УДК 30.19.21

Оценка влияния смежных составляющих спектра на резонансные колебания механических систем

Ю.Я. Бетковский, А.С. Сидоренко

Рассматриваются установившиеся вынужденные колебания линейной стационарной механической системы. Определяются условия, при выполнении которых, взаимным влиянием колебаний со смежными собственными частотами можно пренебречь и система в окрестности резонанса может рассматриваться как система с одной степенью свободы. Задача решается в предположении, что элементы матрицы демпфирования пропорциональны элементам матрицы квазиупругих коэффициентов или элементам инерционной матрицы. *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-08-01005).*

Представление механической систем в окрестности резонанса как системы с одной степенью свободы является традиционным приемом в теории колебаний. В частности, к этому сводится метод разложения по формам собственных колебаний. Для использования этого метода обычно вводятся предположения о пропорциональности диссипативного оператора квазиупругому или инерционному операторам [1, 2, 3].

В данной работе определяется величина частотного диапазона в окрестности резонанса, в пределах которого механическая система может рассматриваться как одностепенная, при условии, что динамические характеристики системы известны.

Установившиеся вынужденные колебания линейной системы вблизи положения равновесия под действием гармонических сил с частотой Ω, представленные в главных нормальных координатах описываются выражением:

$$w(P,t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j\, f_j(P)\cos(\Omega\tau-\psi_j)}{c_j\,\Omega^2\sqrt{(u_j^2-1)^2+(\gamma_j\, u_j)^2}}\,,\ \psi_j = arctg\frac{\gamma_j\, u_j}{u_j^2-1}\,. \qquad (1)$$

Здесь P – координаты произвольной точки системы; Q_j, - компоненты вектора обобщённых сил $\boldsymbol{Q} = (Q_1, Q_2, \ldots Q_n)$; ω_j и $f_j(P)$ - собственные значения и собственные векторы матрицы $(\boldsymbol{A} - \omega^2\boldsymbol{C})$; $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$, - матрицы обобщенных масс, и квазиупругих коэффициентов в произвольных обобщенных координатах; c_j - обобщенные массы в главных нормальных координатах; $\gamma_i = \delta_j/\pi$ – коэффициенты демпфирования главных колебаний; $u_j = \omega_j/\Omega$. При $\Omega = \omega_к$ имеет место резонанс на собственной частоте $\omega_к$. В этом случае соотношение (1) принимает вид:

$$w(P,t)=\frac{Q_k\cdot f_k(P)}{\gamma_k\cdot\omega_k^2\cdot c_k}\sin\omega_k\tau+\sum_{j\neq k}\frac{Q_j\cdot f_j(P)\cdot\cos(\omega_k\tau-\psi_j)}{c_j\cdot\omega_k^2\sqrt{(u_j^2-1)^2+(\gamma_j\cdot u_j)^2}},\quad \psi_k=\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

где $u_j=\omega_j/\omega_k$.

Преобразование выражения (2) с использованием равенств:

$$\frac{1}{\sqrt{(u_j^2-1)^2+(\gamma_j u_j)^2}}=\frac{1}{|u_j^2-1|\sqrt{1+\left(\frac{\gamma_j u_j}{u_j^2-1}\right)^2}}=\frac{1}{|u_j^2-1|\sqrt{1+tg^2\psi_j}}=\frac{\cos\psi_j}{|u_j^2-1|},$$

$$\cos(\omega_k\tau-\psi_j)\cos\psi_j=\cos(\omega_k\tau-2\psi_j)+\cos\omega_k\tau$$

приводит его к виду:

$$w(P,t)=\frac{Q_k f_k(P)}{\gamma_k\cdot\omega_k^2\ c_k}\sin\omega_k\tau+\frac{1}{2}\cos\omega_k\tau\cdot\sum_{j\neq k}\frac{Q_j\cdot f_j(P)}{c_j\cdot|\omega_j^2-\omega_k^2|}+\frac{1}{2}\sum_{j\neq k}\frac{Q_j\cdot f_j(P)}{c_j|\omega_j^2-\omega_k^2|}\cdot\cos|\omega_k\tau-2\psi_j| \tag{3}$$

В соотношении (3) первая сумма сдвинута относительно резонансной амплитуды на угол $\pi/2$ и потому оказывает незначительное влияние на величину перемещений при резонансе.

Гармоники, входящие во вторую сумму, сдвинуты по времени относительно основной гармоники на интервал $\Delta\tau_j=\frac{2}{\omega_k}\left(\psi_j-\frac{\pi}{4}\right)$ и достигают своего максимума разновременно. Наибольшее влияние на общее перемещение системы на резонансе оказывают те из них, что которые смещены относительно основной гармоники на фазовый угол ψ_j, близкий к величине $\pm\pi/4$. Для этих гармоник выполняются условия:

$$\frac{\pi}{4}-\alpha<|\psi_j|<\frac{\pi}{4}+\alpha, \tag{4}$$

где α малая величина,

или условия $t<|tg\psi_j|<\frac{1}{t}$, где $t=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}$.

Приближенное решение двойного неравенства (4) приводит к условию, которому должны удовлетворять колебания на частоте ω_j, чтобы оказывать заметное влияние на общую реакцию при резонансе на частоте ω_k.

$$\frac{\gamma_j t}{2}<|u_j-1|<\frac{\gamma_j}{2t}$$

Это условие необходимо дополнить выражением для частотного интервала, в котором $\omega_j\cong\omega_k$:

$$1-\frac{\gamma_j t}{2}<u_j<1+\frac{\gamma_j t}{2}.$$

На рис. 1 представлена зависимость отношения $\gamma u/(u^2 - 1)$ от параметра u, по которой можно оценить степень взаимного влияния близких гармоник.

Рис. 1

Таки[illegible] для того, чтобы гармоника ω_j нерезонирующего тона оказывала значимое влияние [illegible] амплитуду перемещений при резонансном возбуждении системы на частоте $\omega_к$, необходимо чтобы частота ω_j находилась в интервале $\Delta\omega_j$ (интервале влияния), определяемом по формуле:

$$\Delta\omega_j = |\omega_j - \ldots \quad (5)$$

Для преобладающег[illegible] числа практических задач интервал влияния, определяемый по формуле (5), невели[illegible] [illegible]ожить $\alpha = \pi/8$, что соответствует точкам резонансной кривой, по кото[illegible]пределяют логариф[illegible] декрем[illegible]аний δ_j, интервал влияния будет ограничен диапаз[illegible]ом частот $\Delta\omega_j$, который удо[illegible]яет услови[illegible] 3]

$$|\Delta\omega_j| < 1,\ldots \qquad (\sin 2\psi = \sqrt{2} \text{ при } 2\psi \cong \frac{\pi}{4})$$

Полагая, например, что параметр $\gamma = 0.03$, что является д[illegible]еличиной для механических систем [3], получим:

$$\varepsilon_1 = \frac{2tg\alpha}{1 + tg\alpha}$$

$$|\omega_j - \omega_к| \le 0,04\omega_к, \qquad \varepsilon_2 = \frac{2tg\alpha}{1 - tg\alpha} \quad (6)$$

т.е. значимое влияние на амплитуду вынужденных колебаний на резонансной частоте $\omega_к$ оказывают те нерезонирующие тона, частоты которых ω_j отличаются от резонансной частоты не более чем на 4%.

Формулы (5, 6) могут использоваться для предварительной оценки частотного диапазона $\Delta\omega_j$, в котором должны находиться нерезонирующие тона, чтобы соответствующие им колебания оказывали заметное влияние на амплитуду перемещения, определяемую основной резонирующей гармоникой с частотой $\omega_к$ Вне диапазона $\Delta\omega_j$ отношение амплитуд нерезонирующих и резонирующей гармоник Φ_j равно

$$\Phi_j = \frac{Q_j}{Q_k} \cdot \frac{f_j(P)}{f_k(P)} \cdot \frac{c_k}{c_j} \cdot \frac{\gamma_k \omega_k^2}{\left|\omega_j^2 - \omega_k^2\right|} < \lambda t_j \frac{Q_j}{Q_k} \cdot \frac{c_k}{c_j} \frac{\gamma_k}{\gamma_j} \cdot \frac{f_j(P)}{f_k(P)}, \quad (7)$$

где величина $\boldsymbol{\lambda} = \begin{cases} 1, & при \quad \boldsymbol{\omega}_j > \boldsymbol{\omega}_k \left(1 + \frac{\boldsymbol{\gamma}_j}{2t}\right) \\ 2, & при \quad 0 \le \boldsymbol{\omega}_j < \boldsymbol{\omega}_k \left(1 - \frac{\boldsymbol{\gamma}_j}{2t}\right) \end{cases}$

Действительно, при $u_j > 1 + \frac{\gamma_j}{2t}$, выполняется неравенство:

$$\frac{1}{u_j + 1} < \frac{1}{2 + \frac{\gamma_j}{2t}} < \frac{1}{2}.$$

Поскольку $\frac{1}{|u_j - 1|} < \frac{2t}{\gamma_j}$, то имеет место соотношение:

$$\frac{\omega_k^2}{|\omega_j^2 - \omega_k^2|} = \frac{1}{(u_j + 1)|u_j - 1|} < \frac{t}{\gamma_j}.$$

При $0 \le u_j < 1 - \frac{\gamma_j}{2t}$ справедливы следующие неравенства:

$$\frac{1}{u_j + 1} < 1, \qquad \frac{1}{|u_j - 1|} < \frac{2t}{\gamma_j}$$

и $\frac{\omega_k^2}{|\omega_j^2 - \omega_k^2|} < \frac{2t}{\gamma_j}$.

Из физического характера колебаний можно полагать, что отношения обобщенных масс c_k/c_j и обобщенных сил Q_j/Q_k будут близки к единице. Для свободной (не закрепленной) балки единичной длины и единичной погонной массы с постоянным поперечным сечением в качестве *m*-ой формы колебаний можно принять функцию $f_m(x) = cos\ [(m+1)\pi x]$. Тогда для всех значений m величина $c_m = 1$ и для любых j и k отношение $\frac{c_k}{c_j} = 1$. Аналогичные рассуждения справедливы и для обобщенных сил. Поскольку формы установившихся колебаний имеют одинаковые знаки с вызывающими их вынуждающими силами, то произведение $F(p) \cdot f_m(p) \ge 0$ (также как и величина $f_m^2(p)$). Коэффициенты демпфирования механических систем, соответствующие различным тонам колебаний, обычно различаются несущественно [3], поэтому можно принять, что $\frac{\gamma_k}{\gamma_j} \cong 1$.

Если принять изложенные допущения, то вне интервала влияния справедливо неравенство

$$\Phi_j < \lambda\, t_j \cdot \frac{f_j(P)}{f_k(P)} \qquad (8)$$

Так как собственные векторы $f_j(P)$ взаимно ортогональны, то они имеют различные знаки. Нерезонирующие гармоники достигают своего максимума разновременно и сдвинуты относительно главной гармоники на разные фазовые углы $\boldsymbol{\psi_j}$**,** поэтому от сумм реакций вне интервала влияния «кумулятивный эффект» не возникает. Суммарное влияние нерезонирущих гармоник будет выражаться в общем «зашумлении». Исключение составляют узловые точки формы резонирующей частоты ω_k, поскольку в этом случае величины двух сумм будут отличаться от нуля. Именно поэтому в районе узловых точек результаты измерения перемещений, скоростей или ускорений нестабильны по величине и часто недостоверны.

Из вышеизложенного следует, что вне «интервала влияния», определяемого формулой (5), система в окрестности своих собственных частот ведет себя как одностепенная. Перемещение такой системы $w(P,t)$ с достаточной степенью точности может быть определено по формуле:

$$w(P,t) = \frac{Q_\kappa \cdot f_\kappa(P)}{\gamma_\kappa \cdot \omega_\kappa^2 \cdot c_\kappa} \sin \omega_\kappa t \qquad (9)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1968.- 560 с.
2. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. - М.: Наука, 1964.- 437 с.
3. Микишев Г.Н., Рабинович Б.И. Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость. - М.: Машиностроение, 1971.- 564 с.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Бетковский Юрий Яковлевич, главный специалист ОАО ГосМКБ «Радуга» им. А.Я. Березняка.

Сидоренко Александр Сергеевич, профессор кафедры машиноведение и детали машин Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н., с.н.с.