Труды МАИ. 2023. № 128
Trudy MAI, 2023, no. 128

Научная статья
УДК 519.622.2, 532.507
DOI: 10.34759/trd-2023-128-07

О «ДЕТЕРМИНИЗАЦИИ» СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ В СИСТЕМЕ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Ольга Николаевна Хатунцева[1,2]

[1]Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва»,

Королев, Московская область, Россия

[2]Московский физико-технический институт,

Долгопрудный, Московская область, Россия

olga.khatuntseva@rsce.ru

Аннотация. Проведенные в работах [1,2] исследования показывают, что детерминированный хаос, возникающий в системах автономных дифференциальных уравнений типа Лоренца, при задании любого конечного фиксированного шага по времени, вполне может быть ассоциирован со стохастическим, а не являться, по сути, детерминированным процессом.

В данной работе удается показать, что увеличение в рассматриваемой системе степеней свободы приводит к ее «детерминизации». Этот феномен, в частности, позволяет ответить на вопрос, почему стохастические системы с большим количеством степеней свободы, такие, как например, развитые турбулентные течения жидкости, большие звездные скопления (например, галактики) и пр., в среднем являются вполне детерминированными и демонстрируют устойчивое динамическое состояние.

Ключевые слова: хаос, автономные дифференциальные уравнения, система уравнений Лоренца, стохастические процессы, турбулентность

Для цитирования: Хатунцева О.Н. О «детерминизации» стохастических процессов при увеличении в системе степеней свободы // Труды МАИ. 2023. № 128. DOI: 10.34759/trd-2023-128-07

Original article

ON THE "DETERMINIZATION" OF STOCHASTIC PROCESSES WITH INCREASING DEGREES OF FREEDOM IN THE SYSTEM

Olga N. Khatuntseva[1,2]

[1]Korolev Rocket and Space Corporation «Energia»,

Korolev, Moscow region, Russia

[2]Moscow Institute of Physics and Technology,

Dolgoprudny, Moscow region, Russia

Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Abstract. The issue of the origin and existence of non-deterministic, i.e. stochastic processes in various physical, biological, social and other systems is an extremely complex and interesting task. Despite the long-standing interest in them on the part of scientists, there are still discussions on whether "stochasticity" is the true antipode of "determinism", or it reflects only a certain degree of our ignorance about the system or process under

study. These problems are being conjugated, in particular, with the issues on predetermination of the various systems dynamics and the Universe as a whole.

After the new branches of science emergence in the last century and, quantum mechanics, in particular, many issues related to the “stochasticity” have lost their urgency, since the concept of “uncertainty” has become fixed at the micro-level as one of the fundamental scientific concepts. However, the issue of the uncertainty “loss” while transition from micro to macro systems remains an open scientific problem.

The article raises questions on the fundamental possibility of the stochastic process emergence in the systems described by the deterministic autonomous differential equations obeying Cauchy's theorem on existence and uniqueness, as well as questions related to the possibility of “determinization” of stochastic systems with the number of degrees of freedom increase.

The author shows that not only deterministic chaos with a structure difficult to analyze and interpret in the systems of autonomous differential equations, but true non-determinism, i.e.“stochasticity” may occur stipulated by the incompatibility of differential equations due to the finiteness of the time step. This phenomenon may occur herewith at any arbitrarily small, but finite step in time.

The author managed to demonstrate the work that that an increase in the degrees of freedom in the system under consideration leads to its “determinization”. This phenomenon allows, in particular, answering the question on why stochastic systems with a large number of degrees of freedom, such as, developed turbulent fluid flows, large star clusters (such as galaxies), etc., are quite deterministic on average and demonstrate a stable dynamic state.

Keywords: chaos, autonomous differential equations, system of Lorentz equations, stochastic processes, turbulence

For citation: Khatuntseva O.N. On the "determinization" of stochastic processes with increasing degrees of freedom in the system. *Trudy MAI*, 2023, no. 128. DOI: 10.34759/trd-2023-128-07

1. Введение

Вопрос о возникновении и существовании недетерминированных - стохастических процессов в различных физических, биологических, социальных и прочих системах является чрезвычайно сложной и интересной задачей. Не смотря на давний интерес к ним со стороны ученых, до сих пор ведутся дискуссии о том, является ли «стохастичность» истинным антиподом «детерминированности», или она отражает только определенную степень нашей неосведомленности об исследуемой системе или процессе. Эти вопросы сопрягаются, в частности, с вопросами о предопределенности динамики различных систем и Вселенной в целом.

После возникновения в прошлом веке новых отраслей науки и, в частности, квантовой механики, многие вопросы, связанные со «стохастичностью» потеряли остроту, в связи с тем, что на микроуровне понятие «неопределенность» закрепилось, как одна из основополагающих научных концепций. Однако, вопрос «потери» неопределенности при переходе от микро- к макросистемам остается открытой научной проблемой.

Отдельной научной проблемой является исследование динамических систем на уровне рассмотрения уравнений в частных переменных (УЧП), обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и, в частности, систем автономных дифференциальных уравнений (АДУ) (например, системы АДУ Лоренца [3-5]). В некоторых системах в определенных диапазонах значений параметров обнаружена возможность появления, так называемого, «детерминированного хаоса». Проведенные в работах [1-2] исследования позволили сделать вывод, что такой «хаос» вполне можно ассоциировать со стохастическим процессом.

В данной работе рассмотрим вопросы о «стохастизации» и «детерминизации» систем с различным числом степеней свободы.

2. Возникновение стохастических процессов и их «детерминизация» в системах, описываемых автономными дифференциальными уравнениями

Для более подробного исследования явления «стохастизации» и «детерминизации» рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений, состоящую из N уравнений, где $N \geq 3$:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_N), \quad i = 1,2,..N, \tag{1}$$

здесь каждая из N функций зависит от N переменных.

Условие совместности для уравнений, входящих в систему АДУ (1), на любых двух соседних итерациях *(k-1)* и *(k)* на временном интервале: $t_{k-1} \le t \le t_k$, можно представить в виде:

$$\Delta t_{(k)} = t_{(k)} - t_{(k-1)} =$$

$$\int\limits_{x_{1(k-1)}}^{x_{1(k)}} \frac{dx_1}{f_1\left(x_1, x_{2(k-1;k)}, \ldots, x_{N(k-1;k)}\right)} = \int\limits_{x_{2(k-1)}}^{x_{2(k)}} \frac{dx_2}{f_2\left(x_{1(k-1;k)}, x_2, \ldots, x_{N(k-1;k)}\right)} = .. = \int\limits_{x_{N(k-1)}}^{x_{N(k)}} \frac{dx_N}{f_N\left(x_{1(k-1;k)}, x_{2(k-1;k)}, \ldots, x_N\right)} \tag{2}$$

Запись: $f_i\left(x_{1(k-1;k)}, \ldots, x_{i-1(k-1;k)}, x_i, x_{i+1(k-1;k)}, \ldots x_{N(k-1;k)}\right)$, здесь означает, что для любой функции f_i для всех координат x_j (таких что $j \ne i$), должны существовать точки с координатами, расположенные в диапазонах: $x_{j(k-1)} \le x_j \le x_{j(k)}$, такие, что выполняется соотношение (2).

Свойство совместности для системы АДУ на любых двух соседних итерациях *(k-1)* и *(k)* должно выполняться для значений функций при значениях аргументов, лежащих внутри области, ограниченной значениями координат: $\left(x_{1(k-1)}, x_{2(k-1)}, \ldots, x_{N(k-1)}\right)$ и $\left(x_{1(k)}, x_{2(k)}, \ldots, x_{N(k)}\right)$. Предполагая гладкость рассматриваемых функций, дополняя в каждом интеграле дифференциальное пространство интегрирования до области $d\Omega = dx_1 dx_2 \ldots dx_N$ и одновременно дифференцируя подынтегральные выражения по недостающим переменным, соотношение (2) можно записать в виде:

$$\Delta t_{(k)} = t_{(k)} - t_{(k-1)} = \int\limits_{\Delta\Omega_{(k)}} \frac{\partial^{N-1} f_1^{-1}}{\prod\limits_{j\neq 1}^{N-1} \partial x_j} d\Omega = \int\limits_{\Delta\Omega_{(k)}} \frac{\partial^{N-1} f_2^{-1}}{\prod\limits_{j\neq 2}^{N-1} \partial x_j} d\Omega = \ldots = \int\limits_{\Delta\Omega_{(k)}} \frac{\partial^{N-1} f_N^{-1}}{\prod\limits_{j\neq N}^{N-1} \partial x_j} d\Omega . \qquad (3)$$

Здесь $\Delta\Omega_{(k)} = \Delta x_{1(k)} \Delta x_{2(k)} .. \Delta x_{N(k)} = \prod\limits_{i=1}^{N} \Delta x_{i(k)}$, $\Delta x_{i(k)} = x_{i(k)} - x_{i(k-1)}$.

Поскольку выполнение соотношения (3) не должно зависеть от размера рассматриваемой (достаточно маленькой) области фазового пространства, то для гладких функций, в областях, где $f_j(x_1, x_2, \ldots, x_N) \neq 0$, в каждый момент времени должно выполняться условие:

$$\frac{\partial^{N-1} f_1^{-1}}{\prod\limits_{j\neq 1}^{N-1} \partial x_j} = \frac{\partial^{N-1} f_2^{-1}}{\prod\limits_{j\neq 2}^{N-1} \partial x_j} = \ldots = \frac{\partial^{N-1} f_N^{-1}}{\prod\limits_{j\neq N}^{N-1} \partial x_j} . \qquad (4)$$

Очевидно, что выполнение условия (4) для произвольной системы АДУ в каждой точке фазового пространства представляется крайне маловероятным событием. В тех случаях, когда условие (4) для системы АДУ не выполняется (что происходит почти всегда), в системах, обладающих свойством ограниченности объема фазового пространства, на достаточно длительных промежутках времени, траектории решений будут проходить в окрестностях точек, принадлежащих другим траекториям (являющихся решениями системы АДУ при других начальных условиях). Причем размер таких окрестностей может быть сколь угодно мал, но конечен. В дискретном представлении, при переходе от одного итерационного шага к другому, в те моменты, когда расстояние между траекториями оказывается меньше итерационного шага, могут происходить “перескоки” с одной траектории решения на другую, порождая, при определенных условиях не просто вычислительный хаос, а вычислительную «стохастику» [1-2]. То есть в такой системе будет происходить, своего рода, «перемешивание» траекторий, имеющих различные начальные значения. Причем это свойство будет присуще системе на любом сколь угодно малом, но конечном масштабе интегрирования. А поскольку аналитических решений для систем АДУ, состоящих из трех и более уравнений, в общем случае не существует, то результат их интегрирования в таком виде является, по сути, единственно возможным и не может быть заменен чем-то более регулярным (детерминированным) и менее хаотичным. Если в системе имеются еще и условия для экспоненциальной расходимости изначально близких траекторий решений, в ней есть предпосылки к возникновению в качестве фазового портрета системы странного аттрактора.

Здесь можно поставить вопрос о том, насколько формализм, принятый для моделирования систем на основе УЧП и ОДУ (или в частном случае систем АДУ), с использованием концепции бесконечно малых (для аналитических решений) или в виде конечных разностей (для численного моделирования), может быть адекватным. В природных и физических системах всегда присутствует масштаб, на котором теряется гладкость рассматриваемых функций. Такой масштаб может быть связан, как с переходом к квантовому уровню, так и со стохастическими возмущениями на микро- и мезомасштабах, например, с влиянием броуновского движения молекул в гидро- и газодинамических процессах. Кроме того, наличие несопоставимых по масштабу четырех сил различной физической природы: гравитационного, электромагнитного, сильного и слабого взаимодействий, должно приводить к отсутствию возможности существования процессов, описываемых с помощью абсолютно гладких функций.

В самом деле, если мы спустимся к масштабу, на котором начинает играть роль неучтенное в модели взаимодействие, то этот масштаб может считаться нижней границей описания процесса на основе «гладких» функций. Например, описывая гидродинамический процесс на основе уравнений Навье-Стокса (УНС), мы не можем считать скорость течения «гладкой» на всех возможных масштабах даже для ламинарного течения. УНС не описывают скорость молекул жидкости на масштабах броуновского движения, где происходит «стохастизация» процесса. Эти уравнения, по сути, являющиеся уравнениями для описания закона сохранения импульса, перестают работать, поскольку закон сохранения импульса не работает в системах, в которых не сохраняется кинетическая энергия, а кинетическая энергия не является постоянной величиной на масштабах броуновского движения молекул жидкости в каждом заданном достаточно малом объеме. Это происходит из-за вероятностного (случайного) распределения скорости молекул жидкости в заданном объеме, с одной стороны, а с другой стороны, является следствием рассеивания части кинетической энергии молекул в виде тепла, которое уносится фотонами, являющимися переносчиками электромагнитного излучения, не учтенными в УНС. Причем, замечая, что характер рождения и уничтожения фотонов всегда носит вероятностный характер (можно вспомнить процесс рождения и уничтожения фотонов при переходе электронов в атоме с одного уровня на другой), то «включение» этого механизма в гидродинамический процесс обязательно приведет к «стохастизации» последнего, по крайней мере, на достаточно малых масштабах. При рассмотрении значений скорости на макромасштабах, то есть при усреднении по все б***о***льшему объему, «стохастизация» становится менее заметна – происходит «детерминизация» течения. А превращение части кинетической энергии в тепловую учитывается в УНС в виде (детерминированных) вязких членов.

Если гидродинамическая система обладает малой устойчивостью (например, на режимах, характеризующихся достаточно большими числами Рейнольдса), то «стохастизация» течения происходит практически на всех масштабах из-за нелинейных эффектов и/или взаимодействия с поверхностями, ограничивающих течение. В этом случае режим течения становится турбулентным – стохастическим. В результате, в каждом ограниченном объеме изменяется производство энтропии по сравнению с ламинарным режимом течения, и нарушается закон сохранения импульса практически на всех масштабах. Более подробно об этом см., например, в [6-9] (здесь стоит отметить, что вопрос корректного описания турбулентного течения до сих пор остается открытой проблемой, от решения которой зависит возможность разработки универсального подхода к огромному количеству практических задач [10-24]).

Таким образом, концепция описания процессов с помощью гладких функций на бесконечно малых масштабах не выполняется в природе никогда. Однако в некоторых случаях устойчивость системы позволяет пренебречь рассмотрением масштабов, на которых теряется гладкость функций и происходит «стохастизация» системы, а в других случаях возникновение стохастического процесса происходит практически на всех масштабах рассматриваемой системы.

Остается открытым вопрос: если система достаточно большая и в ней имеется практически неограниченный спектр масштабов, то всегда ли существует возможность ее «детерминизации»? И если да, то, как определить условия, приводящие к «детерминизации»?

Для ответа на эти вопросы, вернемся к условию совместности (4). Если оно не выполняется, то на k-ой итерации для каждого i-го уравнения должен быть свой интервал времени:

$$\Delta t_{i(k)} = t_{i(k)} - t_{i(k-1)} = \int\limits_{\Delta\Omega_{(k)}} \frac{\partial^{N-1} f_i^{-1}}{\prod\limits_{j\neq i}^{N-1} \partial x_j} d\Omega \approx \left. \frac{\partial^{N-1} f_i^{-1}}{\prod\limits_{j\neq i}^{N-1} \partial x_j} \right|_{\vec{x}\in\left[\vec{x}_{(k-1)};\vec{x}_{(k)}\right]} \cdot \Delta\Omega_{(k)}. \qquad (5)$$

Здесь и далее, запись $\vec{x}\in\left[\vec{x}_{k-1};\vec{x}_k\right]$ обозначает, что функции f_i и их производные после перехода к приближенному выражению принимают значения, соответствующие значениям аргументов, лежащим внутри области, ограниченной координатами: $\left(x_{1(k-1)}, x_{2(k-1)}, ..., x_{N(k-1)}\right)$ и $\left(x_{1(k)}, x_{2(k)}, ..., x_{N(k)}\right)$.

В этом случае, фазовый объем, соответствующий k-ой итерации, можно записать в виде:

$$\Delta\Omega_{(k)} = \prod_{i=1}^{N} \Delta x_{i(k)} = \prod_{i=1}^{N} f_i \Delta t_{i(k)} \approx \prod_{i=1}^{N} \left(f_i \left. \frac{\partial^{N-1} f_i^{-1}}{\prod\limits_{j\neq i}^{N-1} \partial x_j} \right|_{\vec{x}\in\left[\vec{x}_{(k-1)};\vec{x}_{(k)}\right]} \right) \cdot \Delta\Omega_{(k)}^{N}.$$

Откуда следует, что

$$\Delta\Omega_{(k)} \approx \left(\prod_{i=1}^{N} \left(f_i \frac{\partial^{N-1} f_i^{-1}}{\prod\limits_{j\neq i}^{N-1} \partial x_j} \Bigg|_{\vec{x}\in\left[\vec{x}_{(k-1)};\vec{x}_{(k)}\right]} \right) \right)^{-\frac{1}{N-1}}. \qquad (6)$$

Из соотношений (6) и (5) видно, что для $N \geq 3$, $\Delta\Omega_{(k)}$ и $\Delta t_{i(k)}$ могут быть как действительными, так и комплексными (или мнимыми), в зависимости от знака выражения, стоящего в скобках в формуле (6), причем, это выражение в скобках в случае рассмотрения ограниченных систем должно быть знакопеременным. Комплексные (или мнимые) значения величин $\Delta\Omega_{(k)}$ и $\Delta t_{i(k)}$ вряд ли могут быть соотнесены с реальными физическими процессами. Это означает, что, по крайней мере, на некоторых итерациях невозможно полностью удовлетворить системе АДУ, предполагая «гладкость» и детерминированность функций. Если «двигаться» по итерационным шагам и выбирать только значения величин $\Delta\Omega_{(k)}$ и $\Delta t_{i(k)}$, принадлежащие множеству действительных значений, то мы увидим набор случайных чисел, то есть стохастический процесс.

Исследуя соотношение (6), можно заметить, что с увеличением числа переменных N (для $N \geq 3$) и, соответственно, числа АДУ в системе, амплитуда колебаний $\Delta\Omega_{(k)}$ (а, следовательно, и $\Delta t_{i(k)}$) относительно мнимой оси должна уменьшаться. В самом деле, если в этом соотношении выражение в скобках отрицательно, то его можно переписать в виде:

$$\Delta\Omega_{(k)} \Big/ \left|\Delta\Omega_{(k)}\right| = \left(-1\right)^{-1/(N-1)} = i^{-2/(N-1)} = e^{-i\pi/(N-1)} \underset{N>>1}{\rightarrow} 1 .$$

То есть, при достаточно больших значениях числа переменных *N,* траектория, являющаяся результатом интегрирования системы АДУ, будет «стремиться» приблизиться к действительной области фазового пространства значений координат и времени.

Этим можно объяснить потерю (ослабление) стохастических свойств при переходе от микро- к макросистемам и, соответственно, б***о***льшую детерминированность и устойчивость макросистем, например, детерминированность и устойчивость (при малых числах Рейнольдса) ламинарного течения жидкости на масштабах, значительно превышающих масштаб броуновского движения, а также высокую устойчивость и детерминированность (в среднем) развитого турбулентного течения жидкости (при больших числах Рейнольдса), несмотря на его локальные стохастические свойства в широком диапазоне масштабов.

Здесь также уместно вспомнить, что, несмотря на различные механизмы перехода от ламинарного к турбулентному течению и, соответственно, различной структуре переходных (маломодовых) режимов течения, развитая (имеющая сплошной спектр частот) турбулентность обладает очень устойчивой структурой течения, не зависящей от того, как осуществился переход к ней от ламинарного режима.

Вероятно, этим же можно объяснить потерю квантовых свойств в макросистемах. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Полученные результаты и выводы верны также для случая, когда каждая из функций f_i зависит от $(N\text{-}1)$ координат $x_j \neq x_i$, то есть от всех координат, кроме своей «собственной» координаты x_i, а также, с некоторой модификацией, и для случая, когда некоторые из N функций f_i в системе АДУ зависят не от всех переменных $x_j \neq x_i$.

Остановимся на этом подробнее. Итак, если некоторые из N функций f_i в системе АДУ зависят не от всех переменных $x_j \neq x_i$, интегрирование каждого из уравнений в системе АДУ (3) нужно проводить только по тем переменным, которые в него входят. А дополнять пространство до полного набора переменных, используемых в системе, нужно умножая и одновременно деля на одни и те же интервалы оставшихся переменных. Тогда для каждого i-го интервала времени, соответствующего функции f_i для i–ого уравнения (см. (1)), на заданной (k)-ой итерации можно записать:

$$\Delta t_{i(k)} = \frac{\Delta x_{i(k)}}{f_i} = \int\limits_{\Delta\Omega_{N-n_i(k)}} \frac{\partial^{N-n_i-1} f_i^{-1}}{\prod\limits_{j\neq i}^{N-n_i-1} \partial x_j} d\Omega_{N-n_i} \approx \left.\frac{\partial^{N-n_i-1} f_i^{-1}}{\prod\limits_{j\neq i}^{N-n_i-1} \partial x_j}\right|_{\vec{x}\in[\vec{x}_{k-1};\vec{x}_k]} \cdot \frac{\Delta\Omega_{(k)}}{\Delta\omega_{i(k)}}. \qquad (7)$$

Здесь n_i – количество переменных $x_l \neq x_i$, от которых ***не*** зависит функция f_i в i–ом уравнении, $\Delta\omega_{i(k)} = \prod\limits_{l=1}^{n_i} \Delta x_{l(k)} = \Delta\Omega_{(k)} / \Delta\Omega_{N-n_i(k)}$ - фазовый объем по переменным l, от которых ***не*** зависит функция f_i в i–ом уравнении, $\Delta\Omega_{(k)} = \prod\limits_{i=1}^{N} \Delta x_{i(k)}$ - полный фазовый объем по всем N переменным для данной системы уравнений, $\Delta\Omega_{N-n_i(k)}$ - фазовый объем по всем переменным, от которых зависит функция f_i в i–ом уравнении (все фазовые объемы представлены изменением координат при переходе от (*k-1)* к *(k)*-ой итерации).

Как было показано в работе [2], даже для трехмерного пространства и при наличии функций, зависящих не от всех переменных, в общем случае не удается обеспечить выполнение условия совмести для уравнений автономной системы. Этим можно объяснить хаотическое поведение решения системы АДУ и возникновение странных аттракторов. Кроме того, последовательно задавая равенство интервалов времени для различных уравнений можно получить разные наборы значений интервалов пространственных координат, таких, от которых зависят ***не*** все функции в правых частях уравнений автономной системы. Таким образом, можно говорить о «некоммутируемости» процесса решения автономных уравнений, поскольку результат решения будет зависеть от выбора последовательности интегрирования уравнений.

Если перемножить выражения (7) для всех N уравнений, получим соотношение:

$$\frac{\Delta\Omega_{(k)}}{\prod\limits_{i=1}^{N} f_i\big|_{\vec{x}\in[\vec{x}_{k-1};\vec{x}_k]}} \approx \prod_{i=1}^{N}\left(\left.\frac{\partial^{N-n_i-1} f_i^{-1}}{\prod\limits_{j\neq i}^{N-n_i-1}\partial x_j}\right|_{x\in[\vec{x}_{k-1};\vec{x}_k]}\right)\frac{\Delta\Omega_{(k)}^{N}}{\prod\limits_{i=1}^{N}\Delta\omega_{i(k)}}.$$

Откуда следует, что

$$\Delta\Omega_{(k)} \approx \left[\prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\Delta\omega_{i(k)}} \left(f_i \frac{\partial^{N-n_i-1} f_i^{-1}}{\prod_{j\neq i}^{N-n_i-1} \partial x_j} \right) \Bigg|_{\vec{x}\in[\vec{x}_{k-1};\vec{x}_k]} \right) \right]^{-\frac{1}{N-1}} . \tag{8}$$

Для выражения (8) верны все выводы о возможной «детерминизации» системы при увеличении количества степеней свободы (для $N>>1$) и, соответственно, числа уравнений в системе АДУ, сделанные для выражения (6).

И, наконец, если каждая из функций f_i зависит только от одной - «своей» - координаты x_i $f_i=f_i(x_i)$, то условие совместности можно обеспечить выбором соответствующего интервала Δx_i в каждом уравнении при одинаковом шаге по времени для всех уравнений. В этом случае,

$$\Delta\Omega_{(k)} = \prod_{i=1}^{N} \Delta x_{i(k)} = \Delta t^N \prod_{i=1}^{N} f_{i(k)} . \tag{9}$$

Анализируя выражения (5)-(9), можно сделать следующие выводы для трех возможных случаев:

1) В случае, когда каждая из функций f_i зависит только от одной - «своей» - координаты x_i объемы ячеек фазового пространства при переходе от одного итерационного шага к другому можно устремить к нулю, устремляя к нулю рассматриваемый временной интервал (см. выражение (9)). Этот случай описывает детерминированный процесс.

2) В случае, когда каждая из функций f_i зависит от всех (N-1) координат $x_j \neq x_i$ (или от всех N координат, включая свою «собственную» координату x_i), объемы ячеек

фазового пространства при переходе от одного итерационного шага к другому и временные интервалы для каждого из уравнения системы зависят только от значений функций, стоящих в правых частях автономных уравнений, а также их производных *(N-1)*-ой степени в точках пространства на рассматриваемых итерационных шагах. Однако, такой процесс, в принципе, не является детерминированным, поскольку, во-первых, не существует общего для всех уравнений интервала времени на каждом итерационном шаге, во-вторых, в замкнутой области, когда производные функций при движении по траектории должны быть знакопеременными, объемы ячеек фазового пространства и интервалы времени, определяемые для каждого уравнения, для случая $N \geq 3$, могут быть как действительными, так и комплексными (или мнимыми), а, поскольку, это физически не реализуемо, то, по крайней мере, на некоторых итерациях невозможно полностью удовлетворить системе АДУ, предполагая «гладкость» и детерминированность функций.

Если «двигаться» по итерационным шагам, определяя, специальным образом, для каждого уравнения свой шаг по времени, и рассматривать только значения величин $\Delta\Omega_{(k)}$ и $\Delta t_{i(k)}$, принадлежащие множеству действительных значений, то мы увидим набор случайных чисел, то есть стохастический процесс. При увеличении числа переменных N и, соответственно, числа уравнений в системе, стохастический процесс становится менее заметным (приобретает черты детерминированного), поскольку, как было показано выше, уменьшается амплитуда колебаний величин $\Delta\Omega_{(k)}$ и $\Delta t_{i(k)}$ относительно мнимой оси.

Если же придерживаться традиционного подхода, и на каждом итерационном шаге выбирать общий для всех уравнений временной интервал, то при интегрировании уравнений численными методами на каждом итерационном шаге могут происходить немонотонные переходы между значениями функции, являющимися решениями в различные моменты времени, не соответствующими данному итерационному шагу. Именно такой подход приводит к появлению странных аттракторов [1-2].

3) Все, что было сказано выше для второго случая, относится и к «промежуточному» - третьему случаю, когда некоторые из функций f_i зависят не от всех *(N-1)* координат $x_j \neq x_i$.

В этом случае можно также отметить, что размер ячейки фазового пространства при переходе от одного итерационного шага к другому и временной интервал для каждого уравнения системы зависят как от значений функций, стоящих в правых частях уравнений автономной системы и их производных различной степени в точках пространства на рассматриваемых итерационных шагах, так и от размеров подобластей, образованных изменением координат, от которых **не зависят** функции в правых частях соответствующих автономных уравнений (см. выражения (7)-(8)). В принципе, варьируя эти подобласти, можно добиться уменьшения изменения фазового объема и/или интервала времени, по крайней мере, на некоторых итерационных шагах. Однако при определении размеров подобластей возникает проблема некоммутируемости последовательности операций при определении этих подобластей и/или неопределенность (произвольность) их задания, которая влечет за собой неопределенность в результатах численного интегрирования системы АДУ. В результате, неопределенность на разных итерационных шагах может быть, как уменьшена, так и проявиться в еще большей степени, чем во втором случае.

На математическом уровне описания, хаотическим или стохастическим процессом можно считать процесс, который по объективным причинам не может быть детерминировано смоделирован системой дифференциальных уравнений на основе гладких функций. Как было показано выше, источником хаотического и стохастического поведения решений во втором и третьем случаях является невозможность удовлетворить системе АДУ, предполагая «гладкость» и детерминированность функций, а также невозможность учесть «некоммутируемость» в процессе последовательного интегрирования уравнений и/или избежать неоднозначности результатов интегрирования системы уравнений при задании произвольных интервалов изменения некоторых переменных.

С учетом вышеизложенного, можно сказать, что в первом случае решение будет детерминированным; во втором и третьем оно может быть хаотическим или даже стохастическим.

Примером, иллюстрирующим первый случай, является задача о движении малых тел в центральном гравитационном поле массивного тела, в том случае, когда гравитационным притяжением малых тел между собой и их влиянием на большое тело можно пренебречь.

Примером, иллюстрирующим второй случай, является задача о движении сопоставимых по массе тел в общем гравитационном поле, образованном этими телами.

Иллюстрацией к третьему случаю, может быть задача о движении тел в общем гравитационном поле, образованном этими телами, в том случае, если часть этих тел сопоставимы между собой по массе, а часть тел пренебрежимо малы.

В случае, когда мы рассматриваем систему, имеющую очень большое число степеней свободы, может происходить, как было показано выше, ее «детерминизация». Примером может служить вполне детерминированное поведение галактики в целом, в то время как динамика отдельных звезд и небесных тел в ее составе может проявлять стохастические черты. Аналогичный процесс «детерминизации», как было показано выше, наблюдается при ламинарном режиме течения на масштабах, превышающих масштаб броуновского движения молекул жидкости, а также в развитом турбулентном режиме течения жидкости, когда течение ***в среднем*** становится устойчивым и вполне детерминированным, несмотря на его локальные стохастические свойства в широком диапазоне масштабов.

Заключение.

В работе подняты вопросы о принципиальной возможности возникновения стохастического процесса в системах, описываемых детерминированными автономными дифференциальными уравнениями, подчиняющимися теореме Коши о существовании и единственности, а также вопросы, связанные с возможностью «детерминизации» стохастических систем с увеличением числа степеней свободы.

Показано, что в системах автономных дифференциальных уравнений возможно возникновение не только детерминированного хаоса, имеющего сложную для анализа и интерпретации структуру, а истинной недетерминированности - «стохастичности», обусловленной несовместностью дифференциальных уравнений из-за конечности временного шага. Причем, это явление может возникнуть на ***любом*** сколь угодно малом, но конечном шаге по времени.

В работе удалось показать, что увеличение в рассматриваемой системе степеней свободы приводит к ее «детерминизации». Этот феномен, в частности, позволяет ответить на вопрос, почему стохастические системы с большим количеством степеней свободы такие, как например, развитые турбулентные течения жидкости, большие звездные скопления (например, галактики) и пр., в среднем являются вполне детерминированными и демонстрируют устойчивое динамическое состояние. Кроме того, это позволяет понять, почему не следует ожидать, что любой «взмах крыла бабочки» может привести к возникновению торнадо.

Список источников

1. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Естественные и технические науки. 2017. № 11. С. 255-257.

2. Хатунцева О.Н. О стохастических свойствах динамического хаоса в системах автономных дифференциальных уравнений, типа системы Лоренца // Труды МАИ. 2020. № 112. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=116313. DOI: 10.34759/trd-2020-112-1

3. Берже П., Помо И., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистком подходе к турбулентности. - М.: Мир, 1991. - 368 с.

4. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 318 с.

5. Пчелинцев А.Н. Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17. № 2. С. 191–201.

6 Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=165492. DOI: 10.34759/trd-2022-123-08

7. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2022. № 122. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=164194. DOI: 10.34759/trd-2022-122-07

8. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=158211. DOI: 10.34759/trd-2021-118-02

9. Khatuntseva O.N. Generalized Analytical Solution of the Problem of Determining the Universal Profile of the Turbulent Flow of an Incompressible Fluid // O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE’s. Book of abstracts. Saint Petersburg, 2022, pp. 61.

10. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.

11. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation // International Journal of Heat and Fluid Flow, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263.

12. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no. 7, pp. 335-343.

13. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow // Europhysics Letters, 2007, no. 43 (2), pp. 171-176.

14.Tuckerman Laurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow // Physics of Fluids, 2015, DOI:10.1063/1.4900874

15. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // Journal of Fluid Mechanics, 1980, no. 96, pp. 59-205.

16. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=75565

17. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34840

18. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58536

19. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=49670

20. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=29361

21. Menter F.R. Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows, AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21.

22. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation // Computers Fluids, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.

23. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure // Journal of Fluid Mechanics, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566.

24. Wilcox David C. Turbulence Modeling for CFD. Second edition, Anaheim: DCW Industries, 1998, 174 p.

References

1. Khatuntseva O.N. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki,* 2017, no. 11, pp. 255-257.

2. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2020, no. 112. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=116313. DOI: 10.34759/trd-2020-112-1

3. Pierre Bergé, Yves Pomeau, Christian Vidal. *L'ordre dans le chaos: Vers une approche déterministe de la turbulence,* 1997, 352 p.

4. Magnitskii N.A., Sidorov S.V. *Novye metody khaoticheskoi dinamiki* (New methods for chaotic dynamics), Moscow, Editorial URSS, 2004, 318 p.

5. Pchelintsev A.N. *Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki*, 2014, vol. 17, no. 2, pp. 191–201.

6 Khatuntseva O.N. *Trudy MAI,* 2022, no. 123. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165492. DOI: 10.34759/trd-2022-123-08

7. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI,* 2022, no. 122. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164194. DOI: 10.34759/trd-2022-122-07

8. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI,* 2021, no. 118. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158211. DOI: 10.34759/trd-202-118-02

9. Khatuntseva O.N. Generalized Analytical Solution of the Problem of Determining the Universal Profile of the Turbulent Flow of an Incompressible Fluid, *O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's*. Saint Petersburg, 2022, pp. 61.

10. Schlichting H. *Boundary layer theory*, London, 1955, 535 p.

11. Spalart P.R. Strategies for turbulence modeling and simulation, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 2000, vol. 21, no. 3, pp. 252-263.

12. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids,* 1995, no. 7, pp. 335-343.

13. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow, *Europhysics Letters,* 2007, no. 43 (2), pp. 171-176.

14. Tuckerman Laurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow, *Physics of Fluids*, 2015, DOI:10.1063/1.4900874

15. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, no. 96, pp. 59-205.

16. Larina E.V., Kryukov I.A., Ivanov I.E. *Trudy MAI*, 2016, no. 91. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75565

17. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. *Trudy MAI,* 2012, no. 59. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34840

18. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536

19. Do S.Z. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49670

20. Vu M.Kh., Popov S.A., Ryzhov Yu.A. *Trudy MAI,* 2012, no. 53. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29361

21. Menter F.R. *Zonal two equation k-w turbulence models for aerodynamic flows*, AIAA Paper, 1993, N93-2906, pp. 21.

22. Shih T.-H., Liou W.W., Shabbir A., Yang Z., and Zhu J. A New k-e Eddy-Viscosity Model for High Reynolds Number Turbulent Flows – Model Developmentand Validation, *Computers Fluids*, 1995, vol. 24, no. 3, pp. 227-238.

23. Launder B.E., Reece G.J., Rodi W. Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure, *Journal of Fluid Mechanics*, April 1975, vol. 68, no. 3, pp. 537-566.

24. Wilcox David C. *Turbulence Modeling for CFD*. Second edition, Anaheim: DCW Industries, 1998, 174 p.

Статья поступила в редакцию 20.10.2022
Одобрена после рецензирования 02.11.2022
Принята к публикации 27.02.2023
The article was submitted on 20.10.2022; approved after reviewing on 02.11.2022; accepted for publication on 27.02.2023