

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТАЛОСТНОЙ ДОЛГОВЕЧНОСТИ ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

А.А.Афанасьев, Кьи Со

В работе на основе гипотезы спектрального суммирования повреждений исследуется влияние конструктивных параметров на усталостную долговечность перфорированных панелей, находящихся под действием равномерно распределенного стационарного случайного давления. При этом используются результаты по расчету макромодулей и коэффициентов концентрации силовых факторов изгибаемых и растягиваемых перфорированных пластин.

В работе описана процедура расчета напряженного состояния густо перфорированных цилиндрических панелей при действии стационарного случайного нормального давления. В работах Болотина В. В. [1] показано влияние случайных нагрузок действующих на пластинки и оболочки вращения. Процесс низкочастотных колебаний густо перфорированных оболочек предполагается изучить исследуя колебания сплошной, в общем случае анизотропной оболочки, жёсткостные характеристики которой равны соответствующим характеристикам перфорированной оболочки.

1. Исследование напряженного состояния перфорированных цилиндрических панелей

Рассматриваются соотношения кинематическими и силовыми факторами в технической теории анизотропных цилиндрических оболочек. Пусть u, v, w — компоненты вектора перемещения точек срединной поверхности оболочки в системе координат x, y, z (рис.1)

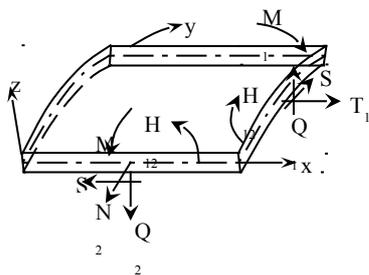


Рис.1. Силовые факторы в срединной поверхности оболочки в системе координат x, y, z

Тогда деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, w_{12}$ и κ_1, κ_2, τ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, & w_{12} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \kappa_1 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_2 &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \tau &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (1)$$

Связь усилий T_1, T_2, S в срединной поверхности и моментов M_1, M_2, H_{12} с деформациями и кривизнами устанавливается интегрированием законов Гука по толщине оболочки с использованием гипотез Кирхгофа-Лява

$$\begin{aligned}
 T_1 &= h(B_{11}\varepsilon_1 + B_{12}\varepsilon_2 + B_{16}\omega_{12}); \\
 T_2 &= h(B_{12}\varepsilon_1 + B_{22}\varepsilon_2 + B_{26}\omega_{12}); \\
 S &= h(B_{16}\varepsilon_1 + B_{26}\varepsilon_2 + B_{66}\omega_{12}); \\
 M_1 &= D_{11}\kappa_1 + D_{12}\kappa_2 + D_{16}\tau; \\
 M_2 &= D_{12}\kappa_1 + D_{22}\kappa_2 + D_{26}\tau; \\
 H_{12} &= D_{16}\kappa_1 + D_{26}\kappa_2 + D_{66}\tau.
 \end{aligned} \tag{2}$$

где h — толщина оболочки;

B_{ij}, D_{ij} — упругие постоянные анизотропии.

Энергия упругой деформации Π и кинетическая энергия T (без учета инерции вращения) имеют вид

$$\begin{aligned}
 \Pi &= \frac{1}{2} \iint_F [T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + S\omega_{12} + M_1\kappa_1 + M_2\kappa_2 + H_{12}\tau] dx dy; \\
 T &= \frac{\rho h}{2} \iint_F \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{3}$$

где ρ — плотность материала оболочки;

F — площадь срединной поверхности.

2. Уравнения колебаний оболочки

Согласно принципу Остроградского-Гамильтона [1,5], из различных движений, переводящих систему из начального состояния в момент времени t_0 в конечное в момент времени t_1 , реализуется движение, удовлетворяющее уравнению

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - \Pi + A_p) dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A_d dt = 0. \tag{4}$$

где A_p — работа консервативных внешних сил;

A_d — работа консервативных сил на вариациях и перемещений системы.

Рассмотрим движение панели под действием нормального давления

$$p(t) = p \cos \omega t \tag{5}$$

Демпфирующие силы считаем направленными по нормали к срединной поверхности

и линейно зависящими от $\frac{\partial w}{\partial t}$.

Тогда

$$A_p = \iint_F p w dx dy, \quad \delta A_d = \iint_F \frac{\partial w}{\partial t} \delta w dx dy. \quad (6)$$

Имея в виду исследование колебаний, разыскиваем перемещения в виде

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= u_1(x, y) \cos \omega t + u_2(x, y) \sin \omega t; \\ v(x, y, t) &= v_1(x, y) \cos \omega t + v_2(x, y) \sin \omega t; \\ w(x, y, t) &= w_1(x, y) \cos \omega t + w_2(x, y) \sin \omega t; \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (4) и интегрируя в пределах периода $2\pi/\omega$, получаем

$$\begin{aligned} &\delta \{ \omega^2 [T(u_1, v_1, w_1) + T(u_2, v_2, w_2)] - [\Pi(u_1, v_1, w_1) + \Pi(u_2, v_2, w_2)] + \\ &+ P \iint_F w_1 dx dy \} - \lambda \omega \iint_F (w_2 \delta w_1 - w_1 \delta w_2) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $f_i^{(1)}, f_i^2 (i = 1, 2, \dots, n)$ — обобщенные координаты дискретных систем, аппроксимирующих поля перемещений u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} T(u_k, v_k, w_k) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} f_i^{(k)} f_j^{(k)} \\ \Pi(u_k, v_k, w_k) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} f_i^{(k)} f_j^{(k)} \quad (k = 1, 2) \\ P \iint_F w_1 dx dy &= \sum_{j=1}^n p_j f_j^{(1)}; \end{aligned}$$

$$\delta \left\{ \omega^2 \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} f_i^{(1)} f_j^{(1)} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} f_i^{(2)} f_j^{(2)} \right] - \left[\sum_{i,j=1}^n c_{ij} f_i^{(1)} f_j^{(1)} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} f_i^{(2)} f_j^{(2)} \right] + p_1 f_1^{(1)} \right\} - \lambda \omega (w_2 \delta w_1 - w_1 \delta w_2) = 0 \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8) и учитывая произвольность вариаций обобщенных координат, получаем уравнения вынужденных колебаний пластины

$$\begin{aligned} (C - \omega^2 A)F_1 + \omega B F_2 &= Q, \\ -\omega B F_1 + (C - \omega^2 A)F_2 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$C = \|c_{ij}\|_1^n, \quad A = \|a_{ij}\|_1^n, \quad B = \|B_{ij}\|_1^n,$$

$$F_1 = (f_i^{(1)})_1^n, \quad F_2 = (f_i^{(2)})_1^n, \quad Q = (p_i)_1^n,$$

где C, A, B — матрицы жесткости, масс и демпфирования соответственно;

F_1 и F_2 — векторы обобщенных координат и сил.

Элементы матрицы B вычисляются по формуле

$$B_{ij} = \frac{\lambda}{\rho h} a_{ij} \quad (11)$$

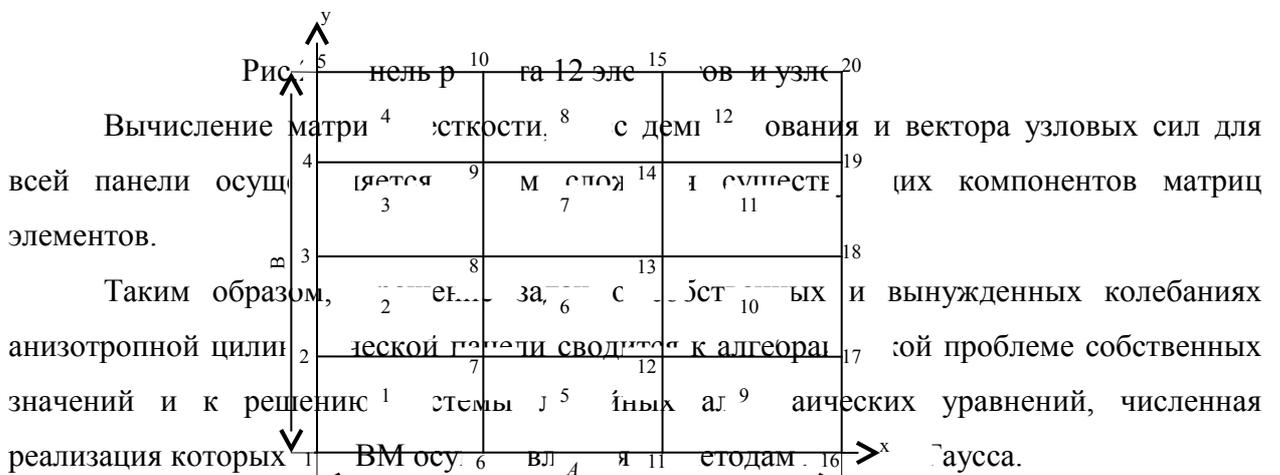
Если оба индекса i, j соответствуют перемещению W и полагаются

$$B_{ij} = 0 \quad (12)$$

Полагая в (10) в противном случае $B = 0, Q = 0$. Получаем систему уравнений для нахождения частот Ω и форм F собственных колебаний пластины

$$(C - \omega^2 A)F = 0 \quad (13)$$

Вычисление матриц жесткости, масс демпфирования и вектора узловых сил для элемента осуществляется по известной схеме метода конечных элементов [3] на ЭВМ. Нумерация элементов и узлов приведена на рис.2.



3. Определение спектральных плотностей напряжений в панели [6,7,8]

Пусть перфорированная панель подвержена действию равномерно распределенного стационарного случайного давления $P(t)$ со спектральной плотностью $S_p(\omega)$.

Плотность $f(P)$ распределения амплитуд P давления подчиняется закону Рэлея

$$f(P) = \frac{P}{D} e^{-\frac{P^2}{2D}}, \quad D = \int_{\omega} S_p(\omega) d\omega, \quad (15)$$

где D — дисперсия.

Требуется определить спектральные плотности $S_{\sigma_x}(\omega), S_{\sigma_y}(\omega), S_{\tau_{xy}}(\omega)$ напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ в панели (в дальнейшем будем их обозначать символом $S_{\sigma}(\omega)$).

4. Расчет усталостной долговечности перфорированных пластин и цилиндрических панелей

Предполагается разработать алгоритм расчета усталостной долговечности перфорированных пластин и цилиндрических панелей, находящихся под действием стационарного случайного давления, основанный на допущении о том, что перфорированная оболочка исчерпывает свой ресурс, если в какой-либо ее точке начинается процесс разрушения.

Гипотеза спектрального суммирования, предложенная В.Л. Райхером в работе [4], позволяет сформулировать феноменологическую инженерную теорию расчета долговечности, использующую связь между статистическими характеристиками нагрузок и характеристиками выносливости образца в виде кривых Велера.

Примем, что образец подвержен действию стационарного нормального случайного процесса нагружения со спектральной плотностью амплитуд напряжений $S_{\sigma}(\omega)$, представленной на рис.3.

Плотность $f(\sigma)$ распределения амплитуд напряжений σ в образце подчиняется закону Рэлея

$$f(\sigma) = \frac{\sigma}{D} e^{-\frac{\sigma^2}{2D}}, \quad D = \int_{\omega} S_{\sigma}(\omega) d\omega \quad (16)$$

где D — дисперсия.

Примем для образца единую, не зависящую от частоты приложения нагрузки, кривую зависимости числа циклов до разрушения N от амплитуды σ гармонического напряжения в виде

$$N\sigma^m = A \quad (17)$$

где m и A — параметры, определяемые экспериментально.

В качестве примера на рис.4. приведена кривая Велера для нормализованной при 900 С стали.

Согласно гипотезе спектрального суммирования, усталостная долговечность определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi A}{L(m) \left[\int_{\omega} S_{\sigma}(\omega) \omega^{2/m} d\omega \right]^{m/2}} \quad (18)$$

$$L(m) = 2^{m/2} \Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)$$

где $\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)$ — гамма-функция.

График функции $L(m)$ приведен на рис. 5.

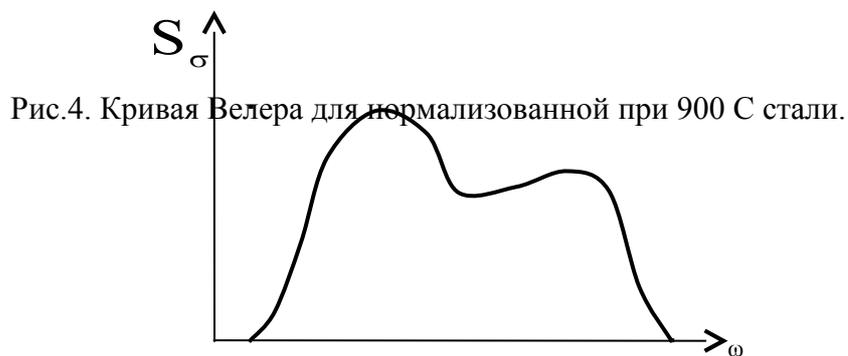
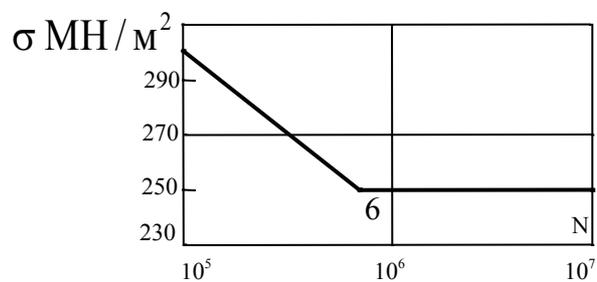
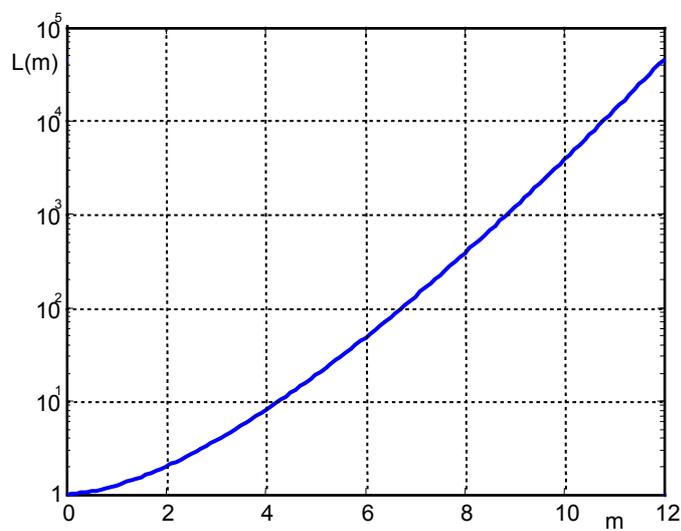


Рис.4. Кривая Велера для нормализованной при 900 С стали.

Рис.3. Спектральная плотность амплитуд напряжений



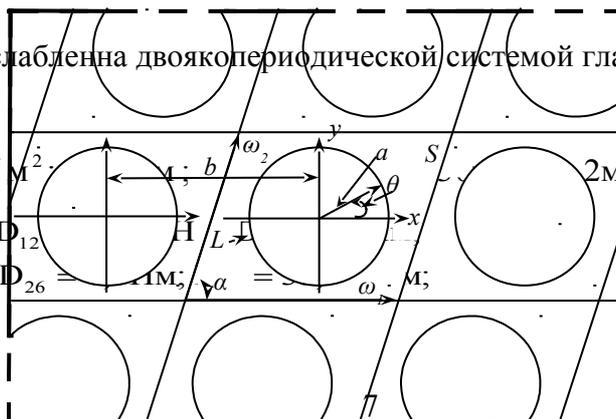
Программу
перфорированных
метода конечных
напряженных сос
действием равн
изменяющегося в
под действием ста
Рассмотрим
двоякопериодическую систему круговых отверстий (см. рис. 6).



й долговечности
использованием
ний, прогибов,
аходящихся под
гармонически
эй, находящихся
бленную

Рис.6. Пластина ослаблена двоякопериодической системой гладких криволинейных отверстий

$E = 1.962 \times 10^{11} \text{ Н/м}^2$;
 $D_{11} = 77,423 \text{ Нм}$; $D_{12} = 0$;
 $D_{22} = 77,423 \text{ Нм}$; $D_{26} = 0$



$$B_{11} = 11,828 \times 10^{10} \text{ Н / м}^2; B_{12} = 2,8333 \times 10^{10} \text{ Н / м}^2; B_{16} = 0,0 \text{ Н / м}^2;$$

$$B_{22} = 11,719 \times 10^{10} \text{ Н / м}^2; B_{26} = 0,0 \text{ Н / м}^2; B_{66} = 2,7392 \times 10^{10} \text{ Н / м}^2;$$

$$A = 0,9 \text{ м}; B = 1,2 \text{ м}; \rho = 0,7850 \times 10^4 \text{ кг / м}^3;$$

Для пластинки $R = 0.1000\text{E}+12$ м и цилиндрической оболочки $R = 0.2347$ м .

В таблице.(1,2) даны расчетные долговечности в узлах равномерной сетки 7×9, полученные с учетом концентрации напряжений на отверстиях. При этом используются результаты по расчету коэффициентов концентрации силовых факторов изгибаемых и растягиваемых перфорированных пластин.

Таблица.1.

Расчетные долговечности в узлах равномерной сетки пластинки

| час |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1,53E+04 | 8,32E+06 | 1,05E+04 | 1,28E+08 | 1,27E+06 | 1,99E+08 | 6,81E+04 |
| 4,07E+08 | 6,98E+06 | 3,97E+05 | 5,12E+05 | 2,23E+05 | 4,64E+07 | 5,64E+07 |
| 1,53E+07 | 4,82E+04 | 1,12E+09 | 1,11E+04 | 1,51E+04 | 2,52E+05 | 3,00E+07 |
| 1,67E+09 | 2,04E+04 | 3,73E+03 | 9,36E+03 | 3,23E+05 | 1,20E+07 | 1,29E+08 |
| 2,58E+07 | 1,05E+03 | 2,03E+04 | 2,40E+02 | 1,05E+06 | 2,17E+08 | 1,16E+06 |
| 1,92E+08 | 2,81E+04 | 4,65E+02 | 2,72E+03 | 1,16E+05 | 6,89E+06 | 9,07E+07 |
| 4,25E+05 | 3,97E+04 | 9,11E+06 | 1,85E+02 | 2,91E+00 | 4,29E+03 | 8,61E+04 |
| 1,89E+09 | 9,06E+05 | 8,36E+03 | 1,13E+05 | 2,35E+05 | 5,68E+07 | 1,04E+08 |
| 2,00E+08 | 1,41E+10 | 1,63E+05 | 6,36E+09 | 8,72E+08 | 7,16E+11 | 4,18E+08 |

Таблица.2.

Расчетные долговечности в узлах равномерной сетки оболочки

| час |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 7,58E+09 | 1,59E+13 | 5,23E+08 | 2,08E+12 | 1,51E+09 | 2,84E+11 | 5,11E+07 |
| 7,10E+11 | 1,53E+12 | 3,11E+10 | 4,99E+07 | 1,15E+08 | 4,82E+08 | 1,06E+11 |
| 1,33E+09 | 3,73E+10 | 6,78E+09 | 5,80E+05 | 1,60E+09 | 5,34E+06 | 2,35E+09 |
| 1,24E+12 | 1,72E+10 | 2,35E+08 | 2,01E+07 | 1,01E+06 | 5,63E+07 | 2,41E+11 |
| 4,71E+09 | 1,62E+09 | 1,17E+09 | 1,84E+08 | 4,41E+08 | 8,63E+09 | 8,56E+08 |
| 4,86E+12 | 5,50E+09 | 1,27E+07 | 9,44E+07 | 3,25E+07 | 1,33E+10 | 7,39E+12 |
| 1,92E+09 | 1,40E+09 | 9,24E+07 | 3,58E+08 | 3,08E+06 | 1,52E+08 | 1,87E+09 |
| 2,73E+13 | 1,85E+11 | 3,11E+09 | 4,00E+10 | 9,62E+09 | 4,74E+11 | 2,75E+12 |
| 1,52E+10 | 1,25E+14 | 7,81E+11 | 5,82E+11 | 7,75E+08 | 3,81E+11 | 2,14E+09 |

Литература

1. Болотин В. В. Случайные колебания упругих систем. М.: Наука,-1979.-335с.
2. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. М.: Наука , 1970 .- 556 с.
3. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике . М.: Мир , 1975.- 541с.
4. Райхер В. Л. Гипотеза спектрального суммирования и ее применение для усталостной долговечности при действии случайных нагрузок. //Труды ЦАГИ. 1969.-с. 3 – 39.
5. Светлиский В. А. Случайные колебания механических систем М.: Машиностроение , 1976.- 215с.

6. Исследование динамических характеристик густо перфорированных систем./Фильштинский Л.А. и др.//Труды Сумского филиала ХПИ.- Сумы, 1979.- 57 с.
7. Исследование напряженного состояния густо перфорированных систем при динамических нагрузках./Фильштинский Л.А. и др.//Труды Сумского филиала ХПИ.- Сумы, 1980.- 52 с.
8. Исследование динамических характеристик густо перфорированных цилиндрических панелей при стационарных случайных нагрузках./Фильштинский Л.А. и др.//Труды Сумского филиала ХПИ.-Сумы, 1981.- 90 с.
9. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий // Прикл. матем. и механика.- 1964, т. 28, №3, с. 430-441.
10. Фильштинский Л. А. Двоякопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, ослабленной конгруэнтными группами произвольных отверстий.// Прикл. матем. и механика. 1972, т.36, №4, с. 682-690.