УДК 539.3

# Матрица жесткости отсека анизотропной цилиндрической оболочки с произвольным поперечным сечением при изгибе, поперечном сдвиге и кручении

Квак Чжэ Хван, Юн Хе Сок

## Аннотация

Некоторые отсеки упругих крыльев большого удлинения и лопастей несущих винтов вертолётов изготавливаются в виде анизотропных оболочек, чтобы связать деформации изгиба, поперечного сдвига и кручения. При изменении изгибающих моментов в этом случае можно соответствующим образом изменять углы закручивания поперечных сечений и тем самым управлять распределением аэродинамической нагрузки по размаху.

В данной работе на основе теории тонкостенных балок получено приближенное аналитическое решение для расчета напряженного состояния и определены матрицы податливости и жесткости отсека анизотропной цилиндрической оболочки с произвольным симметричным однозамкнутым контуром поперечного сечения при изгибе, поперечном сдвиге и кручении. Результаты этого решения для коэффициентов матрицы податливости отсека оболочки сравниваются с численным решением по методу конечных элементов.

## Ключевые слова

цилиндрическая оболочка; анизотропная оболочка; оболочка с произвольным поперечным сечением; тонкостенная балка; метод отсеков; матрица податливости; матрица жесткости.

## 1. Формулировка задачи

Рассмотрим отсек анизотропной цилиндрической оболочки с симметричным относительно плоскости *Oxz* произвольным однозамкнутым поперечным сечением, рис. 1. Такую оболочку будем считать безмоментной. Она может быть подкреплена продольными элементами, работающими на растяжение-сжатие. На краях отсек имеет поперечные нервюры, которые считаются абсолютно жесткими в своей плоскости и абсолютно податливыми на изгиб.

Деформации срединной поверхности цилиндрической оболочки $\varepsilon_x$, $\varepsilon_s$, $\gamma_{xs}$ выражаются через её перемещения *u*, *v*, *w* как

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_s = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{R}, \quad \gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.1}$$

где $R(s)$ – радиус кривизны контура поперечного сечения.

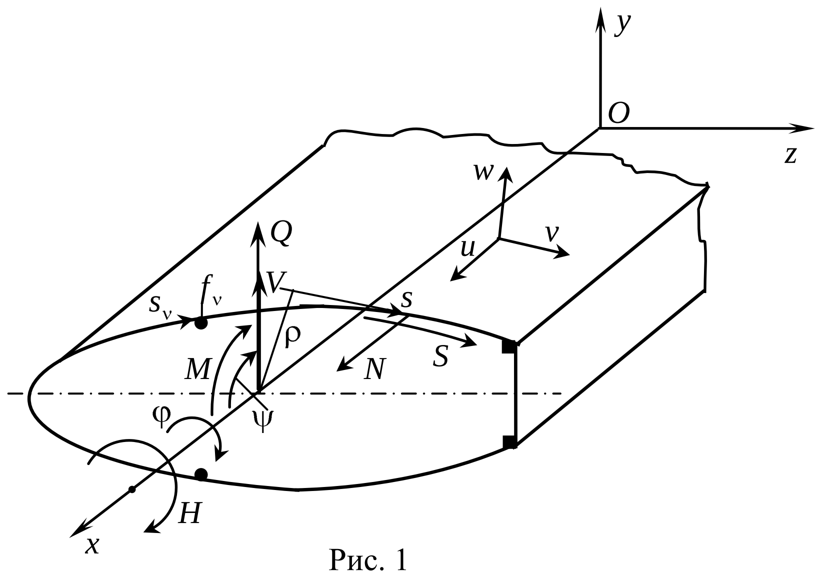


Рис. 1

Для безмоментной анизотропной оболочки напряжения $\sigma_x$, $\sigma_s$, $\tau_{xs}$ и деформации связаны соотношениями закона Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_x h = N_x &= B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_s + B_{13}\gamma_{xs}, \\ \sigma_s h = N_s &= B_{21}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_s + B_{23}\gamma_{xs}, \\ \tau_{xs} h = N_{xs} &= B_{31}\varepsilon_x + B_{32}\varepsilon_s + B_{33}\gamma_{xs}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $h$ и $B_{ij} = B_{ji}$ – суммарная толщина и коэффициенты упругости слоистой анизотропной оболочки [1-3]. Здесь будем считать, что они зависят только от координаты *s*.

Коэффициенты $B_{11}(s)$ содержат члены $Ef_\nu\delta(s - s_\nu)$, учитывающие продольные подкрепляющие элементы, проходящие вдоль образующих $s = s_\nu$; $E$, $f_\nu$ – модуль упругости и площадь поперечного сечения ν-го стрингера; $\delta(\ldots)$ – дельта функция.

Будем использовать одно из следующих допущений: 1) $\varepsilon_s = 0$ или 2) $N_s = 0$. Первое из них представляет условие нерастяжимости контура, а второе следует из уравнения равновесия безмоментной оболочки в направлении нормали $N_s / R = p$ при $R \neq \infty$ и $p \approx 0$, где $p$ – нормальная нагрузка.

При этих допущениях уравнения (1.2) записываются в виде

$$N_x = N = B\varepsilon_x + C\gamma_{xs},$$
$$N_{xs} = S = C\varepsilon_x + D\gamma_{xs}, \qquad (1.3)$$

где

$$B = B_{11}, \quad C = B_{13}, \quad D = B_{33}, \quad w = -R\frac{\partial v}{\partial s} \quad \text{при} \quad \varepsilon_s = 0; \qquad (1.4)$$

$$B = B_{11} - \frac{B_{12}B_{21}}{B_{22}}, \quad C = B_{13} - \frac{B_{12}B_{23}}{B_{22}}, \quad D = B_{33} - \frac{B_{23}B_{32}}{B_{22}},$$
$$w = -R\left[\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{B_{12}}{B_{22}}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{B_{23}}{B_{22}}\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] \quad \text{при} \quad N_s = 0. \qquad (1.5)$$

Далее будем считать: $B(x,y) = B(x,-y)$, $C(x,y) = -C(x,-y)$, $D(x,y) = D(x,-y)$, где $x = x(s)$, $y = y(s)$.

## 2. Определение усилий в оболочке

При изгибе-сдвиге отсека в плоскости $Oxy$ и кручении относительно продольной оси $x$ будем использовать гипотезу «балочной теории» тонкостенных конструкций, в соответствии с которой продольные деформации $\varepsilon_x$ распределяются в поперечном сечении оболочки по закону плоскости, что соответствует свободной депланации поперечных сечений [2-4]. В рассматриваемом случае, учитывая, что деформированное состояние оболочки будет антисимметричным относительно плоскости $xz$, эта гипотеза записывается в виде

$$\varepsilon_x = b(x)y, \qquad (2.1)$$

где $b(x)$ – неизвестная функция.

Введем в поперечном сечении изгибающий момент $M$, перерезывающую силу $Q$ и крутящий момент $H$, как равнодействующие погонных усилий $N(x,s)$ и $S(x,s)$, рис. 1:

$$M = -\oint Nyds, \quad Q = \oint S\frac{dy}{ds}ds = -\oint\frac{\partial S}{\partial s}yds, \quad H = \oint S\rho ds, \qquad (2.2)$$

где $\rho(s)$ – расстояние от оси $x$ до касательной к контуру в точке $s$.

Из уравнений (1.3) следует:

$$T = N - \frac{C}{D}S = B^*\varepsilon_x; \qquad B^* = B - \frac{C^2}{D}. \qquad (2.3)$$

Используя уравнения равновесия безмоментной оболочки

$$\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \qquad (2.4)$$

и соотношение (2.1), с учетом (2.3) получим

$$\frac{\partial S}{\partial s} = -b'(x)B^* y\,. \tag{2.5}$$

Интегрируя это уравнение по *s* учитывая выражения (2.2) для *Q* и *H*, найдем

$$S = Q\Phi(s) + \frac{H}{\Omega_1}\,, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{gathered} \Phi(s) = -\frac{1}{EI}\left[\int_0^s B^* y ds - \frac{1}{\Omega_1}\oint\left(\int_0^s B^* y ds\right)\rho ds\right], \\ EI = \oint B^* y^2 ds, \quad \Omega_1 = \oint \rho ds. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Из выражения (2.3) с учётом (2.1) получим *N* в зависимости от *b*(*x*) и *S* и затем из выражения (2.2) для *M* найдем

$$b(x) = -\frac{1}{EI}\left(M + d_0 Q + \frac{d_1}{\Omega_1} H\right); \tag{2.8}$$

$$d_0 = \oint \frac{C}{D}\Phi y ds\,, \quad d_1 = \oint \frac{C}{D} y ds\,. \tag{2.9}$$

Усилие *T* на основании (2.3), (2.1) и (2.8) записывается в виде

$$T = -\frac{B^* y}{EI}\left(M + d_0 Q + \frac{d_1}{\Omega_1} H\right). \tag{2.10}$$

## 3. Матрица жесткости отсека

Обобщенным силам, представляющим внутренние усилия *M, Q, H*, соответствуют энергетически эквивалентные обобщенные перемещения: $\psi$ – угол поворота; *V*– поперечное перемещение и $\varphi$ – угол закручивания поперечного сечения [4]. В качестве обобщенных координат свободного *k*-го отсека при *k* = 1 возьмём значения обобщенных перемещений на его краях при *x* = 0 и $x = l_1$: $\psi_0$, $V_0$, $\varphi_0$, $\psi_1$, $V_1$, $\varphi_1$. Они показаны на рис. 2 вместе с соответствующими обобщенными силами: $-M_0$, $-Q_0$, $-H_0$, $M_1$, $Q_1$, $H_1$. Задача заключается в том, чтобы записать потенциальную энергию деформации отсека при изгибе, сдвиге и кручении в обобщенных координатах.

Потенциальная энергия рассматриваемого первого ($k = 1$) отсека анизотропной цилиндрической оболочки при соотношениях закона Гука (1.3) и обозначениях (2.3) записывается в виде

$$\varPi_1 = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}\oint\left[\frac{T^2}{B^*} + \frac{S^2}{D}\right] ds dx. \tag{3.1}$$

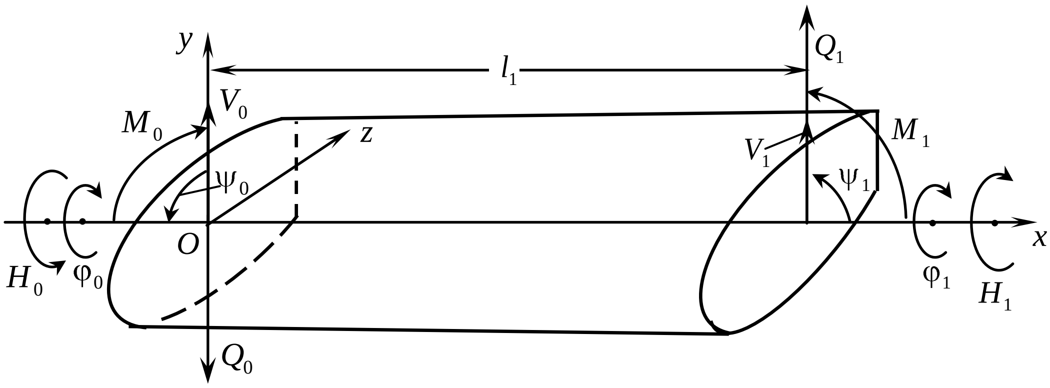


Рис. 2

Подставляя сюда выражения (2.6), (2.10), получим

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\int_0^{l_1}[\alpha_{11}M^2 + 2\alpha_{12}MQ + 2\alpha_{13}MH + \alpha_{22}Q^2 + 2\alpha_{23}QH + \alpha_{33}H^2]dx, \tag{3.2}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha_{11} = \frac{1}{EI}, \quad \alpha_{12} = \frac{d_0}{EI}, \quad \alpha_{13} = \frac{1}{EI}\frac{d_1}{\Omega_1}, \quad \alpha_{22} = \frac{d_0^2}{EI} + \oint\frac{\Phi^2}{D}ds, \\ \alpha_{23} = \frac{1}{\Omega_1}\left(\frac{d_0 d_1}{EI} + \oint\frac{\Phi}{D}ds\right), \quad \alpha_{33} = \frac{1}{\Omega_1^2}\left(\frac{d_1^2}{EI} + \oint\frac{ds}{D}\right); \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Чтобы записать потенциальную энергию (3.2) в обобщенных координатах, можно воспользоваться принципом Кастильяно. Для этого надо удовлетворить уравнения равновесия отсеченной части отсека длиной $l_1 - x$

$$M = M_1 + Q_1(l_1 - x), \qquad Q = Q_1, \qquad H = H_1 \tag{3.4}$$

и отсека в целом (рис. 2)

$$M_0 = M_1 + Q_1 l_1, \qquad Q_0 = Q_1, \qquad H_0 = H_1. \tag{3.5}$$

Тогда (3.2) записывается через $M_1$, $Q_1$, $H_1$ в матричном виде

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\mathbf{Y}_1^T\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{Y}_1, \qquad \mathbf{Y}_1^T = [M_1\, Q_1\, H_1]; \tag{3.6}$$

$\mathbf{\Gamma}_1 = [\gamma_{ij}]_{3\times3}$ – матрица податливости отсека, неподвижно закрепленного на краю $x = 0$;

$$\begin{gathered}\gamma_{11} = \alpha_{11}l_1, \quad \gamma_{12} = \alpha_{11}\frac{l_1^2}{2} + \alpha_{12}l_1, \quad \gamma_{22} = \alpha_{11}\frac{l_1^3}{3} + \alpha_{12}l_1^2 + \alpha_{22}l_1, \\ \gamma_{13} = \alpha_{13}l_1, \quad \gamma_{23} = \alpha_{13}\frac{l_1^2}{2} + \alpha_{23}l_1, \quad \gamma_{33} = \alpha_{33}l_1; \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

Вариация работы неизвестных реакций (обобщенных сил на краях отсека) с учетом (3.5) записывается как

$$\delta\overline{A}_1 = \delta M_1(\psi_1 - \psi_0) + \delta Q_1(V_1 - V_0 - l_1\psi_0) + \delta H_1(\varphi_1 - \varphi_0)$$

или в матричном виде

$$\delta\overline{A}_1 = \delta\mathbf{Y}_1^T \mathbf{B}_1 \mathbf{q}_1;$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -l_1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1^T = [\psi_0\, V_0\, \varphi_0\, \psi_1\, V_1\, \varphi_1]. \tag{3.8}$$

На основании принципа Кастильяно $\delta\Pi - \delta\overline{A} = 0$ с учетом (3.6), (3.8) получим $\delta\mathbf{Y}_1^T(\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{Y}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{q}_1) = 0$. Так как вариации компонент вектора $\mathbf{Y}_1$ произвольны и независимы, то отсюда следует:

$$\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{Y}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{\Gamma}_1^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{q}_1. \tag{3.9}$$

С учетом (3.9) выражение (3.6) записывается в виде

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}\mathbf{q}_1^T\mathbf{K}_1\mathbf{q}_1; \qquad \mathbf{K}_1 = \mathbf{B}_1^T\mathbf{\Gamma}_1\mathbf{B}_1. \tag{3.10}$$

Здесь $\mathbf{K}_1 = [k_{ij}]_{6\times 6}$ − симметричная матрица жесткости свободного первого отсека для вектора обобщенных координат $\mathbf{q}_1$. Для $k$-го отсека надо заменить индексы: $1 \to k$, $0 \to k-1$.

## 4. Пример расчета

В качестве примера рассмотрим четырехпоясный прямоугольный кессон, (рис. 3). Верхняя и нижняя панели кессона являются анизотропными с углом анизотропии $\theta$, где $\theta$ – угол между направлениями *x* и 1; 1, 2 – направления осей ортотропии. Боковые стенки являются изотропными с модулём упругости *E* и коэффициентом Пуассона $\mu$. Модуль упругости поясов также равен *E*.

Примем следующие геометрические параметры отсека и характеристики материалов: $a = 0.5$ м, $c = 0.125$ м, $l_1 = 4$ м, $h = 0.01$ м, $h_1 = h_2 = 0.005$ м, $f_1 = f_2 = 0.000625$ м$^2$; для боковых стенок − $E = 7\cdot 10^{10}$ Па, $\mu = 0.3$; для осей ортотропии панелей – $E_1 = 6.3\cdot 10^{10}$ Па, $E_2 = 1{,}5\cdot 10^{10}$ Па, $G_{12} = 0.47\cdot 10^{10}$ Па, $\mu_{12} = 0.0714$, $\mu_{21} = 0.3$.

Наряду с расчетами по «балочной теории» со свободной депланацией поперечных сечений для сравнения выполнены расчеты по МКЭ с достаточно мелкой сеткой при условии, что торцы отсека являются абсолютно жесткими (их депланация равна нулю).

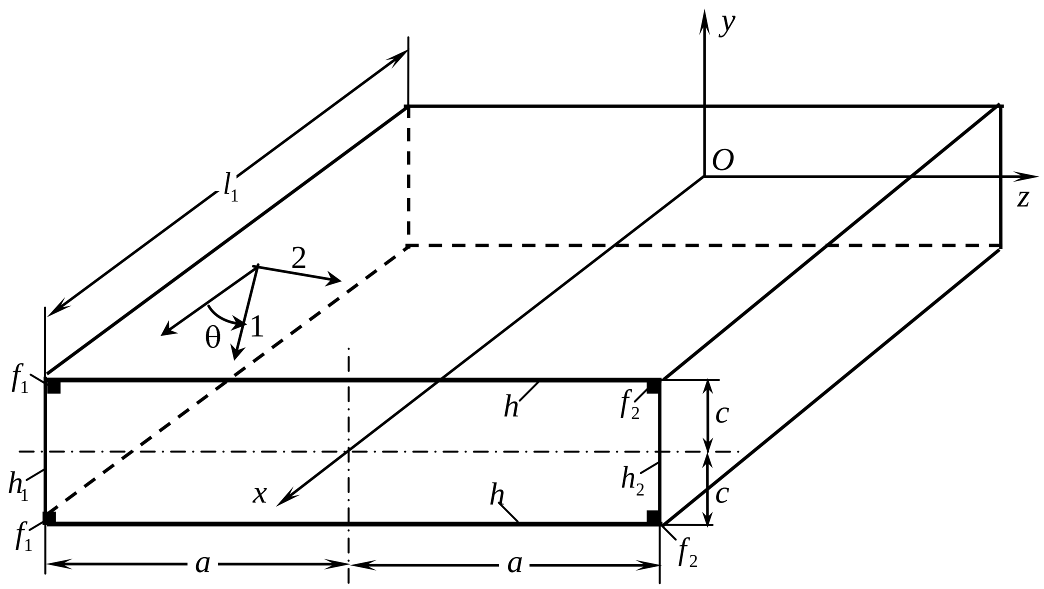


Рис. 3

Ниже приведены элементы симметричных матриц $\mathbf{\Gamma}_1 \cdot 10^7$, т.е. $\bar{\gamma}_{ij} = 10^7 \gamma_{ij}$ при $i, j$ = 1, 2, 3, для случая нерастяжимых в поперечном направлении панелей ($\varepsilon_s \to \varepsilon_z = 0$) при некоторых углах анизотропии $\theta$ (рядом в скобках для сравнения приведены значения $\bar{\gamma}_{ij}$ полученные по МКЭ):

1) $\theta = 0^0$ – $\bar{\gamma}_{11} = 1.683$ (1.782), $\bar{\gamma}_{12} = 3.366$ (3.563), $\bar{\gamma}_{13} = 0$ (0), $\bar{\gamma}_{22} = 11.20$ (11.14), $\bar{\gamma}_{23} = 0$ (0), $\bar{\gamma}_{33} = 7.403$ (5.590);

2) $\theta = \pm 20^0$ – $\bar{\gamma}_{11} = 2.860$ (2.781), $\bar{\gamma}_{12} = 5.721$ (5.563), $\bar{\gamma}_{13} = \pm 2.029$ (±1.604), $\bar{\gamma}_{22} = 16.43$ (16.02), $\bar{\gamma}_{23} = \pm 4.059$ (±3.202), $\bar{\gamma}_{33} = 5.221$ (4.454);

3) $\theta = \pm 30^0$ – $\bar{\gamma}_{11} = 3.574$ (3.536), $\bar{\gamma}_{12} = 7.148$ (7.072), $\bar{\gamma}_{13} = \pm 2.013$ (±1.681), $\bar{\gamma}_{22} = 19.99$ (19.85), $\bar{\gamma}_{23} = \pm 4.026$ (±3.362), $\bar{\gamma}_{33} = 3.951$ (3.655).

Аналогичные результаты получены по «балочной теории» для случая, когда для панелей вместо $\varepsilon_s \to \varepsilon_z = 0$ используется допущение $N_s \to N_z = 0$:

1) $\theta = 0^0$ – $\bar{\gamma}_{11} = 1.714$, $\bar{\gamma}_{12} = 3.429$, $\bar{\gamma}_{13} = 0$, $\bar{\gamma}_{22} = 11.35$, $\bar{\gamma}_{23} = 0$, $\bar{\gamma}_{33} = 7.403$;

2) $\theta = \pm 20^0$ – $\bar{\gamma}_{11} = 3.135$, $\bar{\gamma}_{12} = 6.269$, $\bar{\gamma}_{13} = \pm 2.105$, $\bar{\gamma}_{22} = 17.86$, $\bar{\gamma}_{23} = \pm 4.210$, $\bar{\gamma}_{33} = 5.242$;

3) $\theta = \pm 30^0$ – $\bar{\gamma}_{11} = 4.103$, $\bar{\gamma}_{12} = 8.206$, $\bar{\gamma}_{13} = \pm 1.928$, $\bar{\gamma}_{22} = 22.80$, $\bar{\gamma}_{23} = \pm 3.857$, $\bar{\gamma}_{33} = 3.964$.

Результаты расчета по «балочной теории» удовлетворительно согласуются с результатами расчета по МКЭ. Некоторые различия обусловлены, по-видимому, не только используемой гипотезой, но и тем, что в балочной модели все поперечные сечения могут свободно депланировать, а в принятой здесь КЭ-модели торцевые сечения могут только перемещаться и поворачиваться, оставаясь плоскими.

## 5. Заключение

Получено аналитическое решение задачи для расчета напряженного состояния анизотропной цилиндрической оболочки с произвольным симметричным однозамкнутым контуром поперечного сечения при изгибе, поперечном сдвиге и кручении на основе гипотезы «балочной теории» о плоском распределении в поперечных сечениях продольных деформаций. Это решение используется для определения матриц податливости и жесткости отсека такой оболочки при изгибе, поперечном сдвиге и кручении.

За счет угла анизотропии (углов укладки армирующих волокон композитной оболочки), как показывают расчеты можно управлять в определенных пределах углом закручивания отсека при его изгибе и поперечном сдвиге.

Полученные матрицы жесткости отсеков анизотропных оболочек (как укрупненных конечных элементов) могут быть использованы при составлении уравнений аэроупругости крыльев большого удлинения и лопастей несущих винтов вертолётов. Особенно эффективно с точки зрения аэроупругости использование таких отсеков в корневых частях крыльев и бесшарнирных лопастей, где изгибающие моменты имеют максимальные значения.

## Библиографический список

1. Строительная механика летательных аппаратов / И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев и др. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.

2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

3. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика упругих управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007. – 328 с.

4. Шклярчук Ф.Н. Динамика конструкций летательных аппаратов. – М.: МАИ, 1983. – 80 с.

**Сведения об авторах**

Квак Чже Хван, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета).

125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., 4. т. +7-929-567-37-74; e-mail: kjhno7@naver.com.

Юн Хе Сок, аспирант Московского авиационного института (государственного технического университета).

125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., 4. т. +7-929-677-10-85; e-mail: bkluvhs@naver.com.