УДК 532.528

Алгоритмы численного решения уравнений Навье-Стокса при наличии кавитации [1]

Н.Л. Маркина

Аннотация

В работе описан метод расчета вязких течений, учитывающий кавитационные эффекты. Для решения системы уравнений Навье-Стокса использован модифицированный метод PISO. Проведены тестовые расчеты течения жидкости через двумерный тракт переменного сечения.

Ключевые слова:

кавитация; двухфазное течение; PISO; уравнения Навье-Стокса; численное моделирование.

Математическая модель течения жидкости при наличии кавитации

С проблемой возникновения и развития кавитации сталкиваются при рассмотрении широкого круга вопросов, связанных с течением жидкости: от проектирования насосов, турбин, клапанов, жиклеров, до исследования тока крови в сосудах. Явление кавитации в гидравлических системах может сопровождаться рядом неблагоприятных эффектов такими как шум, эрозия, вибрация, увеличение потерь энергии, уменьшение КПД и др.

По сравнению с расчетом несжимаемых жидкостей задача моделирования кавитационных течений существенно усложняется [1-9]. На нелинейность уравнений Навье-Стокса накладывается нелинейность, присущая процессам межфазного обмена, что в значительной мере ужесточает требования к устойчивости и сходимости вычислительных

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-08-00203-а)

алгоритмов. Кроме того, существенным фактором становится выбор метода связывания давления и плотности парожидкостной среды.

В настоящее время предложен ряд подходов к моделированию кавитационных течений, базирующихся на гомогенной модели и введении средней плотности смеси через объемное содержание фаз. Одним из распространенных методов получения пространственной неоднородности поля плотности является включение в систему уравнений Навье-Стокса уравнения состояния, позволяющего задать плотность как функцию от давления. Однако в работе [8] отмечается противоречивость такого подхода, связанная с тем, что баротропная зависимость плотности от давления ведет к обращению бароклинного момента в ноль. Другим распространенным подходом является введение в математическую модель уравнения переноса с источниковыми слагаемыми, регулирующими межфазный массообмен.

В настоящей работе описан алгоритм численного моделирования двумерного плоского течения вязкой парожидкостной смеси в тракте переменного сечения. Решается система нестационарных уравнений Навье-Стокса, неразрывности и фазового переноса:

$$
\begin{cases}
\frac{\partial(\rho_m u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_m u^2-\mu\frac{\partial u}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_m uv-\mu\frac{\partial u}{\partial y}) \quad -\frac{\partial P}{\partial x} & (1)\\
\frac{\partial(\rho_m v)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_m uv-\mu\frac{\partial v}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_m v^2-\mu\frac{\partial v}{\partial y}) \quad -\frac{\partial P}{\partial y} & (2)\\
\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\frac{\partial(\rho_m u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho_m v)}{\partial y}=0 & (3)\\
\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial(\alpha\, u)}{\partial x}+\frac{\partial(\alpha\, v)}{\partial y}=\dot{m}^{+}-\dot{m}^{-} & (4)\\
\rho_m=\alpha\,\rho_l+(1-\alpha\,)\rho_v & (5)
\end{cases}
$$

где t - время, u и v - компоненты вектора скорости, P - давление, ρ_m - эффективная плотность, α - объемная доля жидкой фазы, $\dot{m}^{-}$ - скорость испарения, $\dot{m}^{+}$ - скорость конденсации пара, ρ_l -плотность жидкости, ρ_v - плотность пара, μ - динамическая вязкость. В работах [4-6] источниковые члены $\dot{m}^{+}$ и $\dot{m}^{-}$ являются функциями давления и содержат эмпирически определяемые коэффициенты C_{dest} и C_{prod}. Также известны подходы к вычислению коэффициентов C_{dest} и C_{prod} через нахождение скоростей интерфейсов между паром и жидкостью [8].

Для связи уравнения неразрывности и уравнения момента использован модифицированный алгоритм PISO [9], в котором дискретизация уравнений производится по методу контрольного объема на разнесенной сетке.

Вывод дискретных аналогов

Основная идея метода PISO [2] заключается в том, что для расчета давления используются два разностных уравнения для поправки поля давления, полученных из дискретных аналогов уравнений моментов и неразрывности. Такой подход связан с тем, что скорректированные первой поправкой скорости, могут не удовлетворять уравнению неразрывности, поэтому вводится второй корректор, который позволяет вычислить скорости и давления, удовлетворяющие линеаризованным уравнениям количества движения и неразрывности. Ниже приведен алгоритм получения уравнений для поправок давлений.

Используя процедуру, подробно описанную в [10], дискретный аналог уравнений (1)-(3) для нахождения скоростей u^* и v^* в контрольном объеме с гранями Δx и Δy можно записать в виде (предполагается, что известны поля плотности ρ_m^0 и давления P^0; узловые точки поля u имеют индексы $i+\frac{1}{2}, j$, узловые точки поля v имеют индексы $i, j+\frac{1}{2}$, узловые точки поля P имеют индексы i, j, где $i, j \in Z$):

$$u^*_{i+\frac{1}{2}j}\left(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n_{m_{i+\frac{1}{2}j}} + a_{i+\frac{3}{2}j} + a_{i-\frac{1}{2}j} + a_{i+\frac{1}{2}j+1} + a_{i+\frac{1}{2}j-1}\right) =$$

$$= \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n_{m_{i+\frac{1}{2}j}} u^n_{i+\frac{1}{2}j} + a_{i+\frac{3}{2}j} u^*_{i+\frac{3}{2}j} + a_{i-\frac{1}{2}j} u^*_{i-\frac{1}{2}j} + a_{i+\frac{1}{2}j+1} u^*_{i+\frac{1}{2}j+1} + a_{i+\frac{1}{2}j-1} u^*_{i+\frac{1}{2}j-1} - (P^0_{i+1j} - P^0_{ij})\Delta y, \quad (6.1)$$

$$v^*_{ij+\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n_{m_{ij+\frac{1}{2}}} + a_{i+1j+\frac{1}{2}} + a_{i-1j+\frac{1}{2}} + a_{ij+\frac{3}{2}} + a_{ij-\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n_{m_{ij+\frac{1}{2}}} v^n_{ij+\frac{1}{2}} + a_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} v^*_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + a_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} v^*_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} + a_{ij+\frac{3}{2}} v^*_{ij+\frac{3}{2}} + a_{ij-\frac{1}{2}} v^*_{ij-\frac{1}{2}} - (P^0_{ij+1} - P^0_{ij})\Delta x, \quad (6.2)$$

где коэффициенты a вычисляются по формулам:

$$a_{x_{i+\frac{3}{2}j}} = D_{i+1j} A(|P_{ei+1j}|) + \max(-F_{i+1j}, 0), \qquad a_{x_{i-\frac{1}{2}j}} = D_{ij} A(|P_{eij}|) + \max(F_{ij}, 0),$$

$$a_{x_{i+\frac{1}{2}j+1}} = D_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} A(|P_{e_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}|) + \max(-F_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}, 0), \; a_{x_{i+\frac{1}{2}j-1}} = D_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} A(|P_{e_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}}|) + \max(F_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}, 0);$$

$$D_{i+1j} = \frac{\mu_{i+1j}\Delta y}{x_{i+\frac{3}{2}} - x_{i+\frac{1}{2}}}, \; D_{ij} = \frac{\mu_{ij}\Delta y}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}, \; D_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}\Delta x}{y_{j+1} - y_j}, \; D_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}} = \frac{\mu_{i+\frac{1}{2}j-\frac{1}{2}}\Delta x}{y_j - y_{j-1}},$$

$F_{i+1j}=\rho^0_{mi+1j}u_{i+1j}\Delta y$, $F_{ij}=\rho^0_{mij}u_{ij}\Delta y$, $F_{i+\frac{1}{2}j\pm\frac{1}{2}}=\rho^0_{m_{i+\frac{1}{2}j\pm\frac{1}{2}}}v_{i+\frac{1}{2}j\pm\frac{1}{2}}\Delta x$,

- диффузная проводимость и интенсивность конвекции на гранях контрольного объема; $P_{ei+1j}=\dfrac{F_{i+1j}}{D_{i+1j}}$, $P_{eij}=\dfrac{F_{ij}}{D_{ij}}$, $P_{e_{i+\frac{1}{2}j\pm\frac{1}{2}}}=\dfrac{F_{i+\frac{1}{2}j\pm\frac{1}{2}}}{D_{i+\frac{1}{2}j\pm\frac{1}{2}}}$ - числа Пекле; при решении в качестве аппроксимации конвективных членов использовалась схема со степенным законом распределения $A(P_e)=\max(0,1-0.1|P_e|^5)$.

Для конечного объема с центром в точке p можно записать уравнения (6.1) и (6.2) в операторном виде:

$$\mathbf{u}^*_p=\mathbf{H}(\mathbf{u}^*)_p-\mathbf{D}_p(\nabla P^0)_p+\frac{\Delta x\Delta y}{A^{\phi}_p\Delta t}(\rho_m\mathbf{u})^n_p, \qquad (6.3)$$

где $\mathbf{u}_p=\begin{pmatrix}u_p\\ v_p\end{pmatrix}$ - вектор скорости, $\mathbf{H}(\mathbf{u})_p=\begin{pmatrix}\mathbf{H}(u)_p\\ \mathbf{H}(v)_p\end{pmatrix}$ - конечно-разностный оператор, полученный при дискретизации конвективных и диффузионных потоков, $\mathbf{D}_p=\begin{pmatrix}\mathrm{D}(u)_p & 0\\ 0 & \mathrm{D}(v)_p\end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов, где $\mathrm{D}(u)_p=\dfrac{\Delta y}{A^u_p}$ и $\mathrm{D}(v)_p=\dfrac{\Delta x}{A^v_p}$, $(\nabla P)_p=\begin{pmatrix}(\nabla P)^x_p\\ (\nabla P)^y_p\end{pmatrix}$ - градиент давления в конечном объеме.

Т.к. скорости u^* и v^* не удовлетворяют уравнению неразрывности, то для нового поля давления P^* рассчитываются скорректированные скорости u^{**} и v^{**}:

$$u^{**}_{i+\frac{1}{2}j}\left(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n_{m_{i+\frac{1}{2}j}}+a_{i+\frac{3}{2}j}+a_{i-\frac{1}{2}j}+a_{i+\frac{1}{2}j+1}+a_{i+\frac{1}{2}j-1}\right)=$$
$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n_{m_{i+\frac{1}{2}j}}u^n_{i+\frac{1}{2}j}+a_{i+\frac{3}{2}j}u^*_{i+\frac{3}{2}j}+a_{i-\frac{1}{2}j}u^*_{i-\frac{1}{2}j}+a_{i+\frac{1}{2}j+1}u^*_{i+\frac{1}{2}j+1}+a_{i+\frac{1}{2}j-1}u^*_{i+\frac{1}{2}j-1}-(P^*_{i+1j}-P^*_{ij})\Delta y, \quad (7.1)$$

$$v^{**}_{ij+\frac{1}{2}}\left(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n_{m_{ij+\frac{1}{2}}}+a_{i+1j+\frac{1}{2}}+a_{i-1j+\frac{1}{2}}+a_{ij+\frac{3}{2}}+a_{ij-\frac{1}{2}}\right)=$$
$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^n_{m_{ij+\frac{1}{2}}}v^n_{ij+\frac{1}{2}}+a_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}v^*_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+a_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}v^*_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+a_{ij+\frac{3}{2}}v^*_{ij+\frac{3}{2}}+a_{ij-\frac{1}{2}}v^*_{ij-\frac{1}{2}}-(P^*_{ij+1}-P^*_{ij})\Delta x, \quad (7.2)$$

Вычитая из уравнений (7) уравнения (6) получим выражения для коррекции скоростей:

$$u^{**}_{i+\frac{1}{2}j}=u^{*}_{i+\frac{1}{2}j}+u^{'}_{i+\frac{1}{2}j}=u^{*}_{i+\frac{1}{2}j}-\frac{\Delta y}{A_{i+\frac{1}{2}j}}(P^{'}_{i+1j}-P^{'}_{ij}), \tag{8.1}$$

$$v^{**}_{ij+\frac{1}{2}}=v^{*}_{ij+\frac{1}{2}}+v^{'}_{ij+\frac{1}{2}}=v^{*}_{ij+\frac{1}{2}}-\frac{\Delta x}{A_{ij+\frac{1}{2}}}(P^{'}_{ij+1}-P^{'}_{ij}), \tag{8.2}$$

где

$$A_{i+\frac{1}{2}j}=\left(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^{n}_{m_{i+\frac{1}{2}j}}+a_{i+\frac{3}{2}j}+a_{i-\frac{1}{2}j}+a_{i+\frac{1}{2}j+1}+a_{i+\frac{1}{2}j-1}\right)^{-1},\ A_{ij+\frac{1}{2}}=\left(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^{n}_{m_{ij+\frac{1}{2}}}+a_{i+1j+\frac{1}{2}}+a_{i-1j+\frac{1}{2}}+a_{ij+\frac{3}{2}}+a_{ij-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$$

или в операторном виде:

$$\mathbf{u}^{**}_{p}=\mathbf{u}^{*}_{p}-\mathbf{D}_{p}(\nabla P^{'})_{p}\,. \tag{8.3}$$

Связывание полей плотности и давления производится через введение аналога скорости звука C_{ρ} по формуле:

$$\rho^{*}_{mij}=\rho^{0}_{mij}+\rho^{'}_{mij}=\ \rho^{0}_{ij}+C_{\rho ij}P^{'}_{ij}\,. \tag{9}$$

Уравнение неразрывности для новых полей скорости и плотности принимает вид:

$$\frac{\rho^{*}_{mij}-\rho^{n}_{mij}}{\Delta t}\Delta x\Delta y+\rho^{*}_{i+\frac{1}{2}j}u^{**}_{i+\frac{1}{2}j}\Delta y-\rho^{*}_{i-\frac{1}{2}j}u^{**}_{i-\frac{1}{2}j}\Delta y+\rho^{*}_{ij+\frac{1}{2}}v^{**}_{ij+\frac{1}{2}}\Delta x-\rho^{*}_{i-\frac{1}{2}}v^{**}_{ij-\frac{1}{2}}\Delta x=0\,. \tag{10}$$

Подстановка в уравнение неразрывности (10) выражений (9) и (8) приводит к уравнению для нахождения поправок давления $P^{'}$:

$$P^{'}_{ij}(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}C_{\rho ij}+\rho^{0}_{m_{i+\frac{1}{2}j}}\frac{\Delta y^{2}}{A_{i+\frac{1}{2}j}}+\rho^{0}_{m_{i-\frac{1}{2}j}}\frac{\Delta y^{2}}{A_{i-\frac{1}{2}j}}+\rho^{0}_{m_{ij+\frac{1}{2}}}\frac{\Delta x^{2}}{A_{ij+\frac{1}{2}}}+\rho^{0}_{m_{ij-\frac{1}{2}}}\frac{\Delta x^{2}}{A_{ij-\frac{1}{2}}}+$$

$$+C_{\rho_{i+\frac{1}{2}j}}\max(u^{*}_{i+\frac{1}{2}j},0)\Delta y+C_{\rho_{i-\frac{1}{2}j}}\max(-u^{*}_{i-\frac{1}{2}j},0)\Delta y+C_{\rho_{ij+\frac{1}{2}}}\max(v^{*}_{ij+\frac{1}{2}},0)\Delta x+$$

$$+C_{\rho_{ij-\frac{1}{2}}}\max(-v^{*}_{ij-\frac{1}{2}},0)\Delta x)+P^{'}_{i+1j}(-\rho^{0}_{m_{i+\frac{1}{2}j}}\frac{\Delta y^{2}}{A_{i+\frac{1}{2}j}}-C_{\rho_{i+\frac{1}{2}j}}\max(-u^{*}_{i+\frac{1}{2}j},0)\Delta y)+$$

$$+P^{'}_{i-1j}(-\rho^{0}_{m_{i-\frac{1}{2}j}}\frac{\Delta y^{2}}{A_{i-\frac{1}{2}j}}-C_{\rho_{i-\frac{1}{2}j}}\max(u^{*}_{i-\frac{1}{2}j},0)\Delta y)+P^{'}_{ij+1}(-\rho^{0}_{m_{ij+\frac{1}{2}}}\frac{\Delta x^{2}}{A_{ij+\frac{1}{2}}}-C_{\rho_{ij+\frac{1}{2}}}\max(-v^{*}_{ij+\frac{1}{2}},0)\Delta x)+$$

$$+P'_{ij-1}(-\rho^{0}_{m_{ij-\frac{1}{2}}}\frac{\Delta x^2}{A_{ij-\frac{1}{2}}}-C_{\rho_{ij-\frac{1}{2}}}\max(v^{*}_{ij-\frac{1}{2}},0)\Delta x)= -\frac{\rho^{0}_{mij}-\rho^{n}_{mij}}{\Delta t}\Delta x\Delta y-(\rho^{0}_{m_{i+\frac{1}{2}j}}u^{*}_{i+\frac{1}{2}j}\Delta y-$$

$$-\rho^{0}_{m_{i-\frac{1}{2}j}}u^{*}_{i-\frac{1}{2}j}\Delta y+\rho^{0}_{m_{ij+\frac{1}{2}}}v^{*}_{ij+\frac{1}{2}}\Delta x-\rho^{0}_{m_{ij-\frac{1}{2}}}v^{*}_{ij-\frac{1}{2}}\Delta x) \qquad (11.1)$$

или в операторной форме:

$$\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}(C_\rho P')_p+\Delta(C_\rho P'U^*)_p-\Delta(\rho^0_m\mathbf{D}(\nabla P')\cdot\mathbf{S})_p = -\frac{\rho^{0}_{mp}-\rho^{n}_{mp}}{\Delta t}\Delta x\Delta y-\Delta(\rho^0_m U^*)_p. \qquad (11.2)$$

При выводе уравнения (11) слагаемыми вида $(C_\rho P'\mathbf{D}(\nabla P')\cdot\mathbf{S})_p$ пренебрегается. Следует отметить, что для дискретизации членов $\Delta(C_\rho P'U^*)_p$ необходимо применение противопоточной схемы. В работе использовалась схема против потока первого порядка.

При вычитании из уравнения (7) уравнения (6) слагаемые, содержащие оператор $\mathbf{H}$, сокращаются, что приводит к необходимости ввода второго корректора для получения полей u^{***}, v^{***} и P^{**}. Аналогично уравнению (6) записывается дискретный аналог уравнений (1)-(3) для полей u^{***} и v^{***}:

$$u^{***}_{i+\frac{1}{2}j}(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^{n}_{m_{i+\frac{1}{2}j}}+a_{i+\frac{3}{2}j}+a_{i-\frac{1}{2}j}+a_{i+\frac{1}{2}j+1}+a_{i+\frac{1}{2}j-1})=$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^{n}_{m_{i+\frac{1}{2}j}}u^{n}_{i+\frac{1}{2}j}+a_{i+\frac{3}{2}j}u^{**}_{i+\frac{3}{2}j}+a_{i-\frac{1}{2}j}u^{**}_{i-\frac{1}{2}j}+a_{i+\frac{1}{2}j+1}u^{**}_{i+\frac{1}{2}j+1}+a_{i+\frac{1}{2}j-1}u^{**}_{i+\frac{1}{2}j-1}-(P^{**}_{i+1j}-P^{**}_{ij})\Delta y, \qquad (12.1)$$

$$v^{***}_{ij+\frac{1}{2}}(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^{n}_{m_{ij+\frac{1}{2}}}+a_{i+1j+\frac{1}{2}}+a_{i-1j+\frac{1}{2}}+a_{ij+\frac{3}{2}}+a_{ij-\frac{1}{2}})=$$

$$=\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}\rho^{n}_{m_{ij+\frac{1}{2}}}v^{n}_{ij+\frac{1}{2}}+a_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}v^{**}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+a_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}v^{**}_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}+a_{ij+\frac{3}{2}}v^{**}_{ij+\frac{3}{2}}+a_{ij-\frac{1}{2}}v^{**}_{ij-\frac{1}{2}}-(P^{**}_{ij+1}-P^{**}_{ij})\Delta x. \qquad (12.2)$$

Вычитая из уравнений (12) уравнения (7) получим выражения для коррекции скоростей:

$$u^{***}_{i+\frac{1}{2}j}=u^{**}_{i+\frac{1}{2}j}+u''_{i+\frac{1}{2}j}=u^{**}_{i+\frac{1}{2}j}+\frac{1}{A_{i+\frac{1}{2}j}}\sum a_{nk}(u^{**}_{nk}-u^{*}_{nk})-d_{i+\frac{1}{2}j}(P''_{i+1j}-P''_{ij}), \qquad (13.1)$$

$$v^{***}_{ij+\frac{1}{2}}=v^{**}_{ij+\frac{1}{2}}+v''_{ij+\frac{1}{2}}=v^{**}_{ij+\frac{1}{2}}+\frac{1}{A_{ij+\frac{1}{2}}}\sum a_{nk}(v^{**}_{nk}-v^{*}_{nk})-d_{ij+\frac{1}{2}}(P''_{ij+1}-P''_{ij}), \qquad (13.2)$$

где $d_{i+\frac{1}{2}j}=\frac{\Delta y}{A_{i+\frac{1}{2}j}}, d_{ij+\frac{1}{2}}=\frac{\Delta x}{A_{ij+\frac{1}{2}}}$

В операторном виде выражения (13.1) и (13.2) записываются как

$$\mathbf{u}_p^{***} = \mathbf{u}_p^{**} + \mathbf{H}(\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^{*})_p - \mathbf{D}_p(\nabla P^{"})_p . \qquad (13.3)$$

Коррекция полей плотности и давления производится по формулам:

$$\rho_{mij}^{**} = \rho_{mij}^{*} + \rho_{mij}^{"} = \rho_{ij}^{**} + C_{\rho ij} P_{ij}^{"}, \qquad (14)$$

$$P_{ij}^{**} = P_{ij}^{*} + P_{ij}^{"} . \qquad (15)$$

Подставляя в уравнение неразрывности

$$\frac{\rho_{mij}^{**} - \rho_{mij}^{n}}{\Delta t}\Delta x\Delta y + \rho_{i+\frac{1}{2}j}^{**} u_{i+\frac{1}{2}j}^{***}\Delta y - \rho_{i-\frac{1}{2}j}^{**} u_{i-\frac{1}{2}j}^{***}\Delta y + \rho_{ij+\frac{1}{2}}^{**} v_{ij+\frac{1}{2}}^{***}\Delta x - \rho_{i-\frac{1}{2}}^{**} v_{ij-\frac{1}{2}}^{***}\Delta x = 0 \qquad (16)$$

выражения для поправки плотности (14) и скоростей (13), получим уравнения для вычисления поправки давления $P^{"}$:

$$\begin{aligned}
&P_{ij}^{"}\Big(\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t} C_{\rho ij} + \rho_{m_{i+\frac{1}{2}j}}^{*} d_{i+\frac{1}{2}j}\Delta y + \rho_{m_{i-\frac{1}{2}j}}^{*} d_{i-\frac{1}{2}j}\Delta y + \rho_{m_{ij+\frac{1}{2}}}^{*} d_{ij+\frac{1}{2}}\Delta x + \rho_{m_{ij-\frac{1}{2}}}^{*} d_{ij-\frac{1}{2}}\Delta x + \\
&+C_{\rho_{i+\frac{1}{2}j}} \max(u_{i+\frac{1}{2}j}^{**},0)\Delta y + C_{\rho_{i-\frac{1}{2}j}} \max(-u_{i-\frac{1}{2}j}^{**},0)\Delta y + C_{\rho_{ij+\frac{1}{2}}} \max(v_{ij+\frac{1}{2}}^{**},0)\Delta x + C_{\rho_{ij-\frac{1}{2}}} \max(-v_{ij-\frac{1}{2}}^{**},0)\Delta x\Big) + \\
&+P_{i+1j}^{"}\Big(-\rho_{m_{i+\frac{1}{2}j}}^{*} d_{i+\frac{1}{2}j}\Delta y - C_{\rho_{i+\frac{1}{2}j}} \max(-u_{i+\frac{1}{2}j}^{**},0)\Delta y\Big) + P_{i-1j}^{"}\Big(-\rho_{m_{i-\frac{1}{2}j}}^{*} d_{i-\frac{1}{2}j}\Delta y - C_{\rho_{i-\frac{1}{2}j}} \max(u_{i-\frac{1}{2}j}^{**},0)\Delta y\Big) + \\
&+P_{ij+1}^{"}\Big(-\rho_{m_{ij+\frac{1}{2}}}^{*} d_{ij+\frac{1}{2}}\Delta x - C_{\rho_{ij+\frac{1}{2}}} \max(-v_{ij+\frac{1}{2}}^{**},0)\Delta x\Big) + P_{ij-1}^{"}\Big(-\rho_{m_{ij-\frac{1}{2}}}^{*} d_{j-\frac{1}{2}}\Delta x - C_{\rho_{ij-\frac{1}{2}}} \max(v_{ij-\frac{1}{2}}^{**},0)\Delta x\Big) = \\
&= -\frac{\rho_{mij}^{*} - \rho_{mij}^{n}}{\Delta t}\Delta x\Delta y - \Big(\rho_{m_{i+\frac{1}{2}j}}^{*} u_{i+\frac{1}{2}j}^{**}\Delta y - \rho_{m_{i-\frac{1}{2}j}}^{*} u_{i-\frac{1}{2}j}^{**}\Delta y + \rho_{m_{ij+\frac{1}{2}}}^{*} v_{ij+\frac{1}{2}}^{**}\Delta x - \rho_{m_{ij-\frac{1}{2}}}^{*} v_{ij-\frac{1}{2}}^{**}\Delta x\Big) - \\
&= -\Big(\frac{\Delta y}{A_{i+\frac{1}{2}j}}\rho_{m_{i+\frac{1}{2}j}}^{*}\sum a_{i+\frac{1}{2}j}(u^{**} - u^{*}) - \frac{\Delta y}{A_{i-\frac{1}{2}j}}\rho_{m_{i-\frac{1}{2}j}}^{*}\sum a_{i-\frac{1}{2}j}(u^{**} - u^{*}) + \\
&+\frac{\Delta x}{A_{ij+\frac{1}{2}}}\rho_{m_{ij+\frac{1}{2}}}^{*}\sum a_{ij+\frac{1}{2}}(v^{**} - v^{*}) - \frac{\Delta x}{A_{ij-\frac{1}{2}}}\rho_{m_{ij-\frac{1}{2}}}^{*}\sum a_{ij-\frac{1}{2}}(v^{**} - v^{*})\Big)
\end{aligned} \qquad (17.1)$$

или в операторной форме:

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta t}(C_\rho P^{"})_p + \Delta(C_\rho P^{"} U^{**})_p - \Delta(\rho_m^{*}\mathbf{D}(\nabla P^{"})\cdot\mathbf{S})_p \quad -\frac{\rho_{mp}^{*} - \rho_{mp}^{n}}{\Delta t}\Delta x\Delta y - \Delta(\rho_m^{*} U^{**})_p - \\
&\qquad -\Delta(\rho_m^{*}\mathbf{H}(\mathbf{u}^{**} - \mathbf{u}^{*})\cdot\mathbf{S})_p
\end{aligned} \qquad (17.2)$$

Уравнение переноса (4) дискретизировалось в недивергентной форме с использованием противопоточной схемы первого порядка точности:

$$\frac{\alpha_{ij}^{k+1}-\alpha_{ij}^{k}}{\Delta t}+\max(u_{ij}^{k+1},0)\frac{\alpha_{i+1j}^{k+1}-\alpha_{ij}^{k+1}}{x_{i+1}-x_i}+\max(-u_{ij}^{k+1},0)\frac{\alpha_{ij}^{k+1}-\alpha_{i-1j}^{k+1}}{x_i-x_{i-1}}+\max(v_{ij}^{k+1},0)\frac{\alpha_{ij+1}^{k+1}-\alpha_{ij}^{k+1}}{y_{j+1}-y_j}+$$

$$+\max(-v_{ij}^{k+1},0)\frac{\alpha_{ij}^{k+1}-\alpha_{ij-1}^{k+1}}{y_j-y_{j-1}}+\alpha_{ij}^{k+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{ij}^{k+1}+\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{ij}^{k+1}\right)=\dot{m}_{ij}^{+}-\dot{m}_{ij}^{-}.$$

Чтобы предотвратить схемные осцилляции, слагаемое

$\alpha_{ij}^{k+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{ij}^{k+1}+\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{ij}^{k+1}\right)$ заменялось эквивалентным

$\frac{\alpha_{ij}^{k+1}}{\rho_{mij}^{k+1}}\left(-u_{ij}^{k+1}\frac{\partial\rho_m}{\partial x}\Big|_{ij}^{k+1}-v_{ij}^{k+1}\frac{\partial\rho_m}{\partial y}\Big|_{ij}^{k+1}-\frac{\rho_{mij}^{k+1}-\rho_{mij}^{k}}{\Delta t}\right)$, полученным из уравнения неразрывности.

Алгоритм расчета

Считая поля скорости, давления, плотности известными на n-ом шаге, полный шаг по времени можно записать в следующем виде:

1. Принимая $P^0=P^n$, $u^0=u^n$, $v^0=v^n$, $\rho_m{}^0=\rho_m{}^n$, $\alpha^*=\alpha^n$ вычислить поля скоростей u^* и v^* по формуле (6.3) с использованием неявной схемы.
2. Найти величину аналога скорости звука C_ρ по формуле $C_\rho=C(1-\alpha^*+\varepsilon)$, где C и ε - константы.
3. Вычислить поле поправок давления P', решая уравнение (11.2) с использованием неявной схемы.
4. Скорректировать поля скоростей используя (8.3) и найти поле давления $P_{ij}^*=P_{ij}^0+P_{ij}'$.
5. Решая уравнение

$$\frac{\alpha_{ij}^{**}-\alpha_{ij}^{n}}{\Delta t}+\max(u_{ij}^{**},0)\frac{\alpha_{i+1j}^{**}-\alpha_{ij}^{**}}{x_{i+1}-x_i}+\max(-u_{ij}^{**},0)\frac{\alpha_{ij}^{**}-\alpha_{i-1j}^{**}}{x_i-x_{i-1}}+\max(v_{ij}^{**},0)\frac{\alpha_{ij+1}^{**}-\alpha_{ij}^{**}}{y_{j+1}-y_j}+$$

$$+\max(-v_{ij}^{**},0)\frac{\alpha_{ij}^{**}-\alpha_{ij-1}^{**}}{y_j-y_{j-1}}+\frac{\alpha_{ij}^{**}}{\rho_{mij}^{0}}\left(-u_{ij}^{**}\frac{\partial\rho_m}{\partial x}\Big|_{ij}^{0}-v_{ij}^{**}\frac{\partial\rho_m}{\partial y}\Big|_{ij}^{0}-\frac{\rho_{mij}^{0}-\rho_{mij}^{n}}{\Delta t}\right)=\dot{m}_{ij}^{+}-\dot{m}_{ij}^{-},$$

вычислить значение объемной доли жидкой фазы α^{**}.

6. Найти поле плотности жидкости $\rho_m{}^*=\alpha^{**}\rho_l+(1-\alpha^{**})\rho_v$.
7. Рассчитать величину аналога скорости звука $C_\rho=C(1-\alpha^{**}+\varepsilon)$.

8. Вычислить поле поправок давления $P^{''}$, решая уравнение (17.2) с использованием неявной схемы.
9. Скорректировать поля скоростей по формуле (13.3) и найти поле давления $P_{ij}^{**} = P_{ij}^{*} + P_{ij}^{''}$.
10. Из уравнения

$$\frac{\alpha_{ij}^{***} - \alpha_{ij}^{n}}{\Delta t} + \max(u_{ij}^{***},0)\frac{\alpha_{i+1j}^{***} - \alpha_{ij}^{***}}{x_{i+1} - x_i} + \max(-u_{ij}^{***},0)\frac{\alpha_{ij}^{***} - \alpha_{i-1j}^{***}}{x_i - x_{i-1}} + \max(v_{ij}^{***},0)\frac{\alpha_{ij+1}^{***} - \alpha_{ij}^{***}}{y_{j+1} - y_j} +$$

$$+\max(-v_{ij}^{***},0)\frac{\alpha_{ij}^{***} - \alpha_{ij-1}^{***}}{y_j - y_{j-1}} + \frac{\alpha_{ij}^{***}}{\overset{*}{\rho}_{mij}}\left(-u_{ij}^{***}\left.\frac{\partial \rho_m}{\partial x}\right|_{ij}^{*} - v_{ij}^{***}\left.\frac{\partial \rho_m}{\partial y}\right|_{ij}^{*} - \frac{\overset{*}{\rho}_{mij} - \overset{n}{\rho}_{mij}}{\Delta t}\right) = \dot{m}_{ij}^{+} - \dot{m}_{ij}^{-}$$

найти значение объемной доли жидкой фазы α^{***}.

11. Вычислить поле плотности жидкости $\rho_m^{**} = \alpha^{***}\rho_l + (1-\alpha^{***})\rho_v$.
12. Полагая $P^0 = P^{**}$, $u^* = u^{***}$, $v^* = v^{***}$, $\rho_m^{\ 0} = \rho_m^{\ **}$, $\alpha^* = \alpha^{***}$, повторить итерации 2 – 11.

Процесс массообмена, происходящий в областях жидкости с давлением близким к критическому значению давления P_{cav}, моделируется членами $\dot{m}^{+}$ и $\dot{m}^{-}$ уравнения (4), представляющими скорость конденсации и испарения жидкости. В данной работе скорость массообмена вычислялась по формулам:

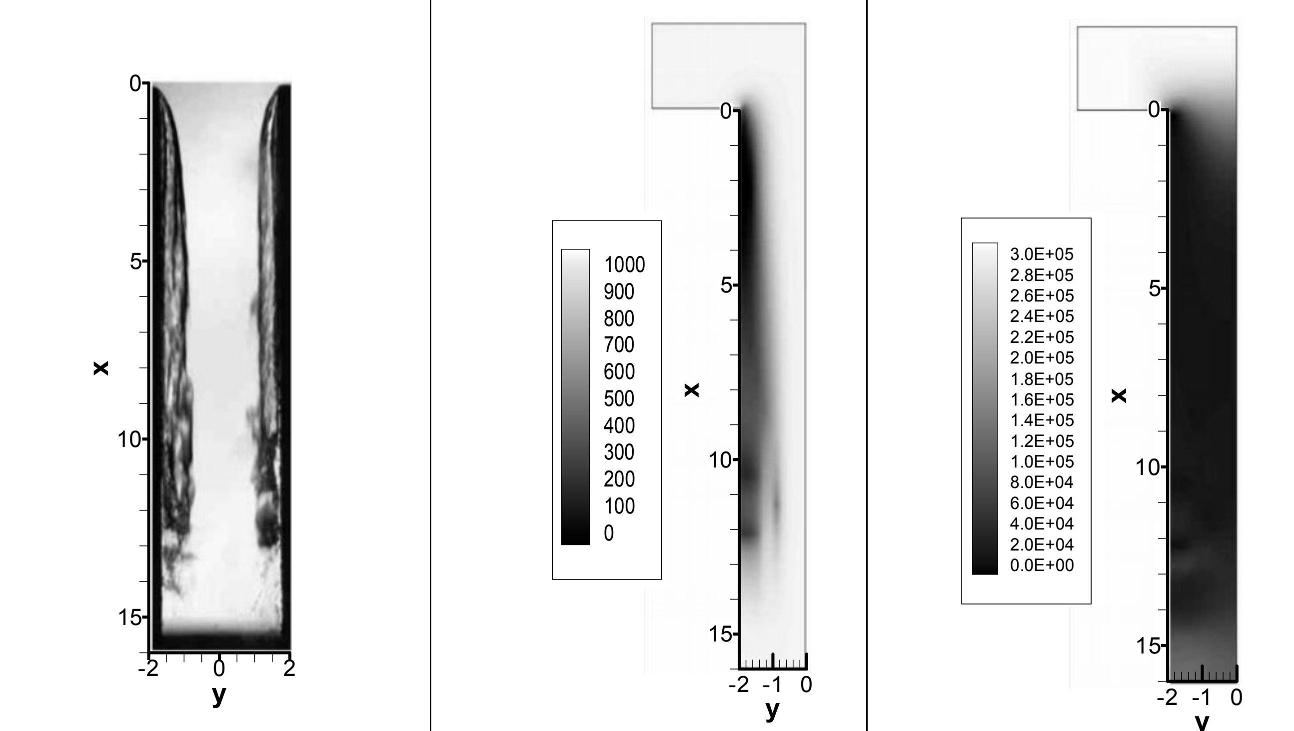
$$\dot{m}^{+} = \frac{C_{prod}\max(P - P_{cav},0)(1-\alpha)}{(0.5\rho_l U_\infty^2)t_\infty}, \quad \dot{m}^{-} = -\frac{C_{dest}\rho_l \min(P - P_{cav},0)\alpha}{\rho_v (0.5\rho_l U_\infty^2)t_\infty},$$

где U_∞ - средняя скорость течения в невозмущенном потоке; $t_\infty = \dfrac{L_{ch}}{U_\infty}$ - характерный временной масштаб; L_{ch} -длина тракта; C_{dest}, C_{prod} - эмпирически определяемые коэффициенты. Подробный анализ кавитационных моделей и влияния величины коэффициентов C_{dest} и C_{prod} на характеристики течения приведен в [1].

Для связывания полей плотности и давления использовалось соотношение $\rho_m^{'} = C(1-\alpha+\varepsilon)P^{'}$, где C - константа, величина которой не влияет на результат вычислительного эксперимента, но выбор большого значения C может дестабилизировать расчет; при малом значении C значительно замедляется скорость сходимости итерационного процесса. В данной работе $C = 2$.

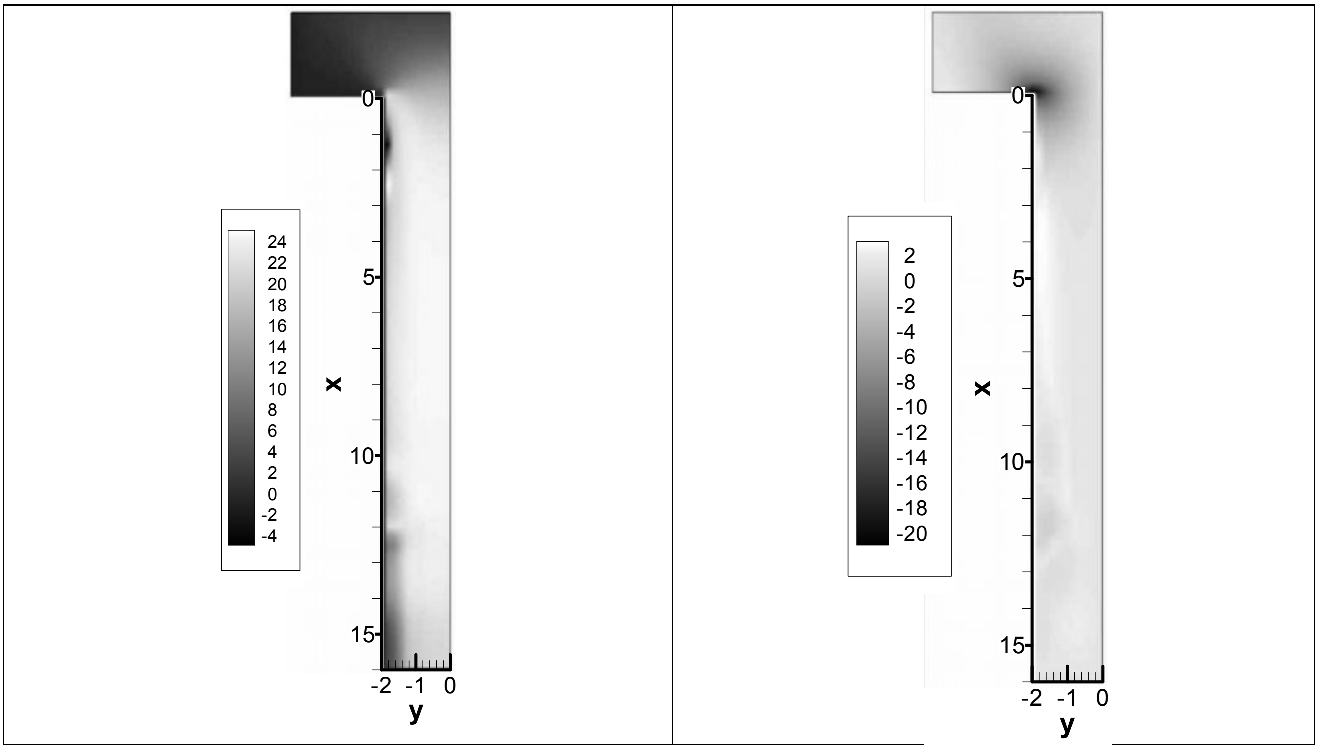
Результаты тестовых расчетов

Для верификации описанного алгоритма рассматривается задача течения жидкости с кинематической вязкостью 10^{-6} м^2/с в плоском тракте длиной 23 мм. Жидкость из входного сечения шириной 32 мм поступает в узкое сечение тракта шириной 4 мм и длиной 16 мм. Так как течение имеет вертикальную ось симметрии, в качестве расчетной области рассматривается половина тракта. На стенках тракта ставятся условия прилипания, на входе в тракт задается профиль скорости u. Истечение жидкости производится в среду с атмосферным давлением, критическое давление P_{cav} равняется 3 КПа. Плотность пара ρ_v считается равной 1 кг/м^3. В численных экспериментах применяется ламинарная модель течения. На рисунках 1 и 2 приведены расчетные мгновенные поля распределения гидродинамических параметров для режима суперкавитации.



а) Фотография течения [10] б) Поле плотности, кг/м^3 в) Поле давления, Па

Рис.1. Распределения гидродинамических параметров при $\sigma = 0.65$.



а) Продольные скорости u, м/с | б) Поперечные скорости v, м/с

Рис.2. Распределения скоростей при $\sigma = 0.65$.

На рисунке 3 показана зависимость относительной величины кавитационной зоны $L_{cav} = \dfrac{\overline{L_{cav}}}{L_N}$, где $\overline{L_{cav}}$ - абсолютная длина кавитацтонной зоны, L_N - длина узкой части тракта, от величины перепада давления dP в тракте. Наблюдается хорошее согласование рассчитанной и экспериментальной [11] кривых.

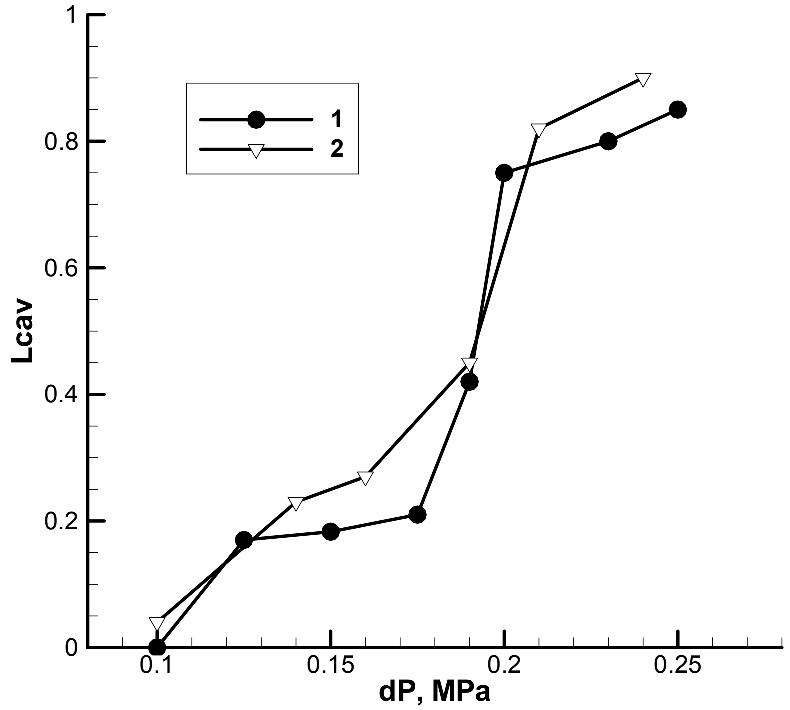


Рис.3. Зависимость величины кавитационной зоны от перепада давления в тракте. 1-эксперимент; 2-расчет.

Выводы

В настоящей работе представлена реализация алгоритма PISO, учитывающая кавитационные эффекты при помощи введения эмпирических параметров скорости конденсации и испарения жидкости. Для апробации алгоритма разработан программный комплекс, проведены численные расчеты течения вязкой жидкости в плоском тракте переменного сечения. Выявлено, что описанный алгоритм обеспечивает надежную сходимость итераций.

Библиографический список

1. Frikha S., Coutier-Delgosha O., Astolfi J. A. Influence of the Cavitation Model on the Simulation of Cloud Cavitation on 2D Foil Section. //International Journal of Rotating Machinery. - 2008. - pp. 1-12.

2. Issa R.I. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. //Journal of Computational Physics. – 1985. – vol. 62. - pp. 40-65.

3. Wang G., Ostoja-Starzewski M. Large eddy simulation of a sheet/cloud cavitation on a NASA0015 hydrofoil. //Applied Mathematical Modeling. - 2007. - vol. 31. – pp. 417-447.

4. Merkle C.L., Feng J.Z., Buelow P.E.O. Computational modeling of the dynamics of sheet cavitation. //Third International Symposium on Cavitation. - 1998. – pp. 307-311.
5. Kunz R.F., Boger D.A., Stinebring D.R., Chyczewski T.S., Lindau J.W., Gibeling H.J., Venkateswaran S., Govindan T.R. A preconditioned Navier–Stokes method for two-phase flows with application to cavitation prediction. //Computers and Fluids. – 2000. - vol. 29. – pp. 849-875.
6. Singhal A.K., Vaidya N. and Leonard A.D. Multi-dimensional Simulation of Cavitating Flows Using a PDF Model for Phase Change. ASME FED Meeting. Paper No. FEDSM’97-3272. – 1997.
7. Lee C., Tae-Seong R. Flow instability due to cryogenic cavitation in the downstream of orifice. //Journal of Mechanical Science and Technology. – 2009. - vol. 23. – pp. 623-649.
8. Senocak I., Shyy W. Interfacial Dynamics-Based Modeling of Turbulent Cavitating Flows, Part-1: Model development and steady-state computations. //Int. J. for Num. Methods in Fluids. - 2004. - vol. 44. – pp. 975-995.
9. Senocak I., Shyy W. Interfacial dynamics-based modelling of turbulent cavitating fows, Part-2: Time-dependent computations. //Int. J. for Num. Methods in Fluids. - 2004. - vol. 44. – pp. 997-1016.
10. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.
11. Sou A., Tomiyama A., Hosokawa S., Nigorikawa S., Maeda T. Cavitation in a two-dimensional nozzle and liquid jet atomization (LDV Measurement of liquid velocity in a nozzle). //JSME International Journal. – 2006. - vol. 49, No. 4. – pp. 1253-1259.
12. Сиов Б.Н. Истечение жидкости через насадки. – М.: Машиностроение, 1968. – 140 с.

Сведения об авторах

Маркина Надежда Леонидовна, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета).

Нижняя Первомайская ул., 50, кв.79, Москва, 105203;
тел.: 8-910-472-34-39; e-mail: markina_n@list.ru