УДК 536.2

Нелинейная задача теплопроводности для тонкой оболочки

Горюнов А.В.*, Молодожникова Р.Н, Прокофьев А.И.

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail:msgor@mail.ru*

Аннотация

Рассмотрена задача о нагреве произвольной тонкостенной оболочки плоскопараллельным лучистым тепловым потоком от бесконечно удаленного источника излучения. Между оболочкой и окружающей средой происходит конвективный теплообмен. Теплофизические параметры зависят от температуры. Построены различные асимптотические зависимости для расчета температурного поля оболочки. Эти решения обеспечивают необходимую для практических расчетов точность при использовании для конструкций летательных аппаратов.

Ключевые слова: нелинейная задача теплопроводности; летательные аппараты; лучистый тепловой поток; конвективный теплообмен; асимптотические решения; тонкостенная оболочка

Введение.

В конструкциях летательных аппаратов широкое применение находят тонкостенные оболочки. Одной из актуальных задач является определение несущей способности таких конструкций при различных термических и силовых нагрузках [1;2]. Первым этапом решения несвязанной квазистатической задачи термоупругости является определение температурного поля конструкции. В случае значительного изменения температуры необходимо учитывать зависимость теплофизических параметров от температуры [3].

Постановка задачи.

Данная работа посвящена изучению температурного поля произвольной тонкостенной оболочки при нагреве плоскопараллельным лучистым тепловым потоком от бесконечно удаленного источника излучения. Между оболочкой и окружающей средой происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона. Нелинейная задача теплопроводности описывается дифференциальным уравнением теплопроводности [4]

$$c\rho \frac{\partial t}{\partial Fo} = \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{B}{A}\lambda \frac{\partial t}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{A}{B}\lambda \frac{\partial t}{\partial \alpha_2}\right)\right) + \frac{q(Fo)}{h}\cos\varphi - \alpha Bi^*(t - t_c) \qquad (1)$$

при начальном

$$t|_{F_o} = t_o$$

и граничном

$$\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0$$

условиях, где

$$c = \frac{c^o}{c_o^o}, \quad \rho = \frac{\rho^o}{\rho_o^o}, \quad t = \frac{t^o \lambda_o^o}{q_m^o R}, \quad \lambda = \frac{\lambda^o}{\lambda_o^o}, \quad Fo = \frac{a_o^o \tau}{R^2}, \quad \alpha_1 = \frac{\alpha_1^o}{R}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_2^o}{R},$$

$$h = \frac{h^o}{R}, \quad Bi^* = \frac{\alpha_o^o R^2}{\lambda_o^o h^o}, \quad q(Fo) = \frac{q^o(Fo)}{q_m^o}, \quad t_c = \frac{t_c^o \lambda_o^o}{q_m^o R}, \quad \alpha = \frac{\alpha^o}{\alpha_o^o}.$$

Здесь принято, что перепад температуры по толщине оболочки равен нулю, по граничному контуру Г оболочка теплоизолирована и введены обозначения: t^0- функция распределения температуры по оболочке, t_c^o- температура окружающей среды, α_1^o и α_2^o – координаты в срединной поверхности оболочки, n – нормаль к граничному контуру, τ – время, φ – угол падения лучистого теплового потока на поверхность оболочки, h^o – толщина оболочки, $q(Fo)$ и q_m^o – функция лучистого теплового потока и ее максимальное значение, α^o – коэффициент теплоотдачи от оболочки в окружающую среду, c^o, ρ^o, λ^o и α^o – теплоемкость, плотность, теплопроводность и температуропроводность материала оболочки, $c_o^o, \rho_o^o, \lambda_o^o$, a_o^o и α_o^o – значения соответствующих коэффициентов при начальной температуре, A и B –коэффициенты первой квадратичной формулы, R – наименьший радиус кривизны срединной поверхности оболочки.

Будем считать, что в начальный момент времени температура оболочки равна нулю, температура окружающей среды остается нулевой в рассматриваемом промежутке времени.

Методология решения.

Известно [4,5], что при

$$Fo < 0{,}1 \text{ и } Bi^* > 10 \qquad (2)$$

процесс теплопроводности в срединной поверхности оболочки оказывает незначительное влияние на температурное поле оболочки и им можно пренебречь.

При малых временах [4,5]

$$Fo^* = Bi^* Fo < 0{,}1 \qquad (3)$$

конвективный теплообмен между оболочкой и окружающей средой не успевает существенно повлиять на функцию распределения температуры.

В случае выполнения условий (2), (3) и линейной зависимости

$$c\rho = c_o + c_1 t \tag{4}$$

из уравнения теплопроводности (1) получаем

$$c_o t + \frac{c_1 t^2}{2} = \frac{\cos\varphi}{h}\int_0^{Fo} q(\tau)d\tau$$

Тогда решение задачи принимает вид

$$t = \frac{-c_o + \sqrt{c_0^2 + 2c_1 \frac{\cos\varphi}{h}\int_0^{Fo} q(\tau)d\tau}}{c_1}. \tag{5}$$

При произвольной зависимости теплофизических параметров от температуры и выполнении условий (2) из уравнения (1) методом вариации произвольной постоянной получаем формулу для расчета температурного поля оболочки

$$t = \frac{\cos\varphi}{h}\exp\left(-Bi\int_0^{Fo}\frac{\alpha}{c\rho}d\xi\right)\int_0^{Fo}\frac{q(\xi)}{c\rho}exp\left(Bi\int_0^{\xi}\frac{\alpha}{c\rho}d\zeta\right)d\xi \tag{6}$$

Если конвективный теплообмен между оболочкой и окружающей средой не оказывает существенного влияния на функции распределения температуры, то асимптотическое решение задачи упрощается:

$$t = \frac{\cos\varphi}{h}\int_0^{Fo}\frac{q(\xi)}{c\rho}d\xi \tag{7}$$

В случае слабой зависимости теплофизических параметров от температуры для расчетов температурных полей можно использовать выражения

$$t = \frac{\cos\varphi}{h}e^{-Fo^*}\int_0^{Fo} q(\xi)e^{Bi\xi}\,d\xi \tag{8}$$

и

$$t = \frac{\cos\varphi}{h}\int_0^{Fo} q(\xi)d\xi \tag{9}$$

(последнее не учитывает конвективный теплообмен).

Если нормальная составляющая лучистого теплового потока в соответствующей части оболочки невелика (угол падения потока на поверхность оболочки достаточно тупой), то максимальные значения температур могут быть таковы, что теплофизические параметры можно считать постоянными. Тогда для расчетов температурных полей в данной зоне можно использовать решение линейной задачи (8) или (9).

Частные случаи.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, на которую перпендикулярно ее оси падает лучистый тепловой поток (рис. 1):

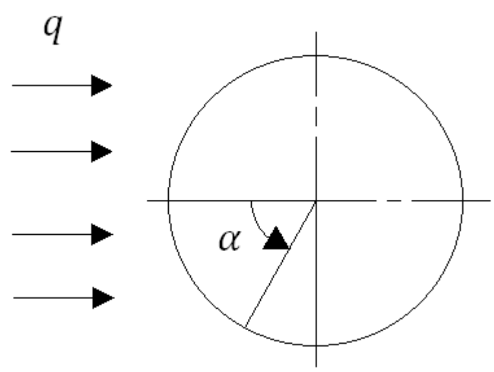

Рис. 1. Нагрев цилиндрической оболочки.

Зависимость для косинуса угла падения принимает вид

$$\cos\varphi = \cos\alpha\,\eta\left(\frac{\pi}{2} - |\alpha|\right),\ -\pi < \alpha \le \pi,$$

$$\text{где } \eta(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \ge 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Приведем аналогичные зависимости для конической оболочки (рис. 2):

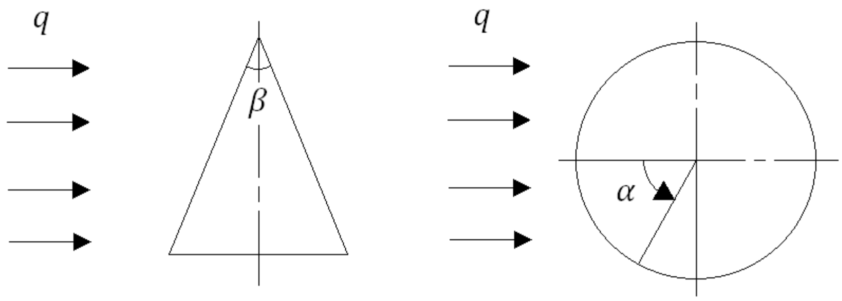

Рис. 2. Нагрев конической оболочки.

$$\cos\varphi = \cos\frac{\beta}{2}\cos\alpha\,\eta\left(\frac{\pi}{2} - |\alpha|\right), \qquad -\pi < \alpha \le \pi$$

и для сферической оболочки (рис. 3):

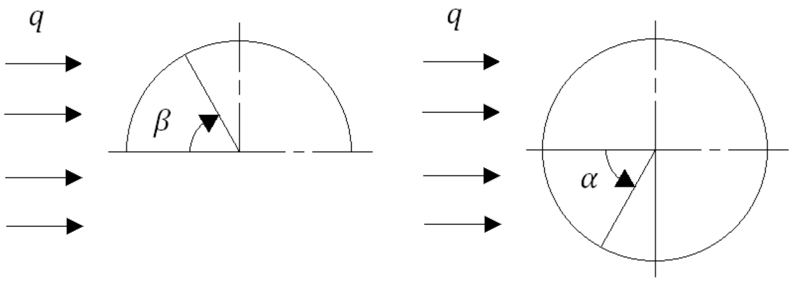

Рис. 3. Нагрев сферической оболочки.

$$\cos\varphi = \cos\beta\cos\alpha\,\eta\left(\frac{\pi}{2} - |\alpha|\right), \qquad 0 \le \beta \le \pi, \qquad -\pi < \alpha \le \pi.$$

Заключение.

Геометрические характеристики оболочек, применяемых в конструкциях летательных аппаратов, а так же условия их эксплуатации обеспечивают достаточно широкие временные промежутки, на которых построенные асимптотические формулы обеспечивают достаточную для практических расчетов точность.

Библиографический список

1.Афанасьев П.П., Голубев И.С., Лавочкин С.Б., Новиков В.Н., Парафесь С.Г., Пестов М.Д., Туркин И.К. Под редакцией Голубева И.С., Туркина И.К. Беспилотные летательные аппараты. Основы устройства и функционирования – М.: МАИ, 2010, 654с.

2.Туркин И.К. Проектирование тонкостенных конструкций ЛА, функционирующих в экстремальных условиях. – М.: МАИ, 2000, 304с.

3.Безухов Н.И., Баженов В.Л., Гольденблат Н.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур (под редакцией Гольденблата Н.И.). – М.: Машиностроение, 1965, 567с.

4.Зино И.Е., Тропп Э.А. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности. – Л.: ЛГУ, 1978, 224с.

5.Горюнов А.В., Клименко Б.М., Румянцев Б.П., Самарин А.В Теоретико-экспериментальное исследование температурных полей в тонкостенных конструкциях при неравномерном нагреве. В сб.: Температурные задачи и устойчивость пластин и оболочек. Саратов: Издательство Саратовского Университета, 1988, с. 12-14.

6.Горшков А.Г., Горюнов А.В., Либерзон Р.Е. Односторонний нагрев цилиндрической оболочки. – Мат. методы и физ.-мех. поля, 1982, вып. 16, с. 52-55.