УДК 534.1

Учет влияния поврежденности материала на скорость распространения в нем упругой волны

В.И.Ерофеев, А.Н. Морозов, Е.А.Никитина

Аннотация

Целью настоящей работы является разработка математической модели, которая в рамках единой схемы и на основе принципов механики континуума позволяет записывать эволюционные уравнения накопления повреждений с учетом геометрической и физической нелинейностей процесса. Для решения поставленной задачи предлагается новый подход, основанный на взаимосвязи уравнений динамики материала и уравнений его поврежденности.

Ключевые слова

поврежденность материала, упругая волна, скорость, дисперсия, затухание, нелинейность.

Рассмотрим образец материала, выполненный в виде стержня, по которому может распространяться продольная упругая волна. Обозначим через $u\ (x,\ t)$ перемещение частиц срединной линии стержня. Считаем, что стержень подвергается статическим или циклическим испытаниям и в его материале может накапливаться поврежденность. Для описания меры поврежденности введем функцию $\psi\,(x,t)$ [1-3], характеризующую относительную плотность равномерно рассеянных в единице объема микродефектов. Этот параметр равен нулю, когда повреждений нет, и близок к единице в момент разрушения.

Динамика стержня с учетом поврежденности его материала описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2(1 + \frac{\alpha_0}{E}\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \beta_1 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad , \tag{1}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \alpha\psi = \beta_2 E \frac{\partial u}{\partial x} \quad . \tag{2}$$

Или эквивалентным этой системе уравнением относительно продольного перемещения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (c_0^2 + \frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha})\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{c_0^2}{\alpha}\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} -$$
$$- \frac{c_o^2\alpha_o}{E}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c_o^2\alpha_o}{\alpha\, E}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \tag{3}$$

где $c_o = \sqrt{E/\rho}$ - скорость, с которой распространялась бы продольная упругая волна в материале стержня, если бы в нем не было бы повреждений; E - модуль Юнга; ρ - плотность материала; α, β_1, β_2 - константы, характеризующие поврежденность материала и связь циклических процессов и процессов накопления повреждений.

Если линеаризовать уравнение (3) и с его помощью исследовать распространение гармонической волны в поврежденном материале, то легко видеть, что наличие поврежденности приводит к дисперсии, т.е. зависимости фазовой скорости продольной волны от частоты $\upsilon_\phi = \upsilon_\phi(\omega)$ и частотно-зависимому затуханию $K^{11} = K^{11}(\omega)$.

В [4] было показано, что константы α, β_1, β_2 могут быть вычислены через измеряемые параметры волнового процесса:

$$\alpha = \frac{K^{11}(\infty)\omega}{K^{11}(0)\sqrt{1 + \frac{K^{11}(\infty)}{c_0\omega}}} \quad , \quad \beta_1\beta_2 = \frac{c_0(K^{11}(\infty))^2}{EK^{11}(0)\sqrt{1 + \frac{K^{11}(\infty)}{c_0\omega}}}), \tag{4}$$

где ω - круговая частота гармонической волны, $K^{11}(0)$, $K^{11}(\infty)$ - мнимые части волнового числа в низкочастотном и высокочастотном диапазонах.

Через $\alpha_0 = 3E + \nu_1(1-6\nu) + 6\nu_2(1-2\nu) + 2\nu_2$ обозначен коэффициент, характеризующий геометрическую и физическую упругие нелинейности стержня; $\nu_{1,2,3}$ - упругие модули Ламе третьего порядка; ν - коэффициент Пуассона.

Будем предполагать, что затухание волны, обусловленное поврежденностью и нелинейность, являются величинами одного порядка малости $\varepsilon = {a|\alpha_0|}/{E\Lambda}$, ($a$ -амплитуда волны, Λ - длина волны).

Решение уравнения (3) имеем в виде асимптотического разложения перемещения по малому параметру:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + ... \tag{5}$$

Введем при этом новые переменные:

$$\xi = x - ct \quad ; \eta = \varepsilon x \tag{6}$$

Такой выбор переменных объясняется тем, что возмущение, распространяясь со скоростью c вдоль оси x, медленно эволюционирует в пространстве из-за нелинейности и диссипации.

После подстановки (5) и (6) в (3) в нулевом приближении по ε получим выражение для скорости

$$c = c_0 \sqrt{1 + \frac{\beta_1 \beta_2 E}{\alpha_0 c_0^2}}$$

Первое приближение по ε приводит к эволюционному уравнению относительно осевой деформации $\upsilon = {\partial u_0}/{\partial \xi}$:

$$\begin{aligned} &-2\varepsilon(c_0^2 + \frac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha})\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} + (\frac{c_0^2 c - c^3}{\alpha})\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi^2} - \\ &-\frac{c_0^2 \alpha_0}{E}\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi} + \frac{c_0^2 \alpha_0 c}{\alpha E}\frac{\partial}{\partial \xi}(\upsilon \frac{\partial \upsilon}{\partial \xi}) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

В длинноволновом диапазоне вторым нелинейным слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым и (7) преобразуется в уравнение Бюргерса [5]

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} + 2g\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial \xi} + \delta\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \xi^2} = 0 \quad , \tag{8}$$

где $g = \dfrac{\alpha_0}{4\varepsilon E(1 + \dfrac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2})}$, $\delta = \dfrac{\beta_1\beta_2 E}{2\varepsilon\alpha^2 c_0\sqrt{1 + \dfrac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2}}}$.

Уравнение (8) позволяет описать баланс между нелинейностью и диссипацией, приводящий к формированию локализованной слабой ударной волны (кинка):

$$\upsilon = Am\, th\left[m(\xi - V\eta) + B\right] , \tag{9}$$

где m - свободный параметр, $A = \dfrac{\delta}{g}$, $B = \dfrac{V}{2g}$.

Если граничные условия таковы, что $\upsilon \to h_1$ при $\xi \to \infty$ и $\upsilon \to h_2$ при $\xi \to -\infty$, то ширина ударной волны:

$$\Delta = \frac{1}{m} = \left|\frac{2\delta}{g(h_1 - h_2)}\right| = \left|\frac{4\beta_1\beta_2 E^2\sqrt{1 + \dfrac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2}}}{\alpha^2 c_0 \alpha_0 (h_1 - h_2)}\right| , \tag{10}$$

а ее скорость:

$$V = \left|g(h_1 + h_2)\right| = \left|\frac{\alpha_0(h_1 + h_2)}{4\varepsilon E(1 + \dfrac{\beta_1\beta_2 E}{\alpha c_0^2})}\right| . \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что ширина ударной волны растет, а ее скорость уменьшается с увеличением параметра $\dfrac{\beta_1\beta_2}{\alpha}$ - характеризующего поврежденность материала.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-08-00827; грант № 09-08-00892).

Рекомендовано к публикации программным комитетом XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова.

Библиографический список

1. *Качанов Л.М.* Основы механики разрушения. М.:Наука, 1974. – 311 с.

2. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. М: Наука,1966.-752с.

3. *Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н.* Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации / отв.ред. академик РАН Ф.М. Митенков. М.: Наука, 2009. – 280 с.

4. *Ерофеев В.И., Никитина Е.А.* Самосогласованная динамическая задача оценки поврежденности материала акустическим методом // Акустический журнал. 2010. Т.56, № 3.

5. *Порубов А.В.* Локализация нелинейных волн деформации. М.:Физматлит,2009.-208 с.

Сведения об авторах:

Владимир Иванович Ерофеев, заместитель директора Нижегородского филиала института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, д.ф.м н., профессор, тел.:(831) 432-05-76, e-mail: erf04@sinn.ru

Андрей Николаевич Морозов , заведующий кафедрой Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, д.ф.м н, профессор,тел.: (495) 263-63-52, e-mail: amor@mx.bmstu.ru

Елена Александровна Никитина, старший научный сотрудник Нижегородского филиала института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН, к.т.н., тел.: (831) 432-23-87, e-mail: erf04@sinn.ru