УДК: 330.45

Задача распределения инвестиций в развитие отраслей наземного космического комплекса[1]

Наумов А.В., Иванов С.В.

Аннотация

Рассматривается задача распределения инвестиций, выделяемых на развитие наземного космического комплекса, в условиях случайного спроса на продукцию отраслей и наличии конкуренции. Данная модель основана на двухэтапной двухуровневой задаче стохастического программирования с квантильным критерием. Показано, что в частном случае задача сводится к одноэтапной задаче стохастического линейного программирования. Приведены достаточные условия существования решения задачи. Для случая дискретного распределения вектора случайных параметров предлагается способ сведения исходной задачи к смешанной задаче линейного программирования.

Ключевые слова

стохастическое программирование; квантильный критерий; смешанная задача линейного программирования; доверительный метод; двухэтапная задача; двухуровневая задача.

Введение

В последние годы наметилась тенденция к потере лидерства России в ряде секторов экономики, связанных с освоением космоса и активным использованием космических систем. На правительственном уровне приняты ряд постановлений и федеральных целевых программ,

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-07-00164-а, 11-07-00315-а, 11-07-13102-офи-м-2011-РЖД) и государственного финансирования целевых программ «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (Мероприятие 1.2.2, Госконтракт № 14.740.11.1128).

направленных на восстановление этого лидерства. До 2020 года ставится задача проведения полной реструктуризации предприятий и структур аэрокосмичекой отрасли России. Выделяется значительное финансирование, направленное на модернизацию предприятий аэрокосмической отрасли, проведение научных исследований в этой области и скорейшего внедрения их результатов в производство. Основу, обеспечивающую пуски ракет, управление космическими группировками, поддержание инфраструктуры, необходимой для развития и эффективного использования продуктов и систем аэрокосмической отрасли, составляют наземные космические комплексы.

На качество работы наземных космических комплексов существенно влияют многие неопределенные и случайные факторы: неопределенность по срокам реализации различных технических проектов, случайный спрос на продукцию аэрокосмической отрасли (коммерческие пуски, спрос на услуги действующих аэрокосмических систем и т.д.), погодные и природные факторы и т.д. Сочетание этих факторов приводит к тому, что исходными данными для синтеза оптимальной стратегии развития должны служить не точные значения используемых параметров модели, а диапазоны возможных значений или вероятностные распределения этих значений. Неучёт этого обстоятельства ведёт к увеличению риска невыполнения поставленных задач в условиях реального функционирования.

Одним из подходов к ограничению указанного риска является использование вероятностных критериев качества [1,2] на этапе синтеза стратегии развития наземных космических комплексов. Такой подход позволяет разумно увязать противоречивые требования по эффективности и надёжности и снизить указанный риск за счёт использования математических моделей, наиболее адекватных условиям функционирования с учётом имеющейся априорной информации. К вероятностным критериям относятся вероятностный и квантильный критерии. Вероятностный критерий определяется как вероятность непревышения допустимого уровня потерь, связанных с реализацией проекта. Квантильный критерий качества является верхней доверительной границей точностного функционала, по сути квантильный критерий — это уровень потерь при реализации проекта, непревышение которого гарантируется с заданной вероятностью. При использовании вероятностного критерия эффективность функционирования системы фиксируется на некотором допустимом уровне, а надёжность, т.е. вероятность превышения этого уровня эффективности, максимизируется. Квантильный критерий порождает обратную постановку: надёжность ограничивается на допустимом уровне, а эффективность от реализации стратегии оптимизируется.

Кроме того, при выборе стратегии развития сложной технико-экономической системы необходимо учитывать наличие на рынке конкурирующей продукции и технологий. Это приводит к необходимости использования игровых моделей. Процесс принятия решений в рассматриваемых системах как правило носит многоуровневый и многоэтапный характер. Сначала принимается глобальная стратегия развития, в рамках которой строятся соответствующие стратегии развития различных структур технико-экономической системы. После этого выбранные стратегии могут корректироваться по факту появления реализаций учитываемых неконтролируемых параметров. Подобные модели принятия решений хорошо описываются двухэтапными [3] и двухуровневыми [4] задачами стохастического программирования. Использование указанных задач с квантильным критерием качества должно привести к формированию оптимальной стратегии, обеспечивающей разумный компромисс между требованиями повышения эффективности реализации проектов и обеспечением требуемой надёжности функционирования систем.

В статье представлена математическая модель для распределения инвестиций, выделяемых на развитие наземного космического комплекса, по различным его отраслям. В модели учтены наличие конкурентов в виде зарубежных производителей аналогичной продукции и случайная природа спроса на продукцию. Данная модель основана на двухэтапной двухуровневой задаче стохастического программирования с квантильным критерием.

Показано, что в частном случае данная задача может быть сведена к одноэтапной задаче стохастического линейного программирования с квантильным критерием [5]. Методы нахождения асимптотически точных решений подобных задач в основном базируются на процедуре стохастической аппроксимации [2] и сопряжены со значительными вычислительными трудностями, которые часто становятся непреодолимыми ввиду отсутствия явного вида функции квантили. Кроме того, достаточные условия сходимости данных методов часто не выполнены. В связи с этим для исследования подобных задач применяются методы поиска гарантирующих решений. Под гарантирующим решением понимается любое допустимое решение задачи, на котором достигается качественная верхняя оценка минимального значения целевой функции квантили.

Методам нахождения гарантирующих и точных решений двухэтапных задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием посвящён ряд работ

[5-10]. Из-за сложности рассматриваемых постановок точное решение удаётся найти только в некоторых частных случаях. В данной работе показано, что, используя доверительный метод и полиэдральность функции оптимального значения критерия задачи второго этапа, двухэтапная задача стохастического линейного программирования в случае дискретного распределения вектора случайных параметров может быть сведена к задаче смешанного линейного программирования.

Актуальность рассмотрения дискретного распределения вектора случайных параметров объясняется тем фактом, что при анализе экономических систем часто используется сценарный подход [3]. Его суть заключается в том, что выделяются несколько вариантов реализации вектора случайных параметров, суммарная вероятность которых равна единице.

Описание математической модели

Математическая модель сформулирована в терминах двухэтапной двухуровневой задачи стохастического программирования с квантильным критерием. Модель предполагает участие на рынке двух игроков: лидера (наземного космического комплекса) и последователя (конкурента в лице иностранных фирм, производящих аналогичную продукцию). Последователь принимает решение, зная стратегию лидера, а лидер учитывает оптимальную стратегию последователя при выборе своей стратегии. Лидер определяет стратегию в два этапа. На первом этапе лидер выбирает первоначальную стратегию, а стратегию второго этапа он определяет по факту реализации случайного спроса на произведённую продукцию.

Будем считать, что наземный космический комплекс состоит из n отраслей производства, выпускающих различную продукцию. Переменной первого этапа (стратегией лидера на первом этапе) является вектор $u \in \mathbb{R}^n$ с координатами u_i, $i = 1, \dots, n$, где u_i является объёмом инвестирования в i-ую отрасль производства. На координаты вектора u должны быть наложены следующие ограничения:

$$u_i \geq \underline{u}_i\,,\ i = 1, \dots, n; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \leq \overline{u}, \tag{2}$$

где $\underline{u}_i$ — минимальный объём инвестирования, необходимый для поддерждания производства i-й отрасли на прежнем уровне, $\overline{u}$ — максимально возможный объём инвестирования, размер которого определяется предельными возможностями инвестора.

Пусть X — случайный вектор размерности n, в котором каждая координата X_i, $i =$

$1, \dots, n$, является случайным спросом на продукцию соответствующей отрасли производства. Реализации данного случайного вектора будем обозначать x, а координаты реализации — x_i, $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\Phi(u, x)$ — доход лидера, взятый с обратным знаком, при инвестировании u и реализации вектора случайного спроса x. Значение функции $\Phi(u, x)$ является оптимальным решением задачи второго этапа, которая будет определена ниже. Функция квантили оптимального значения критерия задачи второго этапа имеет вид

$$\Phi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : \mathbf{P}\{\Phi(u, x) \leq \varphi\} \geq \alpha\}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{P}\{\cdot\}$ — вероятностная мера, порождённая распределением случайного вектора X, α — выбранный уровень надёжности. Таким образом, функция квантили является минимальным уровнем потерь, непревышение которого гарантируется с вероятностью α.

Сформулируем задачу первого этапа:

$$(1 + \mathrm{c}) \sum_{i=1}^{n} u_i + \Phi_\alpha(u) \to \min_u \qquad (4)$$

при ограничениях (1), (2). Здесь c — доходность безрискового финансового актива. По сути, данный критерий показывает, насколько эффективней вложение инвестиций в наземный космический комплекс по сравнению с альтернативной возможностью вложения инвестиций.

Переменными второго этапа (стратегией лидера второго этапа) являются векторы $y, w \in \mathbb{R}^n$, где y_i — цена на продукцию i-й отрасли, устанавливаемая лидером, w_i — объём дополнительных инвестиций в i-ую отрасль, выделяемых по факту реализации случайного спроса.

Для каждой отрасли известна максимально допустимая цена на продукцию $\overline{z}_i$. Данная цена определяется финансовыми возможностями покупателя.

Определён $\overline{w}$ — максимально возможный объём дополнительного инвестирования, размер которого, как и максимальный объём первоначального инвестирования, определяется предельными возможностями инвестора.

Пусть $f_i(u_i)$ — объём производства лидером продукции i-й отрасли при инвестировании u_i в соответствующую отрасль, $g_i(w_i)$ — объём дополнительного производства лидером продукции i-й отрасли при дополнительном инвестировании w_i соответствующей отрасли. Будем считать, что $f_i(u_i) \triangleq s_i u_i$, $g_i(w_i) \triangleq t_i w_i$, где s_i, t_i — некоторые положительные константы. Данные функции являются различными, поскольку дополнительное производство требует привлечения новых ресурсов, а значит, обладает более высокой себестоимостью.

Пусть $z^* \in \mathbb{R}^n$ — оптимальная стратегия последователя, где z_i^* — оптимальная цена на продукцию i-й отрасли, установленная последователем. Последователь выбирает свою стратегию из $Z(u, y, w, x)$ — множества оптимальных решений задачи последователя, которая будет сформулированна ниже.

Будем считать, что объём производства последователем продукции i-й отрасли постоянен и равен $d_i,\ i = 1, \dots, n$.

Доход i-й отрасли производства лидера, взятый с обратным знаком, имеет следующий вид:

$$\Phi_i^1(u_i, y_i, w_i, z_i^*, x_i) \triangleq \begin{cases} -y_i \min\{f_i(u_i) + g_i(w_i),\ x_i\} + w_i, & \text{если } y_i < z_i^*; \\ -y_i \min\{f_i(u_i) + g_i(w_i), \max\{0, x_i - d_i\}\} + w_i, & \text{если } y_i \geq z_i^*. \end{cases} \quad (5)$$

Мы считаем, что в случае, если цена последователя выше цены лидера, покупатель предпочитает продукцию лидера. Если цена последователя ниже цены лидера, то для покупателя предпочтительней продукция последователя. В случае равенства цен покупатель предпочитает продукцию последователя. Таким образом, мы рассматриваем наихудший для лидера сценарий с целью получения гарантированного результата.

Сформулируем задачу второго этапа для лидера:

$$\Phi(u, x) = \min_{y,w} \min_{z^* \in Z(u,y,w,x)} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^1(u_i, y_i, w_i, z_i^*, x_i) \quad (6)$$

при ограничениях

$$0 \leq y_i \leq \bar{z}_i,\ w_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n; \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \leq \overline{w}. \quad (8)$$

Данная задача лидера сформулирована в оптимистической постановке. Выбор оптимистической постановки объясняется тем фактом, что в случае, если для последователя несколько стратегий являются равноценными, он может выбрать из них ту, которая является наиболее благоприятной для лидера. Кроме того, анализ модели показал, что при рассмотрении оптимистического сценария последователь выбирает ту стратегию, которая требует меньшего объёма продаж, а значит, у него остаётся больше продукции для реализации в будущем.

Доход i-й отрасли производства последователя, взятый с обратным знаком, имеет следующий вид:

$$\Theta_i(u_i, y_i, w_i, z_i, x_i) \triangleq \begin{cases} -z_i \min\{d_i,\ x_i\}, & \text{если } z_i \le\ y_i; \\ -z_i \min\{d_i, \max\{0, x_i - f_i(u_i) - g_i(w_i)\}\}, & \text{если } z_i >\ y_i, \end{cases} \tag{9}$$

где z_i — цена на продукцию, установленная последователем. Вектор $z \in \mathbb{R}^n$ с координатами z_i, $i = 1, \dots, n$, является стратегией последователя.

Сформулируем задачу последователя:

$$Z(u, y, w, x) = \operatorname{Arg}\min_z \sum_{i=1}^{n} \Theta_i(u_i, y_i, w_i, z_i, x_i) \tag{10}$$

при ограничениях

$$0 \le z_i \le \overline{z}_i,\ i = 1, \dots, n. \tag{11}$$

Анализ задачи в случае постоянных цен

Рассмотрим частный случай задачи (4).

Предположим, что цены на продукцию являются фиксированными, т.е. $z_i =\ y_i = \tilde{z}_i$ для всех $i = 1, \dots, n$. В этом случае множество допустимых стратегий последователя состоит только из одного элемента. А значит, в задаче лидера отсутствует необходимость оптимизации по множеству оптимальных стратегий последователя.

Фактически в данном случае не учитывается влияние конкурента, и как следствие, из постановки задачи исключается задача последователя. Поэтому данный случай не совсем соответствует условиям рыночной конкуренции. Однако этот случай может иметь место, когда покупатель всё время обращается к одному поставщику продукции, а к конкуренту обращается лишь в том случае, когда основной поставщик не в состоянии удовлетворить весь спрос. Поэтому рассматриваемый частный случай представляет практический интерес.

Запишем задачу первого этапа в матричной форме:

$$u_\alpha \in \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \{\ c_2^T u + \Phi_\alpha(u)\} \tag{12}$$

где

$$U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n |\ A_1 u \le b_1\}, \tag{13}$$

$$c_1 \triangleq (1 + c, 1 + c, \dots ,1 + c)^T \in \mathbb{R}^n,\ A_1 \triangleq \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n},$$

$$b_1 \triangleq (-\underline{u}_1, -\underline{u}_2, \dots , -\underline{u}_n, \overline{u})^T \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Определим оптимальное значение критерия $\varphi_\alpha \triangleq c_1 u_\alpha + \Phi_\alpha(u_\alpha)$.

Задача второго этапа для лидера принимает следующий вид:

$$\Phi(u,x) = \min_{w} \sum_{i=1}^{n} -\tilde{z}_i \min\{f_i(u_i) + g_i(w_i), \max\{0, x_i - d_i\}\} + w_i \tag{14}$$

при ограничениях

$$w_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n; \tag{15}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \leq \overline{w}. \tag{16}$$

Введём вектор ψ дополнительных переменных ψ_i, $i = 1, \dots, n$. Тогда задачу (14) с учётом вида функций $f_i(u_i)$, $g_i(w_i)$ при неотрицательности параметров s_i, t_i, $i = 1, \dots, n$, можно записать в форме задачи линейного программирования

$$\Phi(u,x) = \min_{w,\psi} \sum_{i=1}^{n} -\tilde{z}_i \, \psi_i + w_i \tag{17}$$

при ограничениях

$$s_i u_i + t_i w_i - \psi_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n; \tag{18}$$

$$-\psi_i \geq \min\{0, d_i - x_i\},\ i = 1, \dots, n;$$

$$\psi_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n,$$

и (15), (16).

Введём следующие обозначения: $c_2 \triangleq (1,1, \dots, 1, -\tilde{z}_1, -\tilde{z}_2, \dots, -\tilde{z}_n,)^T \in \mathbb{R}^{2n}$,

$A_2 \triangleq \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \\ & O_{(n+1)\times n} & & \end{pmatrix}$, $O_{k\times m}$ — нулевая матрица размерности $k \times m$, $\eta \triangleq (w^T, \psi^T)^T$ — вектор переменных второго этапа, $B_2 \triangleq \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & t_2 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & -I_n \\ 0 & 0 & \cdots & t_n & \\ & O_{n\times n} & & & -I_n \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 0_n^T \end{pmatrix}$, I_n — единичная матрица размерности $n \times n$, 0_n — нулевой вектор размерности n, $\tilde{X} \triangleq (0, \dots, 0, \min\{0, d_1 - X_1\}, \dots, \min\{0, d_n - X_n\}, -\overline{w}\} \in \mathbb{R}^{2n+1}$. Реализации случайного вектора $\tilde{X}$ будем обозначать $\tilde{x}$. Тогда задачу (17) можно записать в матричном виде

$$\Phi(u,x) = \tilde{\Phi}(u, \tilde{x}) = \min_{\eta} c_2^T \eta \tag{19}$$

при ограничениях

$$A_2 u + B_2 \eta \geq \tilde{x}, \quad (20)$$

$$\eta \geq 0. \quad (21)$$

Таким образом, в случае постоянных цен исходная задача (4) сводится к двухэтапной задаче стохастического линейного программирования с квантильным критерием [5].

Сведение двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием к одноэтапной

В предыдущем разделе показано, что в частном случае постоянных цен исходную задачу (4) можно записать в форме двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. Исследуем полученную задачу (12).

Рассмотрим задачу второго этапа (19). Заметим, что из ограничений (15), (16), (18) при неотрицательности параметров s_i , t_i , $i = 1, \dots, n$, следует ограниченность множества допустимых стратегий в задаче (19). При тех же значениях параметров s_i, t_i, $i = 1, \dots, n$ и неотрицательном $\overline{w}$ нулевой вектор переменных η удовлетворяет ограничениям задачи (19), поэтому множество допустимых стратегий в задаче (19) непусто. Значит, при указанных ограничениях на параметры решение задачи (19) существует при любой допустимой стратегии первого этапа и любой реализации вектора случайного спроса.

Из теории двойственности задач линейного программирования известно, что в случае существования решения задачи линейного программирования (19) оптимальные значения критериев задачи (19) и двойственной к ней совпадают. Таким образом,

$$\tilde{\Phi}(u, \tilde{x}) = \max_{v \in V} \{ (\tilde{x} - A_2 u)^T v \}, \quad (22)$$

где $v \in \mathbb{R}^{2n+1}$ — вектор двойственных переменных, $V \triangleq \{ v \mid B_2^T v \leq c_2, v \geq 0 \}$ — множество допустимых значений двойственных переменных.

Задача (22) при фиксированных u, $\tilde{x}$ является задачей линейного программирования, решение которой существует. Значит, максимум критериальной функции задачи (22) достигается в одной из вершин множества V.

Найдём множество G, состоящее из всех вершин множества V. Рассмотрим матрицу $\tilde{B} \triangleq \begin{pmatrix} B_2^T \\ -I_{2n+1} \end{pmatrix}$. Пусть $B_B^j \in \mathbb{R}^{(2n+1)\times(2n+1)}$ — базисная подматрица (невырожденная квадратная подматрица размерности $(2n+1)\times(2n+1)$ матрицы $\tilde{B}$). $B_{\bar{B}}^j \in \mathbb{R}^{2n\times(2n+1)}$ — подматрица матрицы $\tilde{B}$, составленная из строк $\tilde{B}$, которые не вошли в соответствующую базисную подматрицу B_B^j.

Рассмотрим вектор $\tilde{c}_2 \triangleq (c_2^T, 0)^T \in \mathbb{R}^{4n+1}$. Пусть $c_B^j \in \mathbb{R}^{2n+1}$ — подвектор вектора $\tilde{c}_2$, составленный из тех элементов $\tilde{c}_2$, номера которых совпадают с номерами строк матрицы $\tilde{B}$, вошедшими в матрицу B_B^j. Пусть $c_{\bar{B}}^j$ — соответствующий подвектор вектора $\tilde{c}_2$, составленный из элементов $\tilde{c}_2$, которые не вошли в c_B^j.

Тогда множество G представимо в виде

$$G = \{v^j \in V \mid B_B^j v^j = c_B^j,\ B_{\bar{B}}^j v^j \le c_{\bar{B}}^j,\ j = 1, \dots, K\}, \tag{23}$$

где K — число базисных подматриц матрицы $\tilde{B}$.

Таким образом, для нахождения всех вершин множества V необходимо перебрать $K \le C_{4n+1}^{2n+1}$, где C_{4n+1}^{2n+1} — биномиальный коэффициент, невырожденных квадратных подматриц матрицы $\tilde{B}$, последовательно решая системы

$$\begin{cases} B_B^j v^j = c_B^j \\ B_{\bar{B}}^j v^j \le c_{\bar{B}}^j \end{cases}, \qquad j = 1, \dots, K. \tag{24}$$

Пусть множество V состоит из J точек. Тогда функцию оптимального значения критерия задачи второго этапа $\widetilde{\Phi}(u, \tilde{x})$ можно записать в виде

$$\widetilde{\Phi}(u, \tilde{x}) = \max_{j=1,\dots,J} \{(\tilde{x} - A_2 u)^T v^{\,j}\}. \tag{25}$$

Подставим полученную функцию $\widetilde{\Phi}(u, \tilde{x})$ в задачу (12):

$$u_\alpha \in \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \left\{ c_1^T u + \min\{\varphi : \mathbf{P}\{\max_{j=1,\dots,J} \{(\tilde{X} - A_2 u)^T v^{\,j}\} \le \varphi\} \ge \alpha\} \right\} = \operatorname{Arg}\min_{u \in U} \Psi_\alpha(u), \tag{26}$$

где $\Psi_\alpha(u) \triangleq \min\{\varphi : \mathbf{P}\{\Psi(u, \tilde{X}) \le \varphi\} \ge \alpha\}$,

$$\Psi(u, \tilde{x}) = \max_{j=1,\dots,J} \left\{ \left(c_1^T - (v^{\,j})^T A_2\right) u + (v^{\,j})^T \tilde{x} \right\}. \tag{27}$$

Таким образом, двухэтапная задача (12) сводится к одноэтапной задаче (26) стохастического линейного программирования с квантильным критерием [11], в которой целевая функция потерь имеет вид (27).

В [12] доказана следующая теорема.

Теорема 1[12]. Если $U \ne \emptyset$, $0 < \alpha < 1$ и множество $0^+ U \triangleq \{u \in \mathbb{R}^n \mid A_1 u \le 0\}$ состоит только из нулевого вектора, то решение задачи (26) существует и $\Psi_\alpha(u_\alpha) > -\infty$.

Заметим, что теорема сформулирована в отсутствие каких-либо предположений о виде закона распределения вектора случайных параметров $\tilde{X}$.

Справедливо следствие из теоремы 1.

Следствие. Если $s_i,\ t_i \geq 0, i = 1, \dots, n,\ \ \overline{w} \geq 0,\ 0 < \alpha < 1$ и выполнено условие

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{u}_i \leq \overline{u}, \tag{28}$$

то решение задачи (12) существует и $\varphi_\alpha = \Psi_\alpha(u_\alpha) > -\infty$.

Доказательство. Выше была доказана эквивалентность задач (26) и (12) при выполнении условий $s_i,\ t_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n,\ \ \overline{w} \geq 0$. Значит, решения данных задач либо совпадают, либо не существуют. В силу структуры матрицы A_1 множество 0^+U состоит только из нулевого вектора. Кроме того, при выполнении условий (28) гарантируется непустота множества допустимых стратегий первого этапа. Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены. Следствие доказано. ■

С экономической точки зрения ограничение (28) означает, что максимальный объём инвестирования превосходит суммарный объём инвестирования, необходимый для поддержания производства на прежнем уровне.

Применение доверительного метода

Если существует решение задачи (26), то, согласно доверительному методу [2], эта задача эквивалентна следующей минимаксной задаче:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_\alpha \quad &\triangleq \min_{S \in \mathcal{E}_\alpha, u \in U} \left\{ \sup_{\tilde{x} \in S} \Psi(u, \tilde{x}) \right\}, \\ (\tilde{u}_\alpha, \tilde{S}_\alpha) \quad &\in \operatorname{Arg} \min_{S \in \mathcal{E}_\alpha, u \in U} \left\{ \sup_{\tilde{x} \in S} \Psi(u, \tilde{x}) \right\}, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\mathcal{E}_\alpha$ есть семейство всех доверительных множеств $S \subset \mathbb{R}^m$ уровня α, т.е. таких, что $\mathbf{P}\{S\} \geq$ $\geq \alpha$. Эквивалентность здесь понимается в следующем смысле:

1) $\tilde{\varphi}_\alpha = \varphi_\alpha$;

2) для каждой стратегии u_α, оптимальной в задаче (26), найдется доверительное множество $S_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$ такое, что пара (u_α, S_α) является оптимальной в задаче (29);

3) для каждой пары $(\tilde{u}_\alpha, \tilde{S}_\alpha)$, оптимальной в задаче (29), стратегия $\tilde{u}_\alpha$ является оптимальной и в задаче (26).

Задача (29) может быть записана в следующей эквивалентной форме

$$\varphi \to \min_{u \in U, \varphi \in \mathbb{R}^1, S \in \mathcal{E}_\alpha} \tag{30}$$

при ограничениях

$$\left(c_1^T - (v^{\,j})^T A_2\right)u + \sup_{\tilde{x}\in S}(v^{\,j})^T \tilde{x} \le \varphi, \qquad j = 1, \dots, J. \tag{31}$$

Вследствие эквивалентности задач (29) и (30), оптимальное решение задачи (30) есть $(\tilde{u}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{S}_\alpha)$.

Предположим, что случайный вектор X, а значит и случайный вектор $\tilde{X}$, имеет дискретное распределение с конечным числом реализаций. Пусть x^l, $l = 1, \dots, L$, — возможные реализации случайного вектора X, а $\tilde{x}^l$, $l = 1, \dots, L$, — возможные реализации случайного вектора $\tilde{X}$. Заданы вероятности каждой реализации $p_l \triangleq \mathbf{P}\{X = x^l\} > 0$, $\tilde{p}_l \triangleq \mathbf{P}\{\tilde{X} = \tilde{x}^l\} > 0$.

В случае, когда вектор $\tilde{X}$ имеет дискретное распределение, оптимальное доверительное множество состоит из тех реализаций случайного вектора $\tilde{X}$, суммарная вероятность которых не менее α. Таким образом, можно заменить оптимизацию по доверительным множествам на оптимизацию по всем, имеющим вероятностную меру не менее α, подмножествам множества $\mathcal{X} \triangleq \{\tilde{x}^l \mid l = 1, \dots, L\}$. Введём вектор $\delta \in \{0,1\}^L$ с координатами δ_l, $l = 1, \dots, L$, по правилу

$$\delta_l \triangleq \begin{cases} 1, & \tilde{x}^l \in S; \\ 0, & \tilde{x}^l \notin S, \end{cases}$$

где $S \subseteq \mathcal{X}$. Итак, каждому возможному значению вектора δ соответствует некоторое подмножество S множества $\mathcal{X}$ и наоборот.

Пусть известна величина γ, являющаяся оценкой снизу величин $(v^{\,j})^T \tilde{x}^l$, $j = 1, \dots, J$, $l = 1, \dots, L$, т.е.

$$\gamma \le \min_{j=1,\dots,J;\, l=1,\dots,L} \left\{(v^{\,j})^T \tilde{x}^l\right\}.$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\varphi \to \min_{u\in U, \varphi\in\mathbb{R}^1, \delta\in\{0,1\}^L} \tag{32}$$

при ограничениях

$$\left(c_1^T - (v^{\,j})^T A_2\right)u + \delta_l\left((v^{\,j})^T \tilde{x}^l - \gamma\right) + \gamma \le \varphi, \ j = 1, \dots, J, l = 1, \dots, L; \tag{33}$$

$$\sum_{l=1}^{L} \delta_l \tilde{p}_l \ge \alpha. \tag{34}$$

Пусть $(u^*, \varphi^*, \delta^*)$ — оптимальное решение задачи (32).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $0 < \alpha \le 1$, s_i, $t_i \ge 0, i = 1, \dots, n$, $\overline{w} \ge 0$ и выполнено условие (28). Тогда решения задач (29) и (32) существуют и данные задачи эквиваленты в следующем смысле:

1) оптимальное значение критерия $\tilde{\varphi}_\alpha$ в задаче (29) равно φ^*;

2) u^* является оптимальной стратегией в задаче (29);

3) одно из оптимальных доверительных множеств в (29) имеет вид:

$$S^* \triangleq \{x^l \mid \delta_l^* = 1, l = 1, \dots, L\}. \quad (35)$$

Доказательство. Рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$. Условия $s_i,\ t_i \geq 0, i = 1, \dots, n,\ \ \overline{w} \geq 0$ и (28) обеспечивают существование решения задачи согласно следствию к теореме 1. Покажем, что $\varphi^* \leq \tilde{\varphi}_\alpha$. В силу ограничений задачи (30)

$$\left(c_1^T - (v^{\,j})^T A_2\right)\tilde{u}_\alpha + \sup_{\tilde{x}\in S}(v^{\,j})^T \tilde{x} \leq \tilde{\varphi}_\alpha, \qquad j = 1, \dots, J. \quad (36)$$

Как было отмечено выше, оптимальное доверительное множество $\tilde{S}_\alpha$ содержится в множестве $\mathcal{X}$, т. е. состоит из конечного числа реализаций случайного вектора $\tilde{X}$. Пусть вектор $\tilde{\delta}$ составлен по следующему правилу: $\tilde{\delta}_l = 1$, если $\tilde{x}^l \in \tilde{S}_\alpha$; $\tilde{\delta}_l = 0$ в противном случае. Заметим, что ограничения задачи (32), которая эквивалентна задаче (29), будут выполнены для тройки $(\tilde{u}_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha, \tilde{\delta})$. Те ограничения, которые соответствуют единичным координатам вектора $\tilde{\delta}$, выполнены согласно (36). А ограничения, в которые входят нулевые координаты вектора $\tilde{\delta}$, по определению числа γ являются пассивными в том случае, если хотя бы одна координата вектора $\tilde{\delta}$ равна единице, что равносильно требованию $\alpha > 0$. Доказано, что $\varphi^* \leq \tilde{\varphi}_\alpha$.

Теперь докажем обратное неравенство $\varphi^* \geq \tilde{\varphi}_\alpha$. Условие $\alpha > 0$ обеспечивает, что хотя бы одна из координат вектора δ^* равна единице. Поэтому ограничения (33), которые содержат нулевые координаты вектора δ^*, являются пассивными, значит их можно исключить из системы ограничений. Следовательно, выполнение ограничений задачи (32) обеспечивает выполнение ограничений задачи (30) для тройки (u^*, φ^*, S^*).

Таким образом, доказано, что $\varphi^* = \tilde{\varphi}_\alpha$. При этом стратегия u^* и множество S^* являются обеспечивающими оптимальное значение критерия в задаче (7), что доказывает второй и третий пункт утверждения.

Рассмотрим случай $\alpha = 1$. Тогда в задаче (32) $\delta_l^* = 1, l = 1, \dots, L$, а в задаче (29) $\tilde{S}_\alpha = \{x^l \mid l = 1, \dots, L\}$. При подстановке найденных оптимальных значений δ^*, $\tilde{S}_\alpha$ в ограничения соответствующих задач, получаются задачи с одинаковыми ограничениями, а значит, их решения совпадают. При этом в силу условий следствия к теореме 1 множество U непусто и множество 0^+U состоит только из нулевого вектора, значит решение задачи существует и при $\alpha = 1$. Итак, утверждение теоремы доказано.■

Заметим, что задача (32) содержит большое число пассивных ограничений. Рассмотрим ограничения $\left(c_1^T - (v^{\,j})^T A_2\right)u + \delta_l\left((v^{\,j})^T \tilde{x}^l - \gamma\right) + \gamma \le \varphi$ при фиксированном j. Пусть h_j — квантиль уровня α распределения случайной величины $(v^{\,j})^T \tilde{X},\ j = 1, \dots, J$. В силу условия (34), ограничения, соответствующие величинам $(v^{\,j})^T \tilde{x}^l$, удовлетворяющим условию $(v^{\,j})^T \tilde{x}^l < h_j$, являются пассивными. Поэтому их можно исключить из системы ограничений задачи (32), тем самым значительно понизив размерность решаемой задачи.

Задача (32) по сути является детерминированным эквивалентом исходной задачи в виде смешанной задачи линейного программирования. Для её решения можно применять специальные методы линейного программирования, например метод Бендерса[13]. Также для решения данных задач существуют эффективные программные средства, среди которых LPSolve [14].

Результаты численного эксперимента

Продемонстрируем работоспособность предлагаемой методики нахождения решения задачи (12) на модельном примере.

Пусть наземный космический комплекс состоит из 4 отраслей производства. Заданы цены на производимую продукцию каждой отрасли: $\tilde{z}_1 = 15$; $\tilde{z}_2 = 20$; $\tilde{z}_3 = 25$; $\tilde{z}_4 = 30$. Минимально допустимые объёмы инвестирования установлены на уровнях: $\underline{u}_1 = 2{,}0$; $\underline{u}_2 = 1{,}5$; $\underline{u}_3 = 3{,}0$; $\underline{u}_4 = 3{,}3$. Максимальный объём инвестирования $\overline{u} = 100$. Максимальный объём дополнительного инвестирования устанавлен на уровне $\overline{w} = 80$. Известны объёмы производства последователя: $d_1 = 6$; $d_2 = 12$; $d_3 = 8$; $d_4 = 9$. Коэффициенты, связывающие объём производства с объёмом инвестиций: $s_1 = 0{,}5$; $s_2 = 0{,}8$; $s_3 = 0{,}6$; $s_4 = 0{,}4$; $t_1 = 0{,}4$; $t_2 = 0{,}6$; $t_3 = 0{,}5$; $t_4 = 0{,}3$. Доходность безриского финансового актива составляет $c = 0{,}1$.

Будем считать, что спрос на продукцию каждой из отраслей имеет дискретное распределение с тремя равновероятными реализациями: 10, 15, 20. Также предположим, что компоненты случайного вектора X независимы в совокупности. Таким образом, вектор случайных параметров имеет $3^4 = 81$ равновероятную реализацию.

Найдём решение задачи (12) для данного случая.

Заметим, что все условия теоремы 2 выполнены, значит решение задачи существует и может быть найдено путём решения смешанной задачи линейного программирования (32). Множество вершин G состоит из 81 элемента, поэтому данная задача содержит $81 \cdot 81 + 6 = 6567$ ограничений. При помощи описанной в статье процедуры число данных ограничений может быть уменьшено примерно в $\frac{1}{1-\alpha}$ раз. Полученная задача была успешно решена при помощи программного продукта LPSolve. Результаты вычисления для различных уровней надёжности α приведены в таблице.

Результаты вычислений. Таблица.

$\alpha = 0{,}8$	$\alpha = 0{,}9$	$\alpha = 0{,}95$	$\alpha = 1$
$\varphi_\alpha = -364{,}03$	$\varphi_\alpha = -295{,}39$	$\varphi_\alpha = -243{,}52$	$\varphi_\alpha = -122{,}03$
$u_{\alpha 1} = 15{,}73$	$u_{\alpha 1} = 8{,}00$	$u_{\alpha 1} = 17{,}73$	$u_{\alpha 1} = 8{,}00$
$u_{\alpha 2} = 1{,}50$	$u_{\alpha 2} = 3{,}75$	$u_{\alpha 2} = 3{,}75$	$u_{\alpha 2} = 1{,}50$
$u_{\alpha 3} = 11{,}67$	$u_{\alpha 3} = 11{,}67$	$u_{\alpha 3} = 3{,}33$	$u_{\alpha 3} = 3{,}33$
$u_{\alpha 4} = 3{,}50$	$u_{\alpha 4} = 3{,}50$	$u_{\alpha 4} = 3{,}50$	$u_{\alpha 4} = 3{,}50$

Из таблицы видно, что при уровне надёжности $\alpha = 1$ выбирается осторожная стратегия, учитывающая минимально возможный спрос на продукцию. Данная стратегия позволяет получить результат, гарантированный с вероятностью 1. При этом гарантированная прибыль (значение критерия с обратным знаком) отличается от гарантированной прибыли при $\alpha = 0{,}95$ примерно в два раза. Кроме того в случае $\alpha = 1$ не учитывается стохастическая природа задачи, потому что рассматривается только наихудшая реализация случайных параметров. В то же время при изменении α с 0,95 на 0,8 значение критерия уменьшается по модулю в 1,5 раза, а при изменении на 0,9 — лишь на 21%. При этом риски, связанные с принятием подобного решения, значительно увеличиваются. Таким образом, решение задачи при $\alpha = 0{,}95$ является более предпочтительным по сравнению с другими рассмотренными вариантами.

Заключение

В работе исследована задача распределения инвестиций в развитие отраслей наземного космического комплекса. Показано, что в частном случае задача может быть записана в виде двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием. На примере данной прикладной задачи продемонстрирован метод сведения двухэтапной задачи к одноэтапной задаче стохастического линейного программирования с квантильным критерием. Доказано, что полученная задача может быть сведена к смешанной задаче линейного программирования. Заметим, что при построении эквивалентной задачи не использовались свойства целевых функций и матриц ограничений задач первого и второго этапа. Незначительные ограничения, которые были наложены на параметры задачи, требовали существования решения задачи второго этапа для любой стратегии первого этапа и любой реализации вектора случайных параметров. По сути, данного условия достаточно для применения методики, описанной в данной работе. Конструктивное описание данного условия является предметом отдельного исследования.

Решён численный пример. Показано, что при значительном уменьшении уровня надёжности значение критерия изменяется незначительно. Поэтому в условиях повышенных требований к надёжности более предпочтительной является стратегия, обеспечивающая высокую надёжность принимаемого решения.

С вычислительной точки зрения представленная методика решения двухэтапных задач стохастического линейного программирования с квантильным критерием является достаточно трудоёмкой, так как даже в рассматриваемом случае небольшой размерности исходной задачи размерность эквивалентной задачи увеличивается на несколько порядков. В связи с этим актуальной является разработка специальных алгоритмов решения эквивалентной задачи, основанных на методах декомпозиции и учитывающих блочную структуру ограничений.

Библиографический список

1. *Kibzun A. I., Kan Y. S.* Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions. Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1996.

2. *Кибзун А. И., Кан Ю. С.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями. М.: Физматлит, 2009.

3. *Birge J., Louveaux F.* Introduction to Stochastic Programming. New York: Springer-Verlag, 1997.

4. *Dempe S.* Bilevel Programming — A Survey // Preprint TU Bergakademie Freiberg Nr. 2003-11, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2003.

5. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Двухэтапные задачи квантильного линейного программирования // Автоматика и телемеханика, 1995, №1, с.83-93.

6. *Наумов А.В.* Двухэтапная задача квантильной оптимизации бюджета госпиталя // Изв. РАН, Теория и системы управления, 1996, № 2, с. 87-90.

7. *Наумов А.В., Уланов С.В.* Учет риска в духэтапных задачах оптимального распределения ресурсов // Автоматика и Телемеханика, 2003, № 7, с. 109-116.

8. *Наумов А.В., Богданов А.Б.* Исследование двухэтапной задачи целочисленной квантильной оптимизации // Изв. РАН. Теория и Системы Управления, 2003, № 5, с. 62-69.

9. *Наумов А.В., Богданов А.Б.* Решение двухэтапной задачи логистики в квантильной постановке // Автоматика и Телемеханика, 2006, № 12, с. 36-42.

10. *Наумов А.В.* Двухэтапная задача квантильной оптимизации инвестиционного проекта. Известия РАН. Теория и системы управления. 2010, №2, с. 33-40.

11. *Кибзун А.И., Наумов А.В.* Гарантирующий алгоритм решения задачи квантильной оптимизации // Космические исследования, 1995, т. 33, № 2, с. 160-165.

12. *Наумов А.В., Иванов С.В.* Исследование задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Автоматика и телемеханика. 2011, № 2, с. 142-158.

13. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования, т. 2. М.: Мир, 1991.

14. http://lpsolve.sourceforge.net/5.5/.

Сведения об авторах

Наумов Андрей Викторович, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.ф.-м.н. МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: (499)158-41-13; e-mail: naumovav@mail.ru.

Иванов Сергей Валерьевич, студент Московского авиационного института (национального исследовательского университета). МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993; тел.: (499) 158-41-13; e-mail: sergeyivanov89@mail.ru.