

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Станислав Сергеевич ДМИТРИЕВ родился в 1983 г. в городе Алма-Ате. Аспирант МАИ. Основные научные интересы — в области численных методов. Автор 11 научных работ. E-mail: stas_2k@mail.ru

Stanislav S. DMITRIEV, was born in 1983, in Alma-Ata. He is a Postgraduate Student at the MAI. His research interests are in numerical methods. He has published 11 technical papers. E-mail: stas_2k@mail.ru

Евгений Борисович КУЗНЕЦОВ родился в 1946 г. в городе Ростове-на-Дону. Профессор МАИ. Доктор физико-математических наук, профессор. Основные научные интересы — в области численных методов, задач механики деформируемого твердого тела. Автор более 150 научных работ. E-mail: kuznetsov@mai.ru

Evgeny B. KUZNETSOV, D.Sci, was born in 1946, in Rostov-on-Don. He is a Professor at the MAI. His research interests are in numerical methods and mechanics of deformable bodies. He has published over 150 technical papers. E-mail: kuznetsov@mai.ru

Расчет авиационных и ракетно-космических конструкций на прочность с учетом ползучести материала может быть сведен к численному решению систем дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом. Для численного решения таких систем предложен подход, основанный на методе дискретного продолжения по наилучшему аргументу. Получена оценка погрешности метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений после преобразования задачи к наилучшему аргументу. С использованием указанного подхода численно решена система уравнений, описывающая процесс виброверления.

Problem of analyzing of durability of aviation and rocket-space constructions subject to creep of material may be reduced to numerical solving of systems of differential-algebraic equations with delay argument. Approach for solving systems of differential-algebraic equations, based on discrete continuation along the best argument is considered. Error estimation of solution of the system of nonlinear equations by Newton's method is obtained. System that describes process of vibration-drilling is solved via this approach.

Ключевые слова: авиационные конструкции, ракетно-космические конструкции, система дифференциально-алгебраических уравнений, наилучший аргумент, непрерывное продолжение, дискретное продолжение.

Key words: aviation constructions, rocket-space construction, system of differential-algebraic equations, the best argument, continuous continuation, discrete continuation.

Введение

Рассматривается задача Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ), т.е. системы, состоящей из обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и недифференциальных соотношений

$$\begin{cases} F(y, \dot{y}, x, t) = 0, & y(t_0) = y_0; \\ G(y, x, t) = 0, & x(t_0) = x_0; \end{cases} \quad (1)$$

$$y: R^1 \rightarrow R^n, \quad x: R^1 \rightarrow R^m, \quad t \in R^1, \\ F: R^{2n+m+1} \rightarrow R^n, \quad G: R^{n+m+1} \rightarrow R^m.$$

Такие системы встречаются при расчете конструкций авиационной и ракетно-космической техники, находящихся в состоянии ползучести.

Численное решение задачи (1) впервые, по-видимому, исследовалось в работе [1]. Система, описывающая процессы, протекающие в электрических цепях, интегрировалась с использованием формул дифференцирования назад.

На сегодняшний день разработано множество методов численного решения таких систем. Современное состояние данной проблемы отражено в монографиях [2–4], а также в многочисленных статьях, посвященных решению данной задачи (см., например, [5–7]).

Следует отметить, что решение ДАУ является более трудной задачей по сравнению с решением ОДУ. В работе [2], например, отмечается, что система линейных уравнений, решаемая на каждом шаге процедуры интегрирования, является плохо обусловленной для мелких шагов. Кроме того,

ошибка метода чувствительна к несогласованности в начальных данных и к резкому изменению решения.

В работе [8] решение систем вида (1) рассмотрено с позиции метода продолжения по наилучшему аргументу, которым является длина дуги интегральной кривой задачи (1) и предложен подход, названный непрерывным продолжением. Данный подход, основанный на дифференцировании недифференциальных соотношений и введении наилучшего аргумента, позволяет ослабить трудности, отмеченные выше. Так, система уравнений продолжения, решаемая на каждом шаге процедуры интегрирования, получается наилучшим образом обусловленной, а в силу выбора аргумента ошибка становится менее чувствительной к резкому изменению решения. Недостатком данного подхода является необходимость дифференцирования недифференциальных соотношений.

В данной работе система (1) решается при помощи метода дискретного продолжения, в котором уравнения продолжения получаются без дифференцирования недифференциальных соотношений.

Наилучший аргумент системы дифференциально-алгебраических уравнений

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y, x, t), & y(t_0) = y_0; \\ G(y, x, t) = 0, & x(t_0) = x_0; \end{cases} \quad (2)$$

$$y: R^1 \rightarrow R^n, \quad x: R^1 \rightarrow R^m, \quad t \in [t_0, T], \\ f: R^{n+m+1} \rightarrow R^n, \quad G: R^{n+m+1} \rightarrow R^m.$$

Причем начальные условия должны быть согласованными, т.е. должно выполняться равенство

$$G(y_0, x_0, t_0) = 0.$$

Пусть интеграл задачи (2) задается соотношением

$$F(y, x, t) = 0, \quad F(y_0, x_0, t_0) = 0, \quad F = (F_1, \dots, F_{n+m})^T, \quad (3)$$

которое задает в $(n+m+1)$ -мерном евклидовом пространстве R^{n+m+1} единственную гладкую интегральную кривую K . Процесс построения этой кривой можно рассматривать как задачу определения множества решений системы нелинейных уравнений (3), содержащих параметр-аргумент t . Будем решать эту систему методом продолжения по пара-

метру [9]. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$ — функции параметра t , тогда уравнения продолжения строятся дифференцированием (3) по параметру t :

$$\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Разрешим (4) относительно производных:

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{dt} \\ \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = -J^{-1} \frac{\partial F}{\partial t}, \quad (5)$$

где $J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial x} \end{bmatrix}$ — матрица Якоби.

Существенные вычислительные трудности будут возникать в тех точках кривой множества решений системы уравнений (3), где якобиан $\det(J)$ становится малым. В тех точках, в которых якобиан обращается в ноль, эти трудности становятся непреодолимыми. Встает вопрос о смене параметра продолжения и о выборе наилучшего параметра продолжения решения системы (3), а значит, и наилучшего аргумента системы (2).

Наилучший аргумент вводится локально, т.е. в малой окрестности каждой точки интегральной кривой. Рассмотрим приращение аргумента μ в виде

$$d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i dy_i + \sum_{j=1}^m \beta_j dx_j + \gamma dt, \quad (6)$$

где $\alpha_i, \beta_j, \gamma$ — компоненты единичного вектора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m, \gamma)^T \in R^{n+m+1}$, задающего направление оси, вдоль которой отсчитывается аргумент μ .

Уравнения продолжения получим, разделив уравнение (6) на $d\mu$ и приняв во внимание равен-

ство $\frac{dy_i}{dt} = \frac{dy_i/d\mu}{dt/d\mu}$, а также продифференцировав

вектор-функцию G по μ :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \alpha_i y_{i,\mu} + \sum_{j=1}^m \beta_j x_{j,\mu} + \gamma t_{,\mu} = 1; \\ y_{,\mu} - f t_{,\mu} = 0; \\ \sum_{i=1}^n G_{,y_i} y_{i,\mu} + \sum_{j=1}^m G_{,x_j} x_{j,\mu} + G_{,t} t_{,\mu} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $y_{,\mu} = \frac{dy}{d\mu}$; $x_{,\mu} = \frac{dx}{d\mu}$; $t_{,\mu} = \frac{dt}{d\mu}$; $G_{,y_i} = \frac{dG}{dy_i}$.

Обусловленность системы (7) зависит от выбора аргумента μ , который определяется вектором α . В [8] показано, что параметром, доставляющим наилучшую обусловленность системе линейных уравнений продолжения, является длина дуги λ , отсчитываемая вдоль интегральной кривой задачи (2), и доказана следующая теорема:

Теорема. Для того чтобы задачу Коши (2) для системы ДАУ преобразовать к наилучшему аргументу, необходимо и достаточно выбрать в качестве такового длину дуги λ , отсчитываемую вдоль интегральной кривой задачи.

Тогда выражение для наилучшего аргумента можно переписать в виде

$$d\lambda^2 = \sum_{i=1}^m dx_i^2 + \sum_{j=1}^n dy_j^2 + dt^2.$$

Если аргумент λ отсчитывать от начальной точки задачи (2), то начальные условия примут вид

$$y(0) = y_0, \quad x(0) = x_0, \quad t(0) = t_0. \quad (8)$$

Непрерывное продолжение по наилучшему аргументу

Рассмотрим задачу Коши для системы ДАУ (2). Применим подход, предложенный в [8] и основанный на преобразовании задачи к наилучшему аргументу и дифференцировании недифференциальных соотношений. Обозначим

$$\frac{dy}{d\lambda} = Y, \quad \frac{dx}{d\lambda} = X, \quad \frac{dt}{d\lambda} = T, \quad (9)$$

$$Y = (Y_1, \dots, Y_n)^T, \quad X = (X_1, \dots, X_m)^T.$$

После дифференцирования по λ вектор-функции G с учетом обозначений (9) и смысла наилучшего аргумента система (2) примет вид

$$\begin{cases} Y_i - f_i T = 0; \\ \sum_{i=1}^n G_{,y_i} Y_i + \sum_{j=1}^m G_{,x_j} X_j + G_{,t} T = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n Y_i Y_i + \sum_{j=1}^m X_j X_j + T T = 1, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$G_{,y_i} = \frac{\partial G}{\partial y_i}; \quad G_{,x_i} = \frac{\partial G}{\partial x_i}; \quad G_{,t} = \frac{\partial G}{\partial t}.$$

Из-за последнего уравнения система (10) является нелинейной относительно Y, X, T , однако ее можно представить в линейном виде, если использовать решение, найденное на k -м шаге процесса продолжения решения. Обозначим через $Z^* = (Y^*, X^*, T^*)^T$ единичный вектор размерности $n + m + 1$, вычисленный на предыдущем шаге процедуры интегрирования. Тогда система (10) на следующем шаге примет вид

$$\begin{cases} Y_i - f_i T = 0; \\ \sum_{i=1}^n G_{,y_i} Y_i + \sum_{j=1}^m G_{,x_j} X_j + G_{,t} T = 0, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum_{i=1}^n Y_i^* Y_i + \sum_{j=1}^m X_j^* X_j + T^* T = 1. \end{cases} \quad (11)$$

Очевидно, что вектор Z , удовлетворяющий системе линейных алгебраических уравнений (11), вообще говоря, не будет единичным, как этого требует система (10), поэтому после решения системы (11) найденный вектор Z следует нормировать по формулам

$$\tilde{Z}_i = \frac{Z_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{n+m+1} Z_j^2}}, \quad i = \overline{1, n+m+1}. \quad (12)$$

Таким образом, для решения системы ДАУ (2) необходимо найти решение системы дифференциальных уравнений (9), удовлетворяющее начальным условиям (8).

Правые части системы (9) определяем методом Гаусса из решения системы линейных уравнений (11) с последующей нормировкой по формулам (12).

Дискретное продолжение по наилучшему аргументу

Рассмотрим теперь решение задачи (2) с использованием дискретного продолжения по наилучшему аргументу λ [10].

В качестве нормы в R^n возьмем

$$\|z\| = \max_i |z_i|. \quad (13)$$

Соответствующая матричная норма, согласованная с (13), имеет вид

$$\|A\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|. \quad (14)$$

В силу предположения о гладкости интегральной кривой системы (2) функции $y = y(\lambda)$, $x = x(\lambda)$,

$t = t(\lambda)$ являются дифференцируемыми. Введем следующие обозначения: $x_k = x(\lambda_k)$, $y_k = y(\lambda_k)$, $t_k = t(\lambda_k)$ — приближенное значение решения, соответствующее параметру $\lambda = \lambda_k$, $\Delta\lambda_k = \lambda_{k+1} - \lambda_k$ — длина шага по параметру λ .

Решение (x, y, t) на $(k+1)$ -м шаге в точке, соответствующей параметру $\lambda = \lambda_{k+1}$, будем искать из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\lambda} - f(y, x, t) \frac{dt}{d\lambda} = 0; \\ G(y, x, t) = 0; \\ \sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{k(i)})^2 + \\ + \sum_{j=1}^m (x_{(j)} - x_{k(j)})^2 + (t - t_k)^2 - \Delta\lambda_k^2 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Если аргумент λ отсчитывать от начальной точки задачи (2), то начальные условия примут вид (8).

Рассмотрим решение системы (15) с постоянным шагом $\Delta\lambda$. После замены производных конечными разностями первого порядка система примет вид:

$$\begin{cases} y - y_k = f(y_k, x_k, t_k)(t - t_k); \\ G(y, x, t) = 0; \\ \sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{k(i)})^2 + \\ + \sum_{j=1}^m (x_{(j)} - x_{k(j)})^2 + (t - t_k)^2 - \Delta\lambda^2 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Введем обозначения:

$$F_{k+1}(z) = \begin{cases} \left. \begin{matrix} y - y_k - f(y_k, x_k, t_k)(t - t_k) \\ G(y, x, t) \end{matrix} \right\} = \Phi_{k+1}(z); \\ \sum_{i=1}^n (y_{(i)} - y_{k(i)})^2 + \\ + \sum_{j=1}^m (x_{(j)} - x_{k(j)})^2 + (t - t_k)^2 - \Delta\lambda^2. \end{cases} \quad (17)$$

Здесь $z = (y, x, t) \in R^{n+m+1}$; $\lambda_{k+1} = \Delta\lambda + \lambda_k$; $\lambda_0 = 0$; $\lambda_p = \Lambda$ соответствует терминальному моменту, когда $t_p = T$.

С учетом обозначений (17) система (16) может быть записана в виде

$$F_{k+1}(z) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса необходимо решать систему нелинейных уравнений (18). Данная система решается любым итерационным численным методом решения систем нелинейных уравнений.

Рассмотрим решение данной системы с помощью метода Ньютона:

$$\begin{cases} z_{k+1}^{(i+1)} = z_{k+1}^{(i)} - \left[\frac{\partial F_{k+1}}{\partial z} (z_{k+1}^{(i)}) \right]^{-1} F_{k+1}(z_{k+1}^{(i)}), \quad i = 0, 1, \dots; \\ z_{k+1}^{(0)} = 2z_k - z_{k-1}. \end{cases} \quad (19)$$

Здесь z_k — значение приближенного решения, найденное на k -м (предыдущем) шаге; i — номер итерации.

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

1. В шаре $S(z_0, R)$ решение задачи (2) существует и единственно.

2. Для невязки на последнем шаге по i выполняется условие

$$\|F_k(z_k)\| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, p-1. \quad (20)$$

3. Выполняется неравенство

$$\|F'_k(z_1) - F'_k(z_2)\| \leq \gamma \|z_1 - z_2\|, \quad \forall z_1, z_2 \in S(z_0, R). \quad (21)$$

4. $\exists [F'_k(z)]^{-1} : \|[F'_k(z)]^{-1}\| \leq m, \quad \forall z \in S(z_0, R)$.

5. $\|f(z)\| \leq M, \|G'(z)\| \leq K, \quad \forall z \in S(z_0, R)$.

Пусть ε выбирается так, чтобы было справедливо неравенство

$$\varepsilon < \frac{1}{2\gamma m^2} \quad (22)$$

и

$$R' = \frac{p(1 - \sqrt{1 - 2\alpha})}{m\gamma} < R,$$

где $\alpha = m^2\gamma(\varepsilon + C\Delta\lambda)$; $C = \max\{1 + M, K\}$.

Тогда при выборе шага сетки из соотношения

$$\Delta\lambda \leq \frac{1 - 2\varepsilon\gamma m^2}{2\gamma m^2 C} \quad (23)$$

последовательные приближения $z_k^{(i)}$, вычисленные по итерационной схеме (19), сходятся к решению z_k . При этом справедлива оценка ошибки:

$$\|z_k^{(i)} - z_k\| \leq \frac{(2\alpha)^{2^i}}{m\gamma 2^i}. \quad (24)$$

Доказательство.

Для доказательства теоремы необходимо показать, что для системы уравнений (18) при любом $k=1, \dots, p-1$ выполняются все условия теоремы Канторовича о методе Ньютона [11].

В этом случае можно заключить, что при любом k система (18) в замкнутом шаре $\overline{S(z_{k+1}^{(0)}, r)}$, где $r = \frac{1-\sqrt{1-2\alpha}}{m\gamma}$, имеет единственное решение z_{k+1} , к которому сходятся итерации (19) и справедлива оценка (24).

Предположим, что найдены приближенное решение z_k уравнения $F_k(z) = 0$ и приближенное решение z_{k-1} уравнения $F_{k-1}(z) = 0$. Начальное приближение $z_{k+1}^{(0)}$ к решению уравнения $F_{k+1}(z) = 0$, используя линейную аппроксимацию, ищем в виде

$$z_{k+1}^{(0)} = 2z_k - z_{k-1} = z_k + \Delta\lambda s_k; \quad s_k = \frac{z_k - z_{k-1}}{\Delta\lambda}.$$

Поскольку норма матрицы (14) согласована с нормой вектора (13), справедливо следующее неравенство:

$$\|F'_{k+1}(z_{k+1}^{(0)})F_{k+1}(z_{k+1}^0)\| \leq m \|F_{k+1}(z_{k+1}^0)\|. \quad (25)$$

Оценим величину $\|F_{k+1}(z_{k+1}^0)\|$. По теореме о среднем [12, с. 73] имеем

$$\begin{aligned} F_{k+1}(z_{k+1}^{(0)}) &= F_{k+1}(z_k + \Delta\lambda s_k) = \begin{pmatrix} \Phi_{k+1}(z_k + \Delta\lambda s_k) \\ \sum_{i=1}^{n+m+1} (\Delta\lambda s_{(i),k})^2 - \Delta\lambda^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \Phi_{k+1}(z_k) \\ \sum_{i=1}^{n+m+1} (z_{(i),k} - z_{(i),k-1})^2 - \Delta\lambda^2 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \int_0^1 \Phi'_{k+1}(z_k + \theta(\Delta\lambda s_k)) s_k \Delta\lambda d\theta \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Переходя к нормам, получаем

$$\begin{aligned} \|F_{k+1}(z_{k+1}^{(0)})\| &\leq \varepsilon + \left\| \int_0^1 \Phi'_{k+1}(z_k + \theta(\Delta\lambda s_k)) s_k \Delta\lambda d\theta \right\| \leq \\ &\leq \varepsilon + \sup_{0 \leq \theta \leq 1} \|\Phi'_{k+1}(z_k + \theta(\Delta\lambda s_k))\| \|s_k\| \Delta\lambda \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon + \sup_{\xi_k \in S(z_k, \Delta\lambda)} \|\Phi'_{k+1}(\xi_k)\| \Delta\lambda. \quad (26)$$

Осталось оценить величину $\|\Phi'_{k+1}(z)\| \cdot \Phi'_{k+1}(z)$ имеет вид

$$\Phi'_{k+1}(z) = \begin{pmatrix} E & O & -f_k \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

Здесь E — единичная матрица размера $n \times n$; O — матрица размера $n \times m$, составленная из нулей, $f_k = f(z_k)$. Тогда

$$\|\Phi'_{k+1}(z)\| = \max\{\|E \ O \ -f_k\|, \|G'(z)\|\}. \quad (27)$$

В силу (14)

$$\|E \ O \ -f_k\| = \|e - f_k\| \leq \|e\| + \|f_k\| \leq 1 + M,$$

где e — вектор-столбец, составленный из единиц. Из равенства (27) получим

$$\|\Phi'(z)\| \leq \max\{1 + M, K\} = C, \quad \forall z \in S(z_0, R).$$

Тогда соотношение (26) запишется в виде

$$\|F(z_{k+1}^{(0)})\| \leq \varepsilon + C\Delta\lambda,$$

и неравенство (25) примет вид

$$\|F'(z_{k+1}^{(0)})F(z_{k+1}^0)\| \leq m(\varepsilon + C\Delta\lambda).$$

Согласно теореме Канторовича о методе Ньютона [11], для сходимости итерационного процесса необходимо, чтобы

$$\|F'(z_{k+1}^{(0)})F(z_{k+1}^0)\| \leq \frac{1}{2m\gamma},$$

откуда

$$m(\varepsilon + C\Delta\lambda) \leq \frac{1}{2m\gamma}. \quad (28)$$

Выбираем шаг сетки $\Delta\lambda$ так, чтобы выполнялось условие (28), тогда

$$\Delta\lambda \leq \frac{1 - 2\varepsilon\gamma m^2}{2\gamma m^2 C}. \quad (29)$$

При этом выбираем ε так, чтобы шаг $\Delta\lambda$ был положительным, т.е. чтобы выполнялось неравенство $1 - 2\varepsilon\gamma m^2 > 0$. Отсюда

$$\varepsilon < \frac{1}{2\gamma m^2}.$$

И, наконец, потребуем, чтобы

$$R' = \frac{p(1 - \sqrt{1 - 2\alpha})}{m\gamma} < R,$$

где $\alpha = m^2\gamma(\varepsilon + C\Delta\lambda)$.

Выполнение данного неравенства гарантирует выполнение на каждом шаге процедуры интегрирования включения $\overline{S(z_{k+1}^{(0)}, r)} \subset S(z_0, R)$, где

$$r = (1 - \sqrt{1 - 2\alpha}) / (m\gamma).$$

Таким образом, при выполнении всех условий данной теоремы выполняются условия теоремы Канторовича о методе Ньютона для $k = 1, 2, \dots, p - 1$. На основании данной теоремы мы заключаем, что при каждом $k = 1, 2, \dots, p - 1$ система уравнений (18)

в шаре $\overline{S(z_{k+1}^{(0)}, r)}$, где $r = (1 - \sqrt{1 - 2\alpha}) / (m\gamma)$, имеет решение и итерационный процесс (19) является сходящимся, а также имеет место оценка (24). Теорема доказана.

Результаты численного эксперимента

Пример. При изготовлении устройств авиационной и ракетно-космической техники широко используется сверление с вибровозбудителем. Рассмотрим численное решение системы уравнений, описывающей процесс вибросверления из работы [13].

Описание модели

- Предполагается, что деталь и инструмент являются недеформируемыми твердыми телами, податливым является только крепление инструмента.
- Деталь вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω и перемещается с постоянной скоростью осевой подачи V .

• Модель инструмента представляется как система с осевой и крутильной степенями свободы (рис. 1).

• Вибратор задает движение левому сечению крепления инструмента по закону $Z_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$, где A_0 — амплитуда вибраций; ω_0 — круговая частота задаваемых вибраций.

Уравнения движения инструмента в безразмерной форме имеют вид

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{d\beta^2} + \left(2\zeta(2\pi f_{ax}) \frac{d\xi}{d\beta} + (2\pi f_{ax})^2 \xi \right) \frac{d\tau}{d\beta} = \\ = \left((2\pi p)^2 A_0 \sin(2\pi p\tau) - (2\pi f_{ax})^2 \frac{k}{q} \bar{\eta}^q \right) \frac{d\tau}{d\beta}; \\ \frac{d^2\psi}{d\beta^2} + \left(\mu_\zeta 2\zeta(2\pi f_{ax}) \frac{d\psi}{d\beta} + (2\pi f_{rot})^2 \psi \right) \frac{d\tau}{d\beta} = \\ = \left(-\mu_p (2\pi f_{ax})^2 \frac{k}{q} \bar{\eta}^q \right) \frac{d\tau}{d\beta}; \\ \frac{d\tau}{d\beta} = 1 - \frac{d\psi}{d\beta}, \end{cases} \quad (30)$$

где $\bar{\eta} = \left[\frac{1}{2}(2(\eta_1 + \eta_2))^q \right]^{1/q}$ — приведенная толщина снимаемого слоя; ξ — безразмерное осевое смещение инструмента; ψ — безразмерный угол поворота сверла вокруг оси; τ — безразмерное время; β — безразмерный угол поворота инструмента (правого сечения сверла) относительно детали; q — параметр нелинейности закона резания; f_{ax}, f_{rot} — безразмерные собственные частоты осевых и крутильных колебаний инструмента; k — безразмерная жесткость резания; ζ — безразмерный коэффициент демпфирования; μ_p, μ_ζ — некоторые масштабирующие множители.

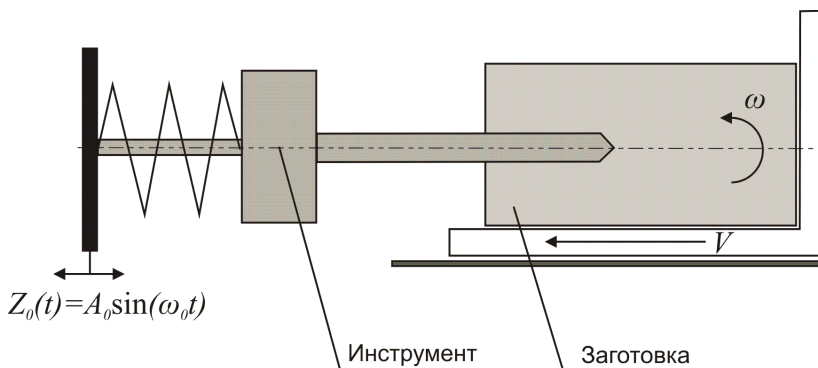


Рис. 1. Схема модели процесса вибросверления

Уравнения образования новых поверхностей для инструмента с двумя режущими кромками имеют вид

$$\begin{cases} \Delta_1(\beta) = [Z_0(\tau(\beta)) - Z_0(\tau(0))] + \xi(\beta) - H + \\ + \tau(\beta) - \Lambda_2(\beta - 0,5); \\ \Delta_2(\beta) = [Z_0(\tau(\beta)) - Z_0(\tau(0))] + \xi(\beta) - H + \\ + \tau(\beta) - \Lambda_1(\beta - 0,5); \\ \eta_1(\beta) = \max(0, \Delta_1(\beta)), \eta_2(\beta) = \max(0, \Delta_2(\beta)); \\ \Lambda_1(\beta) = \Lambda_2(\beta - 0,5) + \eta_1(\beta); \\ \Lambda_2(\beta) = \Lambda_1(\beta - 0,5) + \eta_2(\beta), \end{cases} \quad (31)$$

где $\Delta_j(\beta)$ — безразмерное расстояние от j -й режущей кромки до необработанной поверхности; $\Lambda_j(\beta)$ — поверхность, получаемая за счет снятия мгновенной толщины снимаемого слоя $\eta_j(\beta)$ с поверхности, сформированной «предыдущей» режущей кромкой; H — безразмерное расстояние от инструмента до средней поверхности торца детали в начальный момент времени; $Z_0(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$ — закон, по которому вибратор задает движение левому сечению крепления инструмента,

Полная система уравнений модели процесса вибросверления представляет собой систему дифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом

$$\begin{cases} y_1' = y_3; \\ y_2' = y_4; \\ y_3' = -((2\pi f_{ax})^2 y_1 + 2\zeta(2\pi f_{ax}) y_3)(1 - y_4) + \\ + \left((2\pi p)^2 A_0 \sin(2\pi p y_5) - (2\pi f_{ax})^2 \frac{k}{q} \bar{\eta}^q \right) (1 - y_4); \\ y_4' = -(\mu_\zeta 2\zeta(2\pi f_{ax}) y_4 + (2\pi f_{rot})^2 y_2 + \\ + \mu_p (2\pi f_{ax})^2 \frac{k}{q} \bar{\eta}^q) (1 - y_4); \\ y_5' = 1 - y_4; \\ x_1(\beta) = [Z_0(y_5(\beta)) - Z_0(y_5(0))] + y_1(\beta) - H + \\ + y_5(\beta) - x_4(\beta - 0,5); \\ x_2(\beta) = [Z_0(y_5(\beta)) - Z_0(y_5(0))] + y_1(\beta) - H + \\ + y_5(\beta) - x_3(\beta - 0,5); \\ x_3(\beta) = x_4(\beta - 0,5) + \max(0, x_1(\beta)); \\ x_4(\beta) = x_3(\beta - 0,5) + \max(0, x_2(\beta)). \end{cases} \quad (32)$$

Здесь $[y_1 y_2 y_3 y_4 y_5]^T = [\xi(\beta) \psi(\beta) \xi'(\beta) \psi'(\beta) \tau(\beta)]^T$;

$$[x_1 x_2 x_3 x_4]^T = [\Delta_1(\beta) \Delta_2(\beta) \Lambda_1(\beta) \Lambda_2(\beta)]^T.$$

Система (32) интегрировалась при начальных условиях

$$\begin{aligned} y_1(0) = 0, y_2(0) = 0, y_3(0) = 0, y_4(0) = 0, y_5(0) = 0, \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, \\ x_3(\beta) = 0, x_4(\beta) = 0, \beta \in [-0,5, 0] \end{aligned} \quad (33)$$

и при следующих значениях параметров:

$$\zeta = 0,75; f_{ax} = 1,22; f_{rot} = 5 \cdot f_{ax}; p = 3; A_0 = 0,05;$$

$$\omega_0 = 1; k = 2,18 \cdot 10^{-2}; q = 0,75; \mu_\zeta = 1; \mu_p = 1; H = 0.$$

Задача решалась при помощи методов непрерывного и дискретного продолжения с постоянным шагом $\Delta\lambda = 0,02$. В первом случае система ОДУ интегрировалась с помощью метода Эйлера, во втором случае производные в системе (15) аппроксимировались конечными разностями первого порядка.

Графики решения приведены на рис. 2 и 3. Невязка вычислялась по формуле

$$\Delta = \max_i |G_i|, \quad (34)$$

где $G_i = 0, i = \overline{1,4}$ — последние четыре уравнения системы (32).

На рис. 4 изображены графики невязок, вычисленных по формуле (34). Здесь невязка Δ_1 , полученная при решении системы (32) методом дискретного продолжения, изображена сплошной линией.

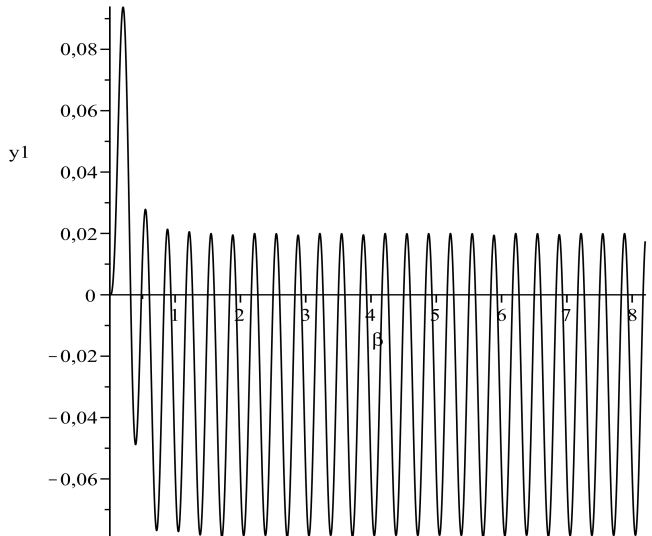


Рис. 2. График смещения инструмента (y_1)

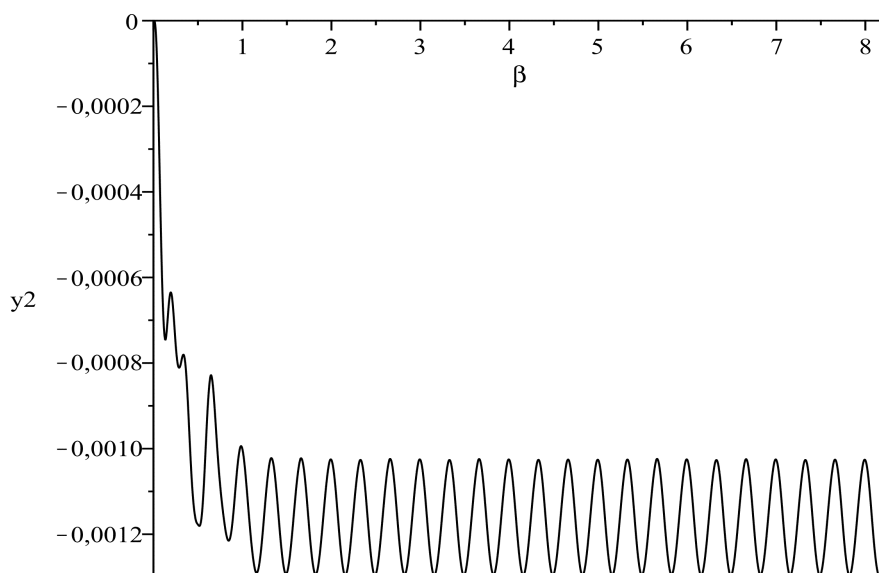


Рис. 3. График угла поворота сверла вокруг оси (y_2)

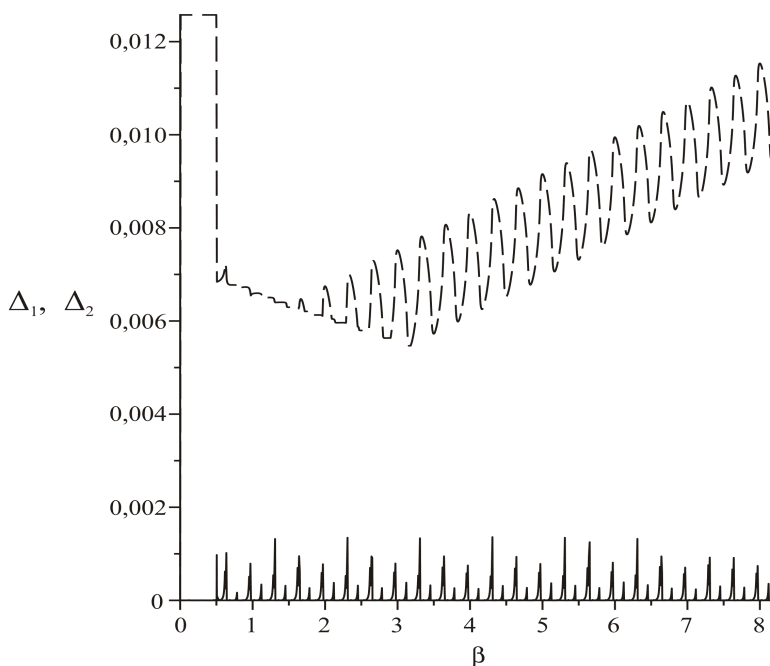


Рис. 4. Графики невязок

ей, а невязка Δ_2 , полученная при решении методом непрерывного продолжения, изображена пунктирной линией.

Выводы

Предложен дискретный вариант метода продолжения по наилучшему аргументу для систем ДАУ. Получена оценка погрешности метода Ньютона при решении системы нелинейных уравнений, получающейся после дискретизации преобразованной задачи.

Численные результаты показали, что дискретное продолжение обладает большей точностью, чем

непрерывное. Кроме того, важным достоинством дискретного продолжения (по сравнению с непрерывным) является отсутствие необходимости дифференцирования недифференциальных соотношений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07-01-00665), а также программы министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы на 2009-2010 годы» (регистрационный номер 2.1.1/5267).

Библиографический список

1. *Gear C.W.* Simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations // IEEE Trans. Circuit Theory. 1971. Т. 18. № 1. — Р. 89-95.
2. *Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R.* Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. — N.Y., Amsterdam, London: North-Holland, 1989.
3. *Бояринцев Ю.Е., Данилов В.А., Логинов А.А., Чистяков В.Ф.* Численные методы решения сингулярных систем. — Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1989.
4. *Hairer E., Wanner G.* Solving ordinary differential equations 2. Stiff and differential-algebraic problems. Berlin etc.: Springer, 1991.
5. *Petzold L.R., Lotstedt P.* Numerical solution of nonlinear differential equations with algebraic constraints II: Practical implications // SIAM J. Sci. Statist. Comput. 1986. V. 7. P. 720-733. Т. 41. № 8. С. 1180-1189.
6. *Куликов Г.Ю.* Об использовании итерационных методов Ньютоновского типа для решения систем дифференциально-алгебраических уравнений индекса 1 // Вычисл. матем. и матем. физ. 2001. Т. 41. № 8. С. 1180-1189.
7. *Булатов М.В., Чистяков В.Ф.* Об одном численном методе решения дифференциально-алгебраических уравнений // Вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42. № 4. С. 459-470.
8. *Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И.* Решение дифференциально-алгебраических уравнений с выбором наилучшего аргумента // Вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 6. С. 711-722.
9. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
10. *Кузнецов Е.Б.* Наилучшая параметризация при построении кривой итерационным методом // Докл. РАН. 2004. Т. 396. № 6. С. 746-748.
11. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1984.
12. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.
13. *Гуськов А.М., Воронов С.А., Квашнин А.С.* Влияние крутильных колебаний на процесс виброисследования // Вестник МГТУ им Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2007. № 1. С. 3-19.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 19.11.2009