассмотренной в [1] задачи в данной постановке амортизаторы № 2 и 4 (см. рисунок 5) отсутствуют.



№ т.	Координаты точек в СК $O_1X_1Z_1$, м		
	x	y	z
1	0.5	-1	0.5
2	-0.5	-1	0.5
3	0.5	-1	-0.5
4	-0.5	-1	-0.5
5	1	-1	1
6	-1	-1	1
7	1	-1	-1
8	-1	-1	-1
9	1	1	1
10	-1	1	1
11	1	1	-1
12	-1	1	-1

Рисунок 5. К задачам о приземлении объекта

На рисунке 6 приведены графики изменения положений точек 1-4, соответствующим креплениям верхних оснований АУ к основанию груза (отложены по левой оси ординат).

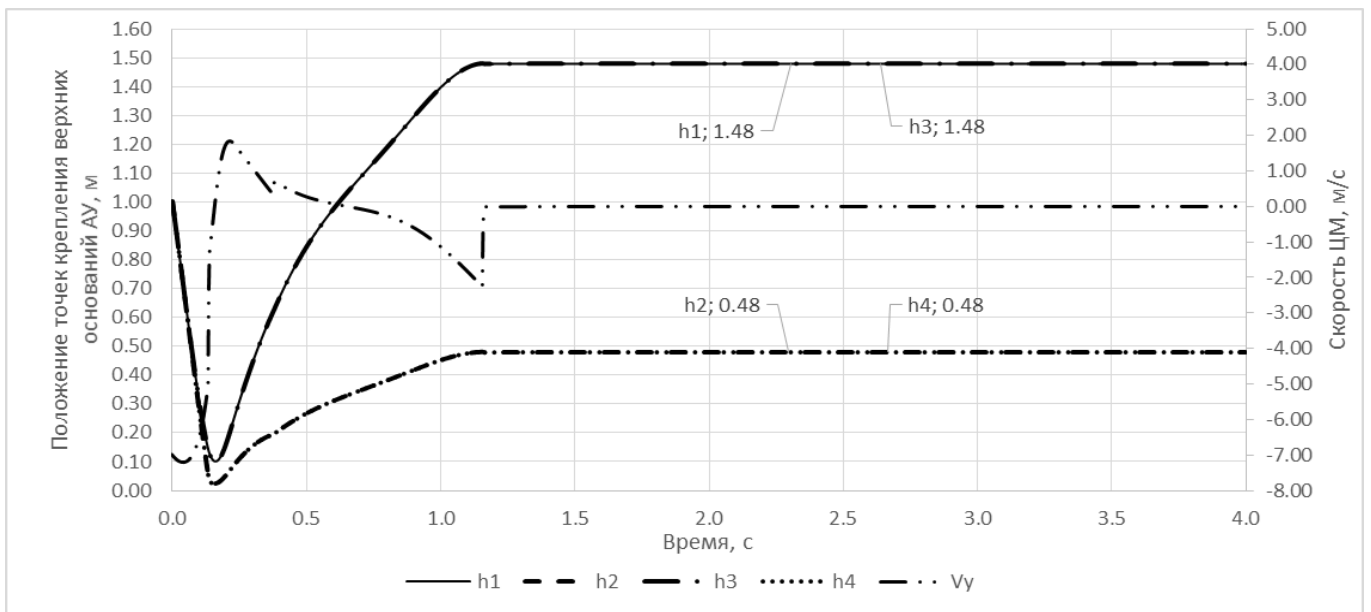


Рисунок 6. Положение точек 1-4 крепления АУ, м / Скорость ЦМ объекта, м/с

По правой оси ординат отложены значения вертикальных скоростей объекта V_y . Начальная высота амортизаторов $h_i = 1,0$ м соответствует высоте, при котором они касаются площадки приземления. При этом значение скорости $V_y = -7,0$ м/с (соответствует задаваемому значению V_{y0}).

По мере обжатия амортизаторов 1 и 3 происходит сложное пространственное движение груза, при этом возрастает угол поворота ν_1 (см. рисунок 7), в период времени 0,4 – 1,2 с происходит контакт груза с ПП ребром его основания, образованным точками 6 и 8 (см. графики реакций со стороны ПП на рисунке 8). Далее происходит опрокидывание груза на его грань, образованную точками 6, 8, 10, 12, после чего в период времени 1,2 – 4,0 с движение груза по ПП устанавливается. Конечное положение груза соответствует углу поворота $\nu_1 = 1,57$ рад (90^0).

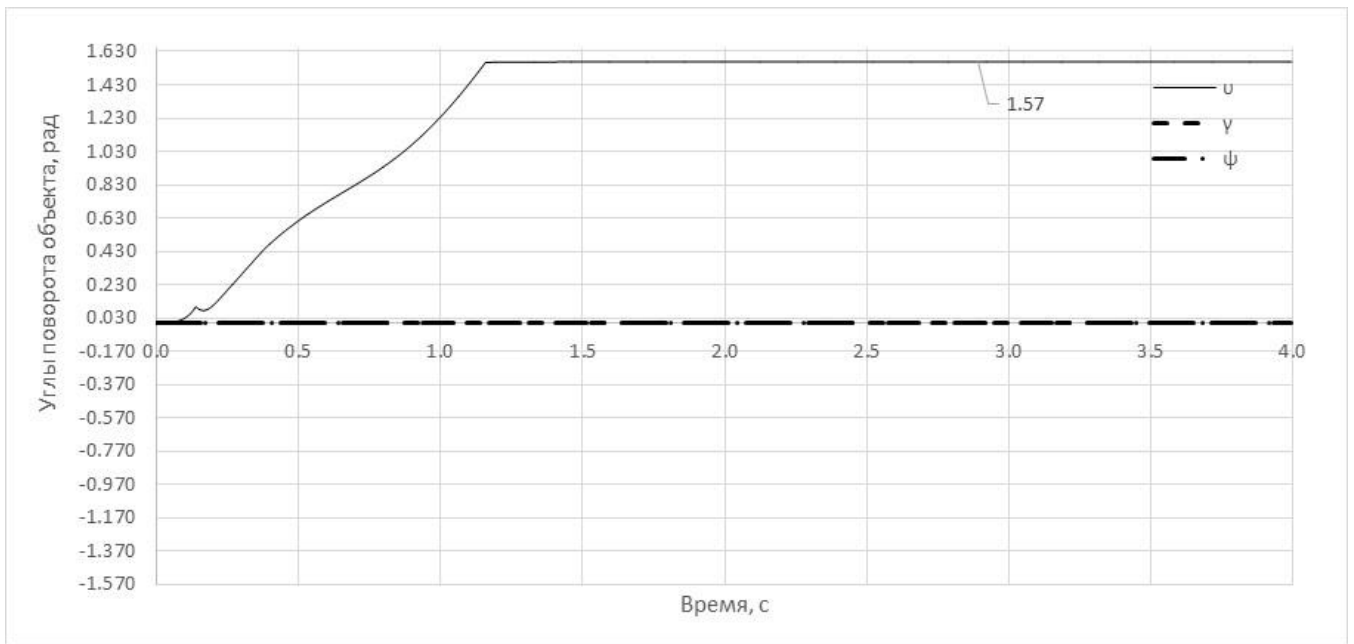


Рисунок 7. Изменение углов поворота объекта при приземлении, рад

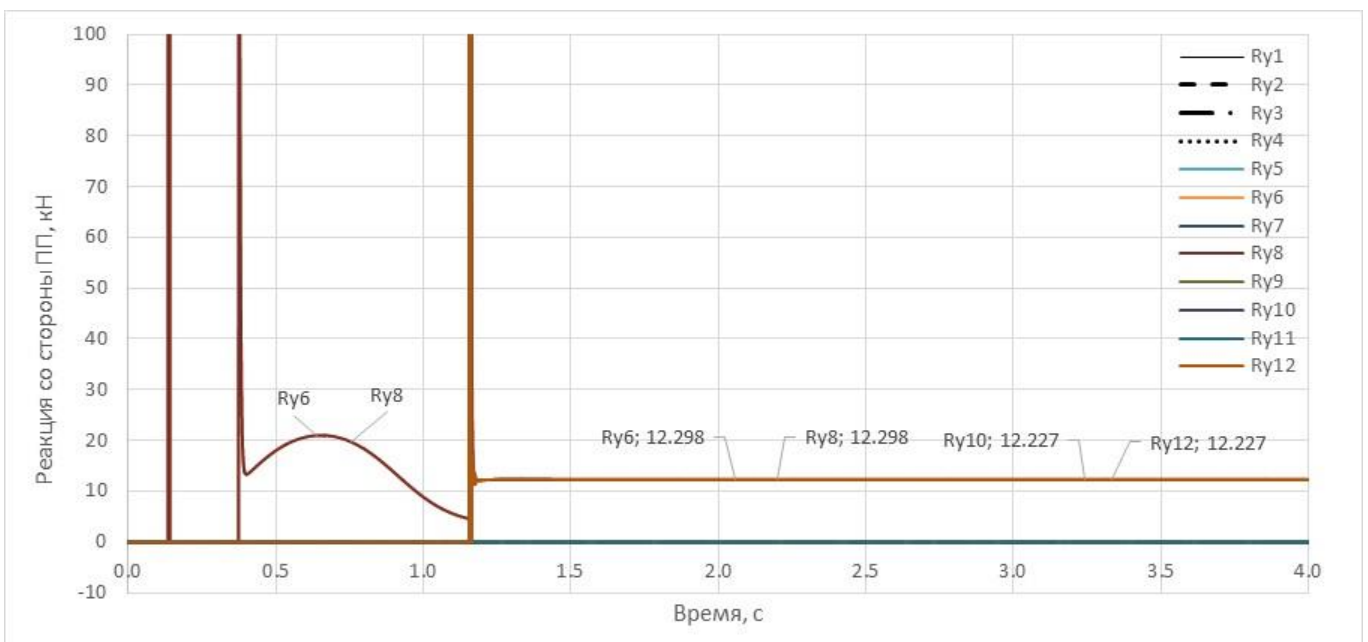


Рисунок 8. Реакции со стороны ПП, кН

Положение точек крепления верхних оснований АУ опрокинутого груза отличается от их теоретического положения на 0,02 м (см. рисунок 6) – вошедшая в контакт с ПП грань груза располагается ниже самой ПП, грань проникает сквозь

ПП. Данное проникновение грани вызвано введённым в математическую модель контактным алгоритмом [1], величина проникновения – принятыми жесткостными параметрами контактных условий. На рисунке 8 показаны величины реакций со стороны ПП. При установившемся положении груза суммарная величина реакций на точки $i = 6, 8, 10, 12$ составляет $\sum_i R_{y_i}^{III} = 49050$ Н, что соответствует собственному весу объекта $P = m \cdot g = 5000 \cdot 9,81 = 49050$ Н.

Таким образом, рассмотренная задача о вертикальном неравномерном приземлении объекта с системой мягкой посадки, приводящему к опрокидыванию объекта, демонстрирует возможность получения непрерывного для всех этапов процесса приземления [1] решения, в том числе при возникновении больших углов поворота объекта в пространстве.

Заключение

Выполнено обобщение полученного в [1] решения задачи о приземлении объекта с системой мягкой посадки для случаев возникновения больших углов его поворота в пространстве. Для этого вместо традиционных кинематических соотношений Эйлера (2) при интегрировании уравнений пространственного движения объекта (1) используются параметры Родрига-Гамильтона, записанные в виде уравнений (3). Представлен и реализован алгоритм реализации уравнений (3). Для обоснования достоверности и неразрывности получаемого решения (отсутствия особых точек) проведено исследование собственных характеристик сложного

движения вращающегося объекта. Апробация разработанного алгоритма расчёта проведена решением задачи о неравномерном приземлении объекта с системой мягкой посадки на площадку приземления с возникновением его опрокидывания.

Разработанная в [1] математическая модель процесса приземления объекта с системой амортизации, с внесением в неё предложенных в данной работе изменений в части использования параметров Родрига-Гамильтона вместо кинематических соотношений Эйлера, позволяет выявлять присущие средствам десантирования виды отказов [4], в том числе связанные с его опрокидыванием.

Список источников

1. Аверьянов И.О., Зинин А.В. Математическая модель процесса приземления недеформируемого груза с амортизирующим устройством на жесткую площадку // Труды МАИ. 2022. № 124. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=167067>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-12)
2. Трямкин А.В., Емельянов Ю.Н. Математическая модель процесса торможения объекта десантирования парашютно-реактивной системой // Труды МАИ. 2000. № 1. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34731>
3. Трямкин А.В., Скиданов С.Н. Исследование процесса наполнения парашютных систем // Труды МАИ. 2001. № 3. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=34686>
4. Аверьянов И.О. Применение метода Монте-Карло для прогнозирования надёжности процесса приземления систем мягкой посадки с пневмоамортизаторами

// Труды МАИ. 2020. № 115. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=119896>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-03)

5. Аверьянов И.О., Сулейманов Т.С., Тараканов П.В. Разработка обобщённой методики расчета систем мягкой посадки с пневмоамортизаторами // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=77448>

6. Пономарев П.А., Скиданов С.Н., Тимохин В.А. Расширение диапазона применения пневмоамортизаторов в системах мягкой посадки с использованием разрывных элементов // Труды МАИ. 2000. № 2. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34708>

7. Пономарев П.А. Исследование и выбор рациональных параметров пневматического амортизатора для посадки дистанционно-пилотируемых летательных аппаратов: дисс. ... к.т.н. – М.: МАИ, 2000. –145 с.

8. Титов В.А. Проектирование рациональных систем пенопластовых амортизаторов для объектов десантирования: дисс. ... к.т.н. – М.: МИРЭА, 1989. – 170 с.

9. Qu Pu, Yang Zhen, Shi Rui. Research on Airbags Landing System for Airborne Vehicle Airdrop // Journal of Information and Computational Science, 2015, vol. 12(5), pp. 2035-2042. DOI: [10.12733/jics20105798](https://doi.org/10.12733/jics20105798)

10. Yves de Lassat de Pressigny, Vincent Lapoujade. Numerical simulation of ground impact after airdrop // 5th European LS-Dyna Users Conference, 2005, 2d-40 URL: <https://www.dynalook.com/conferences/european-conf-2005>

11. Yves de Lassat de Pressigny, Thierry Baylot. Simulation of the impact on ground of airdrop loads to define a standard worst case test // 6th European LS-Dyna Users Conference, 2007. URL: <https://www.dynalook.com/conferences/european-conf-2007>
12. Masoud Alizadeh, Ahmad Sedaghat, Ebrahim Kargar. Shape and Orifice Optimization of Airbag Systems for UAV Parachute Landing, IJASS, 2014. DOI: [10.5139/IJASS.2014.15.3.335](https://doi.org/10.5139/IJASS.2014.15.3.335)
13. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета. - М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.
14. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). – М.: Наука, 1977. – 440 с.
15. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
16. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
17. Бирюков В.Г. Задачи определения ориентации и управления угловым движением твердого тела (космического аппарата). Дисс. к.ф.-м.н. – Саратов: Институт проблем точной механики и управления РАН, 2005. - 151 с.
18. Жидкова Н.В., Волков В.Л. Моделирование бесплатформенной системы ориентации // Современные проблемы науки и образования. 2015. № 1. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25323023>
19. Волков В.Л., Жидкова Н.В. Особенности моделирования бесплатформенных инерциальных систем // Научное обозрение. Технические науки. 2016. № 4. С. 5-19.

20. Дмитроченко Л.А., Сачков Г.П. Функциональные алгоритмы и уравнения ошибок определения параметров ориентации в инерциальных навигационных системах // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=56986>
21. Челноков Ю.Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 512 с.
22. Голубев Ю.Ф. Алгебра кватернионов в кинематике твердого тела // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 39. С. 1-23.

References

1. Averyanov I.O., Zinin A.V. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=167067>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-12](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-12)
2. Tryamkin A.V., Emel'yanov Yu.N. *Trudy MAI*, 2000, no. 1. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34731>
3. Tryamkin A.V., Skidanov S.N. *Trudy MAI*, 2001, no. 3. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34686>
4. Averyanov I.O. *Trudy MAI*, 2020, no. 115. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=119896>. DOI: [10.34759/trd-2020-115-03](https://doi.org/10.34759/trd-2020-115-03)
5. Averyanov I.O., Suleimanov T.S., Tarakanov P.V. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=77448>

6. Ponomarev P.A., Skidanov S.N., Timokhin V.A. *Trudy MAI*, 2000, no. 2. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34708>
7. Ponomarev P.A. *Issledovanie i vybor ratsional'nykh parametrov pnevmaticheskogo amortizatora dlya posadki distantsionno-pilotiruemykh letatel'nykh apparatov* (Analysis and choice of rational parameters of pneumatic shock absorber for the landing aircrafts), Doctor's thesis, Moscow, MAI, 2000, 145 p.
8. Titov V.A. *Proektirovanie ratsional'nykh sistem penoplastovykh amortizatorov dlya ob"ektov desantirovaniya* (Improvement of design efficiency for cargo dropped systems foam plastic dampers), Doctor's thesis, Moscow, MIREA, 1989, 170 p.
9. Qu Pu, Yang Zhen, Shi Rui. Research on Airbags Landing System for Airborne Vehicle Airdrop, *Journal of Information and Computational Science*, 2015, vol. 12 (5), pp. 2035–2042. DOI: [10.12733/jics20105798](https://doi.org/10.12733/jics20105798).
10. Yves de Lassat de Pressigny, Vincent Lapoujade. Numerical simulation of ground impact after airdrop, *5th European LS-Dyna Users Conference*, 2005. URL: <https://www.dynalook.com/conferences/european-conf-2005>
11. Yves de Lassat de Pressigny, Thierry Baylot. Simulation of the impact on ground of airdrop loads to define a standard worst case test, *6th European LS-Dyna Users Conference*, 2007. URL: <https://www.dynalook.com/conferences/european-conf-2007>
12. Masoud Alizadeh, Ahmad Sedaghat, Ebrahim Kargar. Shape and Orifice Optimization of Airbag Systems for UAV Parachute Landing, *International Journal of Aeronautical and Space Sciences*, 2014. DOI [10.5139/IJASS.2014.15.3.335](https://doi.org/10.5139/IJASS.2014.15.3.335)

13. Lebedev A.A., Chernobrovkin L.S. *Dinamika poleta* (Flight dynamics), Moscow, Mashinostroenie, 1973, 616 p.
14. Godunov S.K., Ryaben'kii V.S. *Raznostnye skhemy* (Finite- difference schemes), Moscow, Nauka, 1977, 440 p.
15. Amosov A.A., Dubinskii Yu.A., Kopchenova N.V. *Vychislitel'nye metody dlya inzhenerov* (Numerical methods for engineers), Moscow, Vysshaya shkola, 1994, 544 p.
16. Branec V.N., Shmiglevskiy I.P. *Primenenie kvaternionov v zadachah orientacii tverdogo tela* (The use of quaternions in the tasks of rigid body orientation), Moscow, Nauka, 1973, 320 p.
17. Biryukov V.G. *Zadachi opredeleniya orientacii i upravleniya uglovim dvizheniem tverdogo tela (kosmicheskogo apparata)* (Tasks of orientation determination and angular motion control for rigid body (spacecraft)), Doctor's thesis, Saratov, IPTMU RAS, 2005, 151 p.
18. Zhidkova N.V., Volkov V.L. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya*, 2015, no. 1. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25323023>
19. Volkov V.L., Zhidkova N.V. *Nauchnoe obozrenie. Tekhnicheskie nauki*, 2016, no. 4, pp. 5-19.
20. Dmitrochenko L.A., Sachkov G.P. *Trudy MAI*, 2015, no. 80. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=56986>
21. Chelnokov U.N. *Kvaternionnie i bikvaternionnie modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ih prilozheniya* (Quaternion and biquaternion models and methods of rigid body mechanics and their applications), Moscow, FIZMATLIT, 2006, 512 p.

22. Golubev Yu.F. *Preprinty IPM im. M.V. Keldysha*, 2013, no. 39. pp. 1-23.

Статья поступила в редакцию 01.07.2022

Статья после доработки 05.07.2022

Одобрена после рецензирования 15.07.2022

Принята к публикации 12.10.2022

The article was submitted on 01.07.2022; approved after reviewing on 15.07.2022;
accepted for publication on 12.10.2022