

УДК 531.01

## **Исследование устойчивости положения равновесия трёхзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой**

**Майоров А.Ю.\*, Байков А.Е.\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: [ylam123@gmail.com](mailto:ylam123@gmail.com)*

*\*e-mail: [alexbaikov16@gmail.com](mailto:alexbaikov16@gmail.com)*

### **Аннотация**

Проведено исследование устойчивости положения равновесия трёхзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой, при наличии малых диссипативных сил, и при их отсутствии. Получены выражения для коэффициентов характеристического полинома линеаризованных уравнений движения. Исследована устойчивость положения равновесия в отсутствие диссипативных сил. Построена зона асимптотической устойчивости, зона Циглера (зона дестабилизации равновесия малыми диссипативными силами). Получен критерий асимптотической устойчивости положения равновесия неконсервативной системы с тремя степенями свободы при наличии малых диссипативных сил.

**Ключевые слова:** стержневая система, следящая сила, диссипативные силы, асимптотическая устойчивость, эффект Циглера, зона Циглера, критерий устойчивости.

### **Введение**

В настоящей работе решается задача об устойчивости положения равновесия механической системы с тремя степенями свободы, находящейся под действием как консервативных, так и не консервативных сил. Под неконсервативными силами понимаются диссипативные силы, а также позиционные силы, не допускающие

потенциала. Совокупное влияние потенциальных сил, диссипативных и неконсервативных позиционных сил на движение механической системы требует отдельного изучения. В работе рассматривается лишь некоторый частный случай этой проблемы.

Моделирование динамики ракетносителей (РН) напрямую связано с исследованием неконсервативных систем. Наиболее важной задачей в динамике РН является задача о влиянии диссипативных сил на устойчивость движения РН, когда система находится под воздействием неконсервативных позиционных сил [1]. Отметим, что в некоторых случаях малые диссипативные силы усиливают динамическую неустойчивость системы (из-за наличия дополнительных позиционных сил). Например, совокупное влияние сил аэродинамического сопротивления и реактивной силы тяги двигателя может привести к усилению поперечных колебаний РН. Или сила сопротивления и реактивная сила истечения жидкого топлива из конца заправочного шланга, соединяющего летательные аппараты во время дозаправки их в полёте, может привести к сильным поперечным колебаниям шланга.

Наибольшую известность среди неконсервативных задач получил парадокс дестабилизации (или эффект Циглера) [2]. Изучению этого явления посвящён целый ряд работ [3, 4]. В монографии [5] эффект Циглера рассматривается как частный случай проблемы устойчивости по первому приближению положения равновесия механической системы с конечным числом степеней свободы, находящейся под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил и линейных сил вязкого трения. В

перечисленных выше работах приведены результаты, описывающие или достаточные, или необходимые условия устойчивости.

Отсутствие явного критерия устойчивости объясняется алгебраической сложностью задачи. Так как характеристический полином содержит все ненулевые коэффициенты при всех степенях  $\lambda$ , то неравенства, следующие из критерия Рауса-Гурвица, имеют весьма сложный вид. Их трудно исследовать на совместность, открытым остаётся вопрос о приведении этих неравенств к простейшему виду.

Исследование устойчивости равновесия стержневой системы предлагается проводить в два этапа:

- Диссипации нет;
- Диссипация присутствует.

На первом этапе анализ устойчивости сводится к исследованию корней характеристического полинома  $P$ . Для системы с тремя степенями свободы эти условия эквиваленты (с точностью до соотношений типа равенства) положительности коэффициентов полинома  $P$  и дискриминанта [6]. Алгебраическая сложность заключается в громоздкости выражения для дискриминанта. Как следствие, построение областей устойчивости – нетривиальная задача.

На втором этапе, при наличии диссипативных сил, асимптотическую устойчивость равновесия можно исследовать различными способами. Традиционным методом получения условий устойчивости является теорема Рауса-Гурвица. Однако, для систем с малым числом степеней свободы система неравенств, следующая из теоремы

Рауса-Гурвица, сильно переопределена. В препринте [7] предложено построить критическое многообразие  $F$  в пространстве параметров системы. Оно соответствует таким значениям параметров, при которых характеристический полином  $P$  системы имеет по крайней мере один корень на мнимой оси. Критическое многообразие разбивает пространство параметров на области, где число  $n_-$  корней с отрицательной действительной частью полинома  $P$  постоянно. В области асимптотической устойчивости число  $n_-$  максимально.

Отметим, что в работе [7] многообразие  $F$  алгебраично, и для его построения применяются методы компьютерной алгебры. Для трёхзвенной стержневой системы критическое многообразие трансцендентно. По этой причине его практически невозможно построить (отсутствуют эффективные численные методы).

Для решения этой проблемы в работе мы уточняем постановку задачи следующим образом: диссипация считается малой. Это даёт возможность применить теорию возмущений. В качестве малого параметра выбираем безразмерный коэффициент диссипации  $\varepsilon$ . В работе [8] показано, что при известных частотах явный критерий асимптотической устойчивости имеет довольно простой вид. Мы применяем результаты статьи [8] для трёхзвенной стержневой системы.

## **1 Уравнения движения и положение равновесия**

Рассматривается трехзвенная стержневая система, состоящая из однородных стержней, находящаяся на гладкой горизонтальной плоскости  $AXY$ . На свободный

конец стержня  $CD$  действует следящая сила  $F$  (рис. 1). Твёрдые стержни, имеющие одинаковую длину  $l$  и массу  $m$ , соединены идеальными сферическими шарнирами. Стержень  $AB$  прикреплен сферическим шарниром к неподвижной стенке в точке  $A$ . Кроме шарниров, стержни соединены упругими спиральными пружинами с коэффициентом жесткости  $c$ . Спиральные пружины создают момент демпфирования, противоположный относительной угловой скорости, с коэффициентом  $b$ . Данная механическая система может служить дискретной моделью вязкоупругого стержня, на свободный конец которого действует следящая сила.

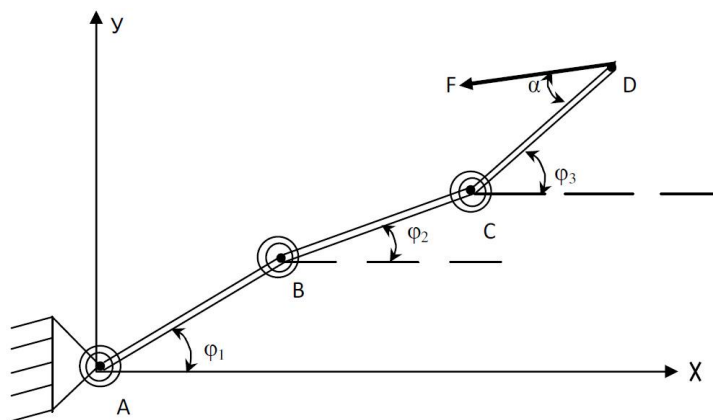


Рис. 1: Трёхзвенная стержневая система

Необходимо составить уравнения движения, обезразмерить их и найти положение равновесия. Для исследования устойчивости положения равновесия следует записать уравнения возмущенного движения, линеаризовать их, а затем провести линейный анализ устойчивости.

Введём обобщённые координаты  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ . Стержневая система является голономной системой с идеальными стационарными связями и следующими активными

силами: силами упругости в спиральных пружинах  $A, B$  и  $C$ , силами вязкого трения (демпфирования) в пружинах и следящей силой  $F$ .

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \phi_i} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\phi}_i} + Q_{\phi_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Здесь  $T$  – кинетическая энергия системы,  $\Pi$  – потенциальная энергия консервативных сил,  $\Phi$  – диссипативная функция Релея,  $Q_{\phi_i}$  – обобщённые силы, соответствующие следящей силе  $F$ . Отметим, что следящая сила  $F$  – неконсервативная позиционная сила, что легко проверяется неравенством  $\text{rot}Q \neq 0$ .

Запишем выражения для функций  $T$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$ ,  $Q_{\phi_i}$ :

$$T = \frac{7}{6}ml^2\dot{\phi}_1^2 + \frac{2}{3}ml^2\dot{\phi}_2^2 + \frac{1}{6}ml^2\dot{\phi}_3^2 + \frac{3}{2}ml^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + \\ + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}_1\dot{\phi}_3 \cos(\phi_3 - \phi_1) + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}_2\dot{\phi}_3 \cos(\phi_3 - \phi_2)$$

$$\Pi = \frac{c}{2}(\phi_1^2 + (\phi_2 - \phi_1)^2 + (\phi_3 - \phi_2)^2), \quad \Phi = \frac{b}{2}(\dot{\phi}_1^2 + (\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1)^2 + (\dot{\phi}_3 - \dot{\phi}_2)^2)$$

$$Q_{\phi_1} = -Fl \sin(\phi_3 - \phi_1 - \alpha), \quad Q_{\phi_2} = -Fl \sin(\phi_3 - \phi_2 - \alpha), \quad Q_{\phi_3} = Fl \sin(\alpha)$$

Подставляя полученные выражения в (1), имеем следующую систему уравнений движения:

$$\begin{aligned}
& \frac{7}{3}ml^2\ddot{\phi}_1 + \frac{3}{2}ml^2\ddot{\phi}_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) + \frac{1}{2}ml^2\ddot{\phi}_3 \cos(\phi_3 - \phi_1) - \frac{3}{2}ml^2\dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_2 - \phi_1) - \\
& - \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}_3^2 \sin(\phi_3 - \phi_1) = c(\phi_2 - 2\phi_1) + b(\dot{\phi}_2 - 2\dot{\phi}_1) - Fl \sin(\phi_3 - \phi_1 - \alpha) \\
& \frac{3}{2}ml^2\ddot{\phi}_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) + \frac{4}{3}ml^2\ddot{\phi}_3^2 + \frac{1}{2}ml^2\ddot{\phi}_3 \cos(\phi_3 - \phi_2) + \frac{3}{2}ml^2\dot{\phi}_1^2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - \\
& - \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}_3^2 \sin(\phi_3 - \phi_2) = c(\phi_3 + \phi_1 - 2\phi_2) + b(\dot{\phi}_3 + \dot{\phi}_1 - 2\dot{\phi}_2) - Fl \sin(\phi_3 - \phi_2 - \alpha) \\
& \frac{1}{2}ml^2\ddot{\phi}_1 \cos(\phi_3 - \phi_1) + \frac{1}{2}ml^2\ddot{\phi}_2 \cos(\phi_3 - \phi_2) + \frac{1}{3}ml^2\ddot{\phi}_3 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}_1^2 \sin(\phi_3 - \phi_1) + \\
& + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}_2^2 \sin(\phi_3 - \phi_2) = c(\phi_2 - \phi_3) + b(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3) + Fl \sin(\alpha)
\end{aligned} \tag{2}$$

Определим положения равновесия. Для этого рассмотрим, согласно принципу виртуальных перемещений [9], систему уравнений:

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \phi_i} + Q_{\phi_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned}
\phi_2 - 2\phi_1 &= \frac{Fl}{c} \sin(\phi_3 - \phi_1 - \alpha) \\
\phi_3 + \phi_1 - 2\phi_2 &= \frac{Fl}{c} \sin(\phi_3 - \phi_2 - \alpha) \\
\phi_2 - \phi_3 &= -\frac{Fl}{c} \sin(\alpha)
\end{aligned} \tag{3}$$

Введём новые параметры  $u, v$ , связанные с параметрами  $\gamma, \alpha$  следующими соотношениями:  $u = \gamma \cos(\alpha)$ ,  $v = \gamma \sin(\alpha)$ , где  $\gamma = \frac{Fl}{c}$ .

В новых параметрах  $u, v$  решение системы (3) имеет вид:

$$\phi_1^* = v - u \sin(v) + v \cos(v) - \cos(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \sin(2v) - v \cos(2v)) + \\ + \sin(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \cos(2v) + v \sin(2v))$$

$$\phi_2^* = 2v - 2u \sin(v) + 2v \cos(v) - \cos(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \sin(2v) - v \cos(2v)) + \\ + \sin(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \cos(2v) + v \sin(2v))$$

$$\phi_3^* = 3v - 2u \sin(v) + 2v \cos(v) - \cos(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \sin(2v) - v \cos(2v)) + \\ + \sin(u \sin(v) - v \cos(v)) \cdot (u \cos(2v) + v \sin(2v))$$

Для исследования устойчивости положения равновесия механической системы составим уравнения возмущённого движения. Рассмотрим возмущения:

$\phi_1 = \phi_1^* + \beta_1$ ,  $\phi_2 = \phi_2^* + \beta_2$ ,  $\phi_3 = \phi_3^* + \beta_3$ . Обезразмерим уравнения движения. В качестве единицы измерения углов рассмотрим единицу размерности (1 рад), единицы измерения

времени – характерное значение  $T^* = \sqrt{\frac{ml^2}{c}}$ . Параметр  $\varepsilon = \frac{b}{l\sqrt{mc}}$  имеет смысл

безразмерного коэффициента вязкого трения. Точкой теперь обозначена производная по безразмерному времени.

Составим уравнения линейного приближения. В векторно-матричной форме их можно записать в виде

$$A\ddot{\beta} + \varepsilon B\dot{\beta} + C\beta = 0 \quad (4)$$

где  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T$ ,  $A, B, C$  – матрицы третьего порядка. Для удобства введём зависимый параметр  $\delta = 2v - u \sin(v) + v \cos(v)$ . Тогда матрицы системы (4) имеют вид



$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{3}{2} \cos(\delta - \nu) & \frac{1}{2} \cos(\delta) \\ \frac{3}{2} \cos(\delta - \nu) & \frac{4}{3} & \frac{1}{2} \cos(\nu) \\ \frac{1}{2} \cos(\delta) & \frac{1}{2} \cos(\nu) & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 - u \cos(\delta) - u \sin(\delta) & -1 & u \cos(\delta) + \nu \sin(\delta) \\ -1 & 2 - u \cos(\nu) - \nu \sin(\nu) & -1 + u \cos(\nu) + u \sin(\nu) \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Устойчивость положения равновесия в отсутствие диссипации

Необходимо исследовать устойчивость решения  $\beta = \dot{\beta} = 0$  уравнений (4) при  $\varepsilon = 0$ . О ней можно судить по характеристическому уравнению. Чтобы записать характеристическое уравнение, воспользуемся подстановкой Эйлера  $\beta = e^{\lambda t} h$  в уравнения (4). Получим

$$(A\lambda^2 + \varepsilon B\lambda + C)h = 0, \quad (5)$$

где  $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ .

Для нахождения коэффициентов характеристического полинома воспользуемся алгоритмом Леверье, описание которого приводится в следующей теореме.

### Теорема 1.

Рассмотрим постоянную матрицу  $A$  размерности  $(n \times n)$  с характеристическим полиномом

$$\det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$$

Тогда резольвенту матрицы  $A$  можно представить в виде

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \sum_{i=0}^n s^i R_i,$$

где матрицы  $R_i$  определяются следующим образом:

$$R_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j A^{j-i}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$\alpha_n = 1$ . Коэффициенты  $\alpha_i$  и матрицы  $R_i, i = 1, 2, \dots, n$  могут быть определены с помощью следующего итерационного алгоритма.

Пусть

$$\alpha_n = 1, R_n = I \tag{6}$$

где  $I$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Тогда

$$\alpha_{n-k} = -\frac{1}{k} \text{tr}(AR_{n-k+1}) \tag{7}$$

$$R_{n-k} = \alpha_{n-k} I + AR_{n-k+1} \tag{8}$$

для  $k = 1, 2, \dots, n$ . При  $k = n$  имеем  $R_0 = 0$ .

Доказательство теоремы 2 см [10]

Чтобы воспользоваться теоремой 2, нужно привести систему (4) к стандартному виду Коши. Имеем

$$\begin{aligned} \dot{\beta} &= y \\ Ay + \varepsilon By + C\beta &= 0 \end{aligned}$$

или, после простейших преобразований,

$$\begin{aligned}\dot{\beta} &= y \\ \dot{y} &= -\varepsilon A^{-1}By - A^{-1}C\beta\end{aligned}\tag{9}$$

В векторно-матричном виде систему (9) можно записать в виде

$$\dot{z} = Mz$$

где  $z = (\beta, y)^T$ , матрица  $M$  – матрица размерности  $(6 \times 6)$ , играющая роль матриц  $A$  из теоремы 1 (так как  $n = 2m$ , и  $m = 3$  – количество степеней свободы). Матрица  $M$  имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -A^{-1}C & -\varepsilon A^{-1}B \end{pmatrix}$$

Здесь  $E$  – единичная матрица третьего порядка. Также обозначим через  $I$  единичную матрицу шестого порядка.

Свяжем характеристический полином уравнений (4) с характеристическим полиномом из теоремы 1.

Пусть  $\theta(\lambda) = \det(A\lambda^2 + \varepsilon B\lambda + C)$  – характеристический полином исходной задачи,  $\theta(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$  – характеристический полином из теоремы 2. Связь этих полиномов даётся формулой:

$$\theta(\lambda) = \det(A)\theta(\lambda)$$

Применяя формулы (6)–(8), получим следующие выражения для коэффициентов полинома  $\theta(\lambda)$ :

$$\alpha_6 = 1, R_6 = I, \alpha_5 = \varepsilon \operatorname{tr}(B),$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} \varepsilon \operatorname{tr}(B)E & E \\ -C & \varepsilon(\operatorname{tr}(B)E - B) \end{pmatrix}, \alpha_4 = \operatorname{tr}(C) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}((B)^2))$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} -C + \left( \operatorname{tr}(C) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}(B^2)) \right) E & \varepsilon(\operatorname{tr}(B)E - B) \\ \varepsilon(BC - C\operatorname{tr}(B)) & C + \operatorname{tr}(C)E + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left( (\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}(B^2))E - 2B\operatorname{tr}(B) + 2B^2 \right) \end{pmatrix}$$

Из-за громоздкости матриц  $R_i$  выражения для них далее не приводим. Имеем

$$\alpha_3 = \varepsilon (\operatorname{tr}(C)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(BC)) + \varepsilon^3 \det(B)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & \frac{1}{2} (\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2)) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\operatorname{tr}(C)\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}(C)\operatorname{tr}(B^2) + 2\operatorname{tr}(B^2 C) - 2\operatorname{tr}(BC)\operatorname{tr}(B)) + \\ & + \frac{\varepsilon^4}{2} (\operatorname{tr}(B^2)\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}^2(B^2) - 2\operatorname{tr}(B^3)\operatorname{tr}(B) + 2\operatorname{tr}(B^4) - 2\operatorname{tr}(B)\det(B)) \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициент при  $\varepsilon^4$  в выражении для  $\alpha_2$  равен нулю для любых квадратных матриц порядка 3. Поэтому формула для коэффициента  $\alpha_2$  имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & \frac{1}{2} (\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2)) + \frac{\varepsilon^2}{2} (\operatorname{tr}(C)\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}(C)\operatorname{tr}(B^2) + 2\operatorname{tr}(B^2 C) - 2\operatorname{tr}(BC)\operatorname{tr}(B)) \\ \alpha_1 = & \frac{\varepsilon}{2} (\operatorname{tr}^2(C)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(BC)\operatorname{tr}(C) + \operatorname{tr}(C^2 B) - \operatorname{tr}(B)\operatorname{tr}(C^2)) - \\ & - \frac{\varepsilon^3}{5} \operatorname{tr}(C) \left( 2\det(B) - \frac{3}{2} \operatorname{tr}^2(B)\operatorname{tr}(B) + \operatorname{tr}(B^3) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}^3(B) \right) + \frac{5}{2} \operatorname{tr}(BC) (\operatorname{tr}(B^2) - \operatorname{tr}^2(B)) + \\ & + 5 (\operatorname{tr}(B^2 C)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(B^3 C)) - \frac{\varepsilon^5}{5} \left( \frac{1}{2} (\operatorname{tr}(B^3)\operatorname{tr}^2(B) - \operatorname{tr}(B^3)\operatorname{tr}(B^2)) - \operatorname{tr}(B^4)\operatorname{tr}(B) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \operatorname{tr}(B^5) - \operatorname{tr}(B^2) \det(B))$$

В этой формуле коэффициенты при  $\varepsilon^3$  и  $\varepsilon^5$  равны нулю для любых квадратных матриц третьего порядка. Следовательно, выражения для  $\alpha_1$  имеет вид

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon}{2} \left( \operatorname{tr}^2(C) \operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(BC) \operatorname{tr}(C) + \operatorname{tr}(C^2 B) - \operatorname{tr}(B) \operatorname{tr}(C^2) \right)$$

Наконец, запишем выражение для коэффициента  $\alpha_0$ , в котором коэффициенты при  $\varepsilon^2, \varepsilon^4, \varepsilon^6$  равны нулю для любых квадратных матриц третьего порядка:

$$\alpha_0 = \det(C)$$

При записи коэффициентов использовались обозначения

$$B := A^{-1}B, \quad C := A^{-1}C$$

Также при выводе коэффициентов  $\alpha_i$  мы пользовались формулой выражения определителя матрицы через её след, справедливой для матриц третьего порядка:

$$\det(B) = \frac{1}{6} \left( \operatorname{tr}^3(B) - 3 \operatorname{tr}(B^2) \operatorname{tr}(B) + 2 \operatorname{tr}(B^3) \right)$$

Подставим  $\varepsilon = 0$  в характеристическое уравнение. Имеем уравнение шестой степени относительно  $\lambda$ , которое содержит ненулевые коэффициенты только при чётных степенях  $\lambda$ .

Для получения условия устойчивости воспользуемся методом, изложенным в [6]. Основываясь на этом методе, имеем следующий критерий устойчивости для линейных обратимых систем с двумя или тремя степенями свободы.

## Теорема 2.

Если  $m = 2$  или  $m = 3$ , то неравенства

$$f_0(P) > 0, \quad f_k(P) \geq 0, \quad k = 1, \dots, m-1$$

и

$$D(f) \geq 0$$

необходимы и достаточны для устойчивости.

Здесь  $D(f)$  – дискриминант характеристического полинома  $f$ ,  $f_k(P)$ ,  $k = 0, \dots, m-1$  – его коэффициенты.

Рассмотрим случай  $\alpha = 0$  или  $\alpha = \pi$  (так называемый случай Циглера). Тогда параметр  $\nu = 0$ . Сделаем замену  $\lambda = \sqrt{\mu}$  и запишем характеристическое уравнение системы (4):

$$\frac{13}{108}\mu^3 + \left(-\frac{19}{18}u + \frac{131}{36}\right)\mu^2 + \left(12 + \frac{49}{6}u + \frac{4}{3}u^2\right)\mu + 1 = 0$$

Дискриминант  $D$  имеет вид

$$D(u) = \frac{5693549}{5832} - \frac{7492171}{3888}u + \frac{70924849}{46656}u^2 - \frac{7273067}{11664}u^3 + \frac{1650937}{11664}u^4 - \frac{1373}{81}u^5 + \frac{68}{81}u^6$$

Условия теоремы 2 представляются в виде неравенств

$$\frac{131}{36} - \frac{19}{18}u \geq 0, \quad 12 - \frac{49}{6}u + \frac{4}{3}u^2 \geq 0, \quad D(u) \geq 0$$

Решим последнюю систему неравенств графически (рис. 2).

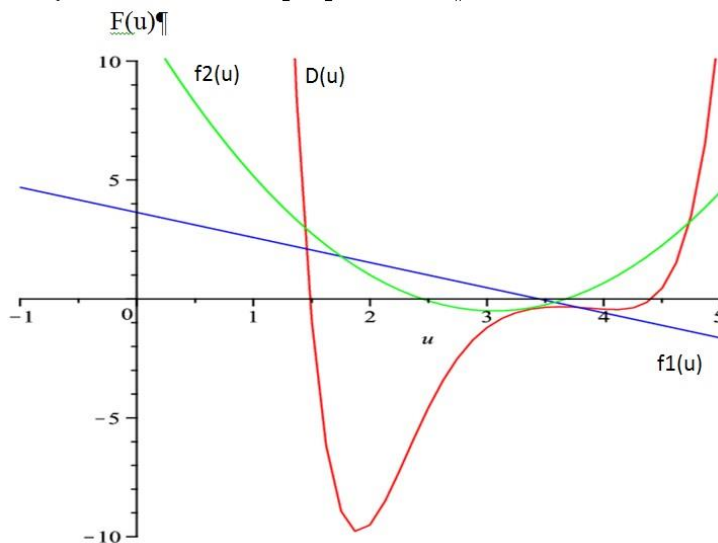


Рис.2: График коэффициентов и дискриминанта характеристического полинома

Из рис. 2 видно, что условия теоремы 2 одновременно выполняются в интервале  $(-\infty; u^*)$ . Чтобы определить значение  $u^*$ , воспользуемся методом Ньютона решения нелинейных уравнений. Уравнение, из которого определяется  $u^*$ , имеет вид

$$D(u) = 0$$

Возьмём начальную точку  $u = 0.5$  и установим точность  $\delta = 0.000000001$ . Метод Ньютона сошёлся за 8 итераций к точке  $u^* = 1.483549109$ .

Итак, мы получили следующий результат: устойчивость положения равновесия в отсутствие диссипативных сил возможна лишь в том случае, если  $u \leq u^* = 1.483549109$ .

Далее рассмотрим случай, когда  $|v| \neq 0$ , но мало. На основании теоремы 2 построим графики дискриминанта и коэффициентов полинома частот. Отметим, что для  $v \neq 0$  дискриминант и коэффициенты не являются полиномами относительно  $u$ , и

поэтому могут иметь бесконечное (счётное) число корней.

Пусть  $\nu = 0.001$ . На рис. 3 изображены графики коэффициентов и дискриминанта характеристического полинома.

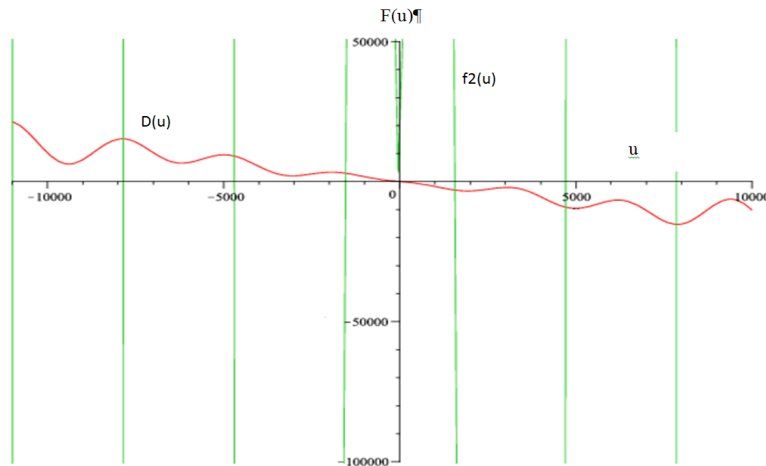


Рис.3: График коэффициентов и дискриминанта характеристического полинома

Коэффициенты имеют счётное число корней при  $u < 0$ .

Отсюда имеем неожиданный результат: следящая сила действует почти вдоль стержня CD с незначительной поперечной составляющей. Когда  $\nu = 0$ , равновесие устойчиво при любом отрицательном  $u$ , что очевидно, поскольку тогда сила  $F$  растягивает систему. Однако, если  $\nu$  даже ничтожно мало, то существуют такие значения следящей силы, растягивающей систему, при которых положение равновесия неустойчиво. Данный результат не следует из интуитивных соображений.

### 3 Влияние малой диссипации на устойчивость положения равновесия

В [8] дано определение эффекта Циглера.



## Определение.

Пусть положение равновесия уравнений движения устойчиво в первом приближении при  $\varepsilon = 0$ . Будем говорить, что в системе имеет место эффект Циглера, если решение  $\beta = \dot{\beta} = 0$  линеаризованной системы (4) неустойчиво при сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$ .

В работе [8] изложен метод исследования устойчивости положения равновесия неконсервативной системы. Применим его к системе с тремя степенями свободы.

Запишем характеристический полином  $\theta(\lambda, \varepsilon)$  системы в общем виде

$$\theta(\lambda, \varepsilon) = \det(A)\lambda^6 + \alpha_5\lambda^5 + \alpha_4\lambda^4 + \alpha_3\lambda^3 + \alpha_2\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

Далее запишем выражение для вспомогательного полинома  $\Delta(\omega)$ :

$$\Delta(\omega) = -\det(A)\omega^6 + \alpha_4|_{\varepsilon=0}\omega^4 - \alpha_2|_{\varepsilon=0}\omega^2 + \det(C)$$

или, после подстановки выражений для коэффициентов  $\alpha_i$  и замены  $\omega^2 = \mu$ ,

$$\Delta(\mu) = -\det(A)\mu^3 + \operatorname{tr}(C)\mu^2 - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2)\right)\mu + \det(C)$$

Чтобы получить разложение корней характеристического уравнения, воспользуемся теоремой о неявной функции. Из неё следуют формула для коэффициента перед  $\varepsilon$  в разложении корня характеристического уравнения:

$$\lambda_j^{(1)} = -\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}\right)^{-1}\bigg|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega}, \quad j=1,2,3.$$

Имеем

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial \alpha_5}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda^5 + \left. \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda^3 + \left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \lambda$$

Введём обозначения

$$\left. \frac{\partial \alpha_5}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_5, \left. \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_3, \left. \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \beta_1$$

В новых обозначениях выражение для числителя имеет вид

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega, \varepsilon=0} = i\omega(\beta_5\omega^4 - \beta_3\omega^2 + \beta_1)$$

Запишем выражение для знаменателя:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega} = 6i\det(A)\omega^5 - 4i\operatorname{tr}(C)\omega^3 + i(\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2))\omega$$

Производная полинома  $\Delta$  в нуле:

$$\left. \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \right|_{\varepsilon=0} = -3\det(A)\mu^2 + 2\operatorname{tr}(C)\mu - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2))$$

Нетрудно заметить, что

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega} = -2i\omega \left. \frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \right|_{\varepsilon=0, \mu=\omega^2}$$

Таким образом, мы получили явный вид выражения для коэффициентов  $\lambda_j^{(1)}$ :

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{\beta_5\omega_j^4 - \beta_3\omega_j^2 + \beta_1}{2\Delta'(\mu)|_{\mu=\omega_j^2}}, \quad j=1, 2, 3,$$

или, после подстановки значений коэффициентов  $\beta_5, \beta_3, \beta_1$ ,

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{\operatorname{tr}(B)\omega_j^4 - (\operatorname{tr}(C)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(BC))\omega_j^2 + \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2(C)\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(BC)\operatorname{tr}(C) + \operatorname{tr}(C^2B) - \operatorname{tr}(B)\operatorname{tr}(C^2))}{-3\det(A)\omega_j^4 + 2\operatorname{tr}(C)\omega_j^2 - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}^2(C) - \operatorname{tr}(C^2))}, \quad j=1,2,3.$$

Коэффициенты  $\lambda_j^{(1)}$  оказываются действительными.

Получим критерий асимптотической устойчивости положения равновесия неконсервативной системы с тремя степенями свободы. Для этого рассмотрим вспомогательный полином  $\Delta(\mu)$ . Заметим, что  $\Delta(0) = \alpha_0 = \det(C)$ . Для устойчивости положения равновесия при  $\varepsilon = 0$  необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\Delta'(\mu_1) < 0, \quad \Delta'(\mu_2) > 0, \quad \Delta'(\mu_3) < 0 \quad (10)$$

В частности, для устойчивости необходимо неравенство  $\alpha_0 = \det(C) > 0$  (рис. 4):

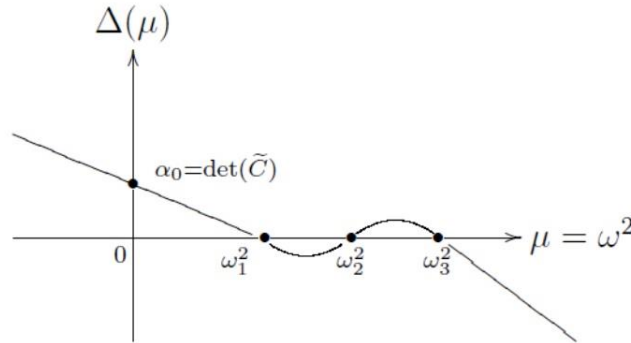


Рис. 4: Схематическое изображение условия устойчивости

Рассмотрим выражение для коэффициентов разложения корней

характеристического полинома:  $\lambda_j^{(1)} = -\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \lambda} \right)^{-1} \Bigg|_{\varepsilon=0, \lambda=i\omega}$ ,  $j=1,2,3$ .

Для асимптотической устойчивости все коэффициенты  $\lambda_j^{(1)}$  должны быть меньше нуля.

Поэтому, согласно системе неравенств (10), выражения  $\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega_j, \varepsilon=0}$ ,  $j=1,2,3$  должны

удовлетворять системе неравенств:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega_1, \varepsilon=0} > 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega_2, \varepsilon=0} < 0, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} \right|_{\lambda=i\omega_3, \varepsilon=0} > 0 \quad (11)$$

или, в явном виде,

$$\begin{aligned} \beta_5 \omega_1^4 - \beta_3 \omega_1^2 + \beta_1 &> 0 \\ \beta_5 \omega_2^4 - \beta_3 \omega_2^2 + \beta_1 &< 0 \\ \beta_5 \omega_3^4 - \beta_3 \omega_3^2 + \beta_1 &> 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Для решения этих неравенств рассмотрим квадратное уравнение

$$\beta_5 \mu^2 - \beta_3 \mu + \beta_1 = 0 \quad (13)$$

где  $\mu = \omega^2$ . Корни уравнения (13) имеют вид

$$\mu_* = \frac{\beta_3 - \sqrt{\beta_3^2 - 4\beta_1\beta_5}}{2\beta_5}, \quad \mu^* = \frac{\beta_3 + \sqrt{\beta_3^2 - 4\beta_1\beta_5}}{2\beta_5}$$

Следовательно, для асимптотической устойчивости положения равновесия необходимо и достаточно выполнение цепочки неравенств

$$\mu_1 < \mu_* < \mu_2 < \mu^* < \mu_3$$

где  $\mu_i$  – корни уравнения  $\Delta(\mu) = 0$  (рис. 5).

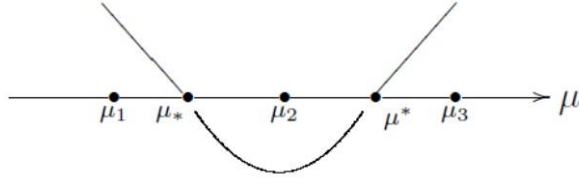


Рис. 5: Схематическое изображение условия устойчивости

### Критерий асимптотической устойчивости.

Для асимптотической устойчивости положения равновесия  $\dot{\beta} = \beta = 0$  уравнений (4) с точностью до соотношений типа равенства необходимо и достаточно выполнение цепочки неравенств

$$\mu_1 < \mu_* < \mu_2 < \mu^* < \mu_3 \quad (14)$$

где  $\mu_*, \mu^*$  – корни уравнения (13),  $\mu_j, j = 1, 2, 3$  – корни полинома  $\Delta$ .

Вернемся к трёхзвенной стержневой системе. Вновь рассмотрим частный случай, когда следящая сила  $F$  действует вдоль стержня, т. е.  $\alpha = 0$ . Подставим значения безразмерных параметров  $u, v$  в выражение для коэффициентов  $\lambda_j^{(1)}$  разложения корней характеристического полинома  $\theta(\lambda; \varepsilon)$  и получим формулу

$$\lambda_j^{(1)} = \frac{5\omega_j^4 - (5u - 12)\omega_j^2 + 5u^2 - 25u + \frac{131}{4}}{-3\omega_j^4 + (10 - 4u)\omega_j^2 - u^2 - 5u - 6}$$

Корни квадратного уравнения (13) вычисляются по формулам

$$\mu^* = \frac{432}{131} - \frac{147}{131}u + \frac{3}{131}\sqrt{19164 - 14112u + 2401u^2}$$

$$\mu_* = \frac{432}{131} - \frac{147}{131}u - \frac{3}{131}\sqrt{19164 - 14112u + 2401u^2}$$

Условия асимптотической устойчивости записываются в виде (14).

Построим зону асимптотической устойчивости и зону Циглера. Полином  $\Delta(\mu)$  имеет вид

$$\Delta(\mu) = \frac{13}{108}\mu^3 + \left(-\frac{19}{18}u + \frac{131}{36}\right)\mu^2 + \left(12 + \frac{49}{6}u + \frac{4}{3}u^2\right)\mu + 1$$

Графики корней характеристического полинома и корней квадратного уравнения представлены на рис. 6.

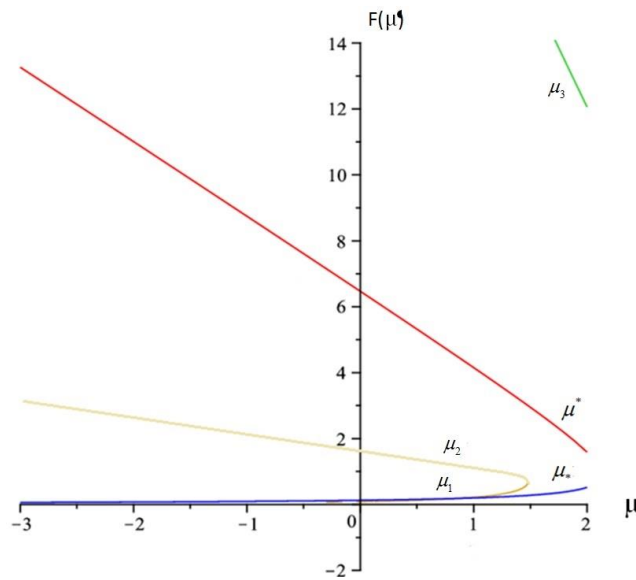


Рис. 6: Совместные графики  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_*, \mu^*$

Как видно из рис. 6, корни удовлетворяют условиям  $\mu_1 < \mu_* < \mu_2 < \mu^* < \mu_3$  в некоторой области. Чтобы её определить найдём точку пересечения графиков корней  $\mu_1, \mu_*$ . Для этого воспользуемся методом Ньютона.

Метод Ньютона сошелся за 15 итераций к точке  $u^{**} = 0.86897465$  с точностью

$$\delta = 0,00000001.$$

Таким образом, построена зона Циглера – область дестабилизации устойчивого в отсутствие диссипации положения равновесия системы (4) малыми силами трения:

$$0.86897465 = u^{**} < u < u^* = 1.483549109$$

## **Выводы**

В работе исследована устойчивость положения равновесия трёхзвенной стержневой системы, нагруженной следящей силой. В случае отсутствия сил вязкого трения получен критерий асимптотической устойчивости для любых систем с тремя степенями свободы. В частном случае, когда следящая сила направлена вдоль стержня, получены в явном виде условия асимптотической устойчивости трёхзвенной стержневой системы.

При наличии малых сил трения в пружинных получен критерий асимптотической устойчивости для любых систем с тремя степенями свободы. Так же исследован эффект Циглера. В частном случае, когда следящая сила направлена вдоль стержня получены в явном виде условия дестабилизации устойчивого положения равновесия малыми силами трения.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №14-21-00068.*

## Библиографический список

1. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1975, 416 с.
2. Ziegler H. Die Stabilitätskriterien der Alastomechanik // Ing. Arch. 1952. Bd. 20. H 1. 49-56.
3. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. - М.: Мир, 1971. - 192 с.
4. Сейранян А.П. Парадокс дестабилизации в задачах устойчивости неконсервативных систем // Успехи механики. 1990. Т. 13. № 2. С. 89-124.
5. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. - М.: Наука, 1976. - 319 с.
6. Брюно А.Д. Множество устойчивости многопараметрических задач. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша, - М.: 2010, - 14 с.
7. Брюно А.Д., Бахтин А.Б., Варин В.П. Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт ИМП им. М. В. Келдыша РАН. – М.: 2010. - 30 с.
8. Байков А. Е., Красильников П. С. Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе // Прикладная математика и механика, 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 74 – 88.
9. Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. - М.: ЧеРо, 1999, - 572 с.
10. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. - М.: Мир, 1977. - 650 с.