

УДК 536.25

Рост давления при нестационарной естественной конвекции паров водорода в вертикальном цилиндрическом сосуде с постоянной температурой нижней границы*

С.Г. Черкасов, И.В. Лаптев, А.В. Ананьев, А.О. Городнов

Исследовательский центр им. М.В. Келдыша (ГНЦ ФГУП «Центр Келдыша»), Москва, 125438, Россия
e-mail: an.ol.gorodnov@gmail.com

Поступила в редакцию 8.02.2019

После доработки 8.04.2019

Принята к публикации 15.04.2019

Рассмотрена задача о естественной конвекции газа в замкнутом прямом цилиндре с изотермической нижней границей, равномерно подогреваемом сбоку и сверху. Созданный ранее численный метод адаптирован на случай осесимметричной геометрии. Продемонстрирована его сеточная сходимость. Проведено расчетное и теоретическое исследование влияния интенсивности конвекции и отношения высоты цилиндра к радиусу на рост давления в емкости.

Ключевые слова: ламинарная естественная конвекция, нестационарная конвекция, гомобаричность, идеальный газ, приближение Буссинеска, приближение малых чисел Маха, прямой цилиндр, бездренажное хранение.

Введение

При проектировании ракет-носителей, имеющих одну или несколько ступеней, использующих в качестве горючего или окислителя криогенную жидкость, важным является прогнозирование роста давления в топливных емкостях [1]. Одной из особенностей хранения топлива в баках является присутствие в них одновременно паровой и жидкой фаз компонента. Явления, протекающие в паровой подушке и заполненном жидкостью объеме, очень разнообразны. Кроме интенсивности внешнего нагрева эти явления в существенной мере определяются режимом работы бака в составе ракеты. Особенно характерны такие режимы, как предстартовая подготовка, полет, полет в условиях микрогравитации для баков разгонных блоков, хранение между включениями двигателей разгонных блоков, хранение компонента в условиях космического полета в близких к чистой невесомости условиях. Разнообразие усло-

вий работы приводит к достаточно большому разбросу характерных значений перегрузки, действующей на бак. Причем даже в условиях орбитального полета при выключенных двигателях характерные значения перегрузки приводят к возникновению конвективных течений и формированию температурной стратификации в жидкой и паровой фазах [1–3].

Свободная конвекция в жидкостях достаточно подробно исследовалась в рамках приближения Буссинеска [4], которое хорошо описывает процессы при малых относительных перепадах температуры. В работах многих авторов [5–9] этот подход с успехом применялся для исследования свободной конвекции жидкости в баке. Однако изучению конвекции в паровой подушке бака уделено достаточно мало внимания. Кроме того, в случае паровой фазы в подушке бака могут реализовываться значительные перепады температур [1], вследствие чего применение приближения Буссинеска для описания конвекции может быть не всегда оправданно [10]. Поэтому в рамках данной работы будет рассмотрена именно конвекция пара при

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 16-08-00247-А).

нагреве замкнутого сосуда с начальной температурой, равной температуре насыщения при данном давлении.

Для случая больших неоднородностей температуры можно использовать модель на основе приближения гомобаричности [11, 12]. Данное приближение применимо при существенно дозвуковых скоростях течения, что как раз является характерным для свободной конвекции в паровой подушке бака. Значительным преимуществом этой модели перед полными уравнениями Навье–Стокса для сжимаемой среды является отсутствие акустических возмущений, что сильно снижает требования к устойчивости численных методов и уменьшает время расчета. В рамках такого подхода было получено большое количество результатов, касающихся тепломассообмена при больших перепадах температуры [13–20]. В работе [21] с помощью приближения гомобаричности было получено, что нестационарная конвекция в газе имеет качественные отличия от конвекции Буссинеска. В частности, показан эффект «затухания» конвекции при больших временах нагрева, отсутствующих в случае конвекции Буссинеска. Важным отличием приближения гомобаричности от модели Буссинеска является наличие дополнительного критерия подобия, характеризующего относительный перепад температуры. Влияние этого фактора исследовалось авторами данной работы в [22–24]. В них было показано, что при

значительном увеличении характерной температурной неоднородности погрешность определения некоторых параметров течения и теплообмена в модели Буссинеска может достигать существенных величин. Поэтому применение приближения гомобаричности к задачам, связанным с паровой подушкой баков ракет, представляет существенный интерес с точки зрения уточнения моделей хранения криогенного топлива.

Решение модельных задач и исследование физических процессов позволяет создавать упрощенные инженерные методики для прогнозирования роста давления в баках. В частности, знания, полученные о свободной конвекции в жидкостях, позволили построить несколько упрощенных подходов для оценки изменения давления в баках [25, 26]. Из экспериментов известно, что температура зеркала жидкости в баке меняется существенно медленнее, чем в его верхней части [1]. Это связано с тем, что в случае бездренажного хранения температура на границе раздела фаз близка к температуре насыщения при данном давлении. В рамках настоящей работы рассматривается задача о тепловой конвекции газа в вертикальном цилиндрическом сосуде, подогреваемом снизу и сбоку, а нижняя граница сосуда будет считаться изотермичной. С помощью такой постановки моделируется свободная конвекция пара при бездренажном хранении с целью в рамках принятых упрощений получить новые знания о влиянии конвекции пара на рост давления при хранении.

Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную ламинарную естественную конвекцию в вертикальном цилиндрическом сосуде заданной высоты, заполненную парами водорода, при подогреве сверху и сбоку, с изотермической нижней границей. Схематически данную задачу можно проиллюстрировать рис. 1.

В качестве физико-математической модели будем использовать нестационарные уравнения Навье–Стокса в приближении гомобаричности в осесимметричной постановке. Основные уравнения можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho r u)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0; \quad (1)$$

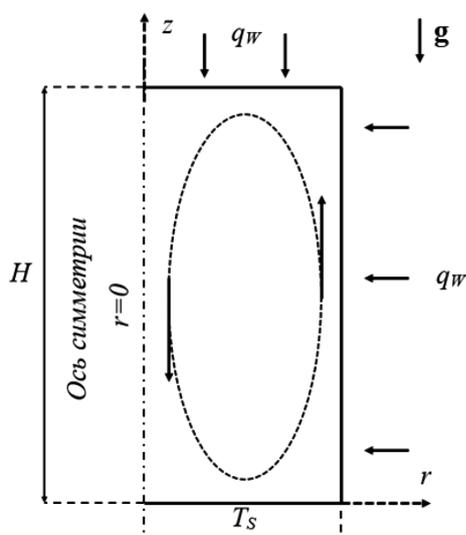


Рис. 1. Схема рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho u u}{\partial r} + \frac{\partial \rho u w}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\ & \quad + \frac{\mu}{r} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r \rho w w}{\partial r} + \frac{\partial \rho w w}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} \right) \right] + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \\ & \quad + \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \rho g; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial r} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \\ & = \frac{dP}{dt} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right); \end{aligned} \quad (4)$$

$$P = \rho R_V T. \quad (5)$$

Граничные условия зададим следующим образом:

– ось симметрии:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \quad (6)$$

– боковая стенка:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} = q_w, \quad u = 0, \quad w = 0; \quad (7)$$

– верхняя граница:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = q_w, \quad u = 0, \quad w = 0; \quad (8)$$

– нижняя граница:

$$T = T_S, \quad u = 0, \quad w = 0. \quad (9)$$

Будем полагать в начальный момент времени температуру однородной по пространству и равной температуре насыщения водорода при атмосферном давлении. Плотность соответствует температуре и давлению в начальный момент времени по уравнению состояния, началь-

ные значения коэффициентов переноса газообразного водорода зададим следующими [27]:

$$\begin{aligned} & T_0 = 20 \text{ К}, \quad P_0 = 101500 \text{ Па}, \\ & \rho_0 = 1.22 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \quad R_V = 4155 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \\ & \lambda_0 = 0.0158 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}, \quad \mu_0 = 1.09 \cdot 10^{-6} \text{ Па} \cdot \text{с}, \\ & c_p = 3.5 \cdot R_V. \end{aligned} \quad (10)$$

Введем безразмерные переменные по следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} & \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{P_0}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_0}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{a_0/R}, \\ & \tilde{w} = \frac{w}{a_0/L}, \quad \tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{R}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{R^2/a_0}, \\ & \tilde{p} = \frac{p}{\rho_0 a_0^2 / R^2}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_0 c_p}{\lambda_0}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{Ra} = \frac{g(1/T_0) \Delta T R^3 \rho_0}{a_0 \mu_0},$$

$$A = \frac{\Delta T}{T_0}, \quad \Delta T = \frac{q_w R}{\lambda_0}, \quad a_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_0 c_p},$$

$$B = \frac{H}{R}, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_0}, \quad \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_V}.$$

Нулевые значения величин берутся согласно начальным условиям и соотношениям (10). Так как неоднородности температуры в газе в рамках данной задачи произвольны, будем считать коэффициенты вязкости и теплопроводности переменными и зависящими от температуры, а теплоемкость при постоянном объеме – константой. Значения коэффициентов переноса зададим следующей аппроксимацией эмпирических данных из [27]:

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda}{\lambda_0} = -0.0006 \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 + 0.0048 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 + \\ & \quad + 0.8187 \left(\frac{T}{T_0} \right) + 0.2183, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{\mu_0} = 0.0029 \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 - 0.074 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 + \\ & \quad + 1.0701 \left(\frac{T}{T_0} \right) + 0.017. \end{aligned} \quad (13)$$

Эти соотношения имеют как погрешность за счет аппроксимации эмпирических точек многочленом, так и погрешность, связанную с пренебрежением зависимостью коэффициентов от давления, однако в сумме отклонение от эмпирических данных не превышает 20% в диапазоне температур 20–300 К и давлений 1–10 атм. Погрешность, связанная с пренебрежением температурной зависимостью теплоемкости, в данном интервале не превышает 15%.

Представим динамическое давление в виде суммы гидростатической компоненты, заданной для покоящегося газа при «нулевых» параметрах, и компоненты, зависящей от времени и координат:

$$p = p_{D0} + p'. \quad (14)$$

Причем пусть для статической добавки будет справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = -\rho_0 g, \quad \frac{\partial p_0}{\partial r} = 0. \quad (15)$$

С учетом сделанных замен, переходя везде к консервативной форме, запишем уравнения для газа в безразмерном виде, опуская для удобства волну над переменными:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (pru)}{\partial r} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r p u u}{\partial r} + \frac{\partial p u w}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] + \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\ & + \text{Pr} \frac{\mu}{r} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} - \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\ & \frac{\partial p w}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r p u w}{\partial r} + \frac{\partial p w w}{\partial z} = \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{4}{3} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{u}{r} \right) \right] + \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & + \text{Pr} \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \text{Pr} \frac{\mu}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \\ & + (1-\rho) \frac{\text{Ra} \cdot \text{Pr}}{A}, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial p T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r p u T}{\partial r} + \frac{\partial p w T}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (19)$$

$$P = \rho T. \quad (20)$$

Будем рассматривать случай, когда температура нижней границы остается равной начальной температуре газа.

Тогда граничные условия переписутся в следующем виде:

– ось симметрии:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \quad (21)$$

– боковая стенка:

$$\frac{\partial T}{\partial r} = A, \quad u = 0, \quad w = 0; \quad (22)$$

– верхняя граница:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = A, \quad u = 0, \quad w = 0; \quad (23)$$

– нижняя граница:

$$T = 1, \quad u = 0, \quad w = 0; \quad (24)$$

– начальные условия:

$$T(0) = 1, \quad P(0) = 1, \quad \rho(0) = 1. \quad (25)$$

Уравнения (16)–(20) вместе с соотношениями (12) и (13) для коэффициентов теплопроводности и вязкости и граничными и начальными условиями (21)–(25) образуют замкнутую систему уравнений, позволяющую решить поставленную задачу.

Метод численного решения уравнений

Для решения представленной системы использовалась модификация метода, описанного и верифицированного в [26, 29], на случай декартовой системы координат. Данный метод строится путем дискретизации уравнений методом контрольного объема на неравномерной разнесенной сетке. Аппроксимация конвективных членов проводилась аналогично [26] схемой QUICK [30].

Рассмотрим сеточную сходимость на примере следующей задачи с изотермической нижней границей:

$$\begin{aligned} \text{Ra} &= 10^8, \quad \text{Pr} = 1.05, \quad A = 13, \\ \gamma &= 1.4, \quad B = 1, \quad T|_{z=0} = 1. \end{aligned} \quad (26)$$

В расчетах использовались равномерные сетки со следующими размерами шагов

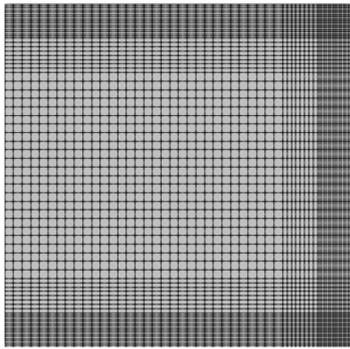


Рис. 2. Используемая в расчетах неравномерная сетка

$\Delta r = \Delta z = \Delta h = 0.05, 0.025, 0.01, 0.00625$ и неравномерная сетка с измельчением у границ расчетной области, причем $\Delta r_{\text{MIN}} = \Delta z_{\text{MIN}} = 0.00625$ (рис. 2).

Шаг по времени задавался фиксированным: $\Delta t = 5 \cdot 10^{-7}$. В табл. 1 приведены данные по среднему числу Нуссельта на нижней границе в различные моменты времени для разных сеток.

Сходимость по временному шагу была изучена на примере следующей задачи с изотермической нижней границей:

$$\begin{aligned} Ra = 10^7, Pr = 1.05, A = 13, \\ \gamma = 1.4, B = 1, T|_{z=0} = 1. \end{aligned} \quad (27)$$

В расчетах использовалась одна и та же неравномерная сетка из предыдущего примера (см. рис. 2), а шаг по времени не менялся в течение одного расчета. Результаты исследования сходимости представлены в табл. 2.

Из приведенных исследований по сходимости по временному и пространственному шагу можно заметить, что решение обладает сеточной сходимостью и очень слабо меняется при уменьшении временного шага. Поэтому дальнейшие расчеты проводились с минимальным шагом по времени $\Delta t = 5 \cdot 10^{-7}$, а для разрешения пространственных координат использовались неравномерные сетки со сгущением узлов у границ расчетной области, подобные представленной на рис. 2.

Для дополнительной верификации метода расчета была рассмотрена другая модельная задача. Положим нижнюю границу цилиндра теплоизолированной и проинтегрируем уравнение энергии по объему цилиндра, заменив произведение плотности на температуру во временной производной на давление, используя уравнения состояния:

Таблица 1. Сеточная сходимость решения

t	Среднее число Нуссельта при Δh , равном:				
	0.05	0.025	0.01	Неравномерная $\Delta h_{\text{MIN}} = 0.00625$	0.00625
$5 \cdot 10^{-7}$	0.0169	0.0287	0.0370	0.0374	0.0374
0.05	1.0928	1.1123	1.1213	1.1199	1.1176
0.1	2.2700	2.3188	2.3312	2.3314	2.3313

Таблица 2. Сходимость среднего числа Нуссельта на изотермической границе по временному шагу

t	Среднее число Нуссельта при Δt , равном:			
	$1 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$4 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-7}$
0.01	0.217789	0.217789	0.217791	0.217792

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \int_0^1 \int_0^B \frac{dP}{dt} r dr dz + \int_0^1 \int_0^B \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r \rho u T}{\partial r} + \frac{\partial r \rho w T}{\partial z} \right) r dr dz = \\ = \int_0^1 \int_0^B \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right) r dr dz. \end{aligned} \quad (28)$$

Путем несложных преобразований, учитывая граничные условия для скорости, можно получить следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{dP}{dt} \int_0^1 \int_0^B r dr dz = \int_0^B r \lambda \frac{\partial T}{\partial r} dz \Big|_{r=1} + \\ + \int_0^1 r \lambda \frac{\partial T}{\partial z} dr \Big|_{z=B} - \int_0^1 r \lambda \frac{\partial T}{\partial z} dr \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда получим аналитическое выражение для скорости роста давления, используя граничные условия для уравнения энергии:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma A \left(2 + \frac{1}{B} \right), B = \frac{H}{R}. \quad (30)$$

Рассмотрим модельную задачу с теплоизолированной нижней границей с начальными условиями (25) и следующими значениями определяющих параметров:

$$\begin{aligned} Ra = 10^8, Pr = 1.05, \\ A = 13, \gamma = 1.4, B = 1. \end{aligned} \quad (31)$$

На рис. 3 представлены результаты расчета роста давления предложенным методом и по формуле (30).

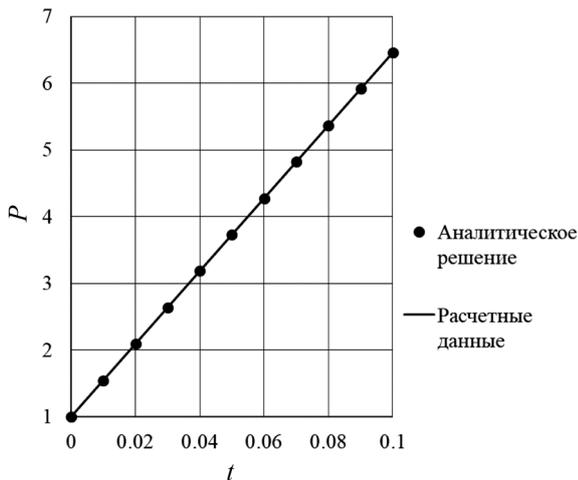


Рис. 3. Сравнение расчетных данных по росту давления с аналитическим решением в условиях тестовой задачи

Как видно из рис. 3, результаты расчета роста давления в условиях данного тестового примера очень хорошо совпадают с точным решением.

Расчетно-теоретический анализ задачи

Рассмотрим влияние изменения высоты цилиндра на рост давления в емкости. Если в условиях модельной задачи положить нижнюю границу теплоизолированной, то можно воспользоваться соотношением (30) для оценки скорости роста давления. В случае цилиндра бесконечной высоты скорость роста давления стремится к следующему пределу:

$$\frac{dP}{dt} = 2\gamma A. \tag{32}$$

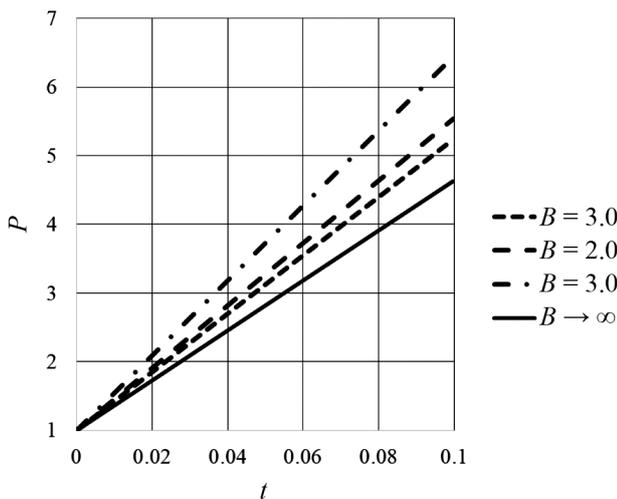


Рис. 4. Результаты расчета роста давления для цилиндра с теплоизолированной нижней границей при различных значениях отношения высоты к радиусу

На рис. 4 представлена зависимость скорости роста давления при различной высоте цилиндра, рассчитанная по формуле (30) с условиями, заданными в (31).

Из соотношения (30) и рис. 4 видно, что при увеличении высоты цилиндра рост давления должен замедляться. Данный эффект объясняется уменьшением относительного вклада теплового потока от крышки емкости по сравнению с суммарным теплом, поступающим в емкость.

Рассмотрим теперь рост давления в случае, когда нижняя граница цилиндрической емкости изотермическая. Соотношение (30) в таком случае запишется в следующем виде:

$$\frac{dP}{dt} = \gamma A \left(2 + \frac{1 - \overline{Nu}_S}{B} \right). \tag{33}$$

Здесь среднее число Нуссельта на нижней границе цилиндра определяется следующим образом:

$$\overline{Nu}_S = \frac{2}{A} \int_0^1 r \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} dr. \tag{34}$$

Из (28) видно, что в случае постоянства температуры нижней границы рост давления определяется теплообменом на изотермической стенке, который зависит от режима течения в цилиндре.

Отметим, что характерной особенностью хранения водорода в баках ракет являются достаточно малые значения числа Фурье для пара, поэтому в основном нас интересуют малые времена нагрева емкости. В эксперименте [1] время хранения, рассчитанное из практических соображений, давало значение числа Фурье по параметрам пара около 0.1. С другой стороны, постановка задачи с изотермической нижней стенкой допускает установление стационарного режима, причем интенсивность теплообмена на нижней стенке в стационарном случае можно легко получить из (33):

$$\overline{Nu}_{S,ST} = 2 \cdot B + 1. \tag{35}$$

Определить среднее число Нуссельта на изотермической стенке на нестационарном режиме нагрева аналитически не представляется возможным, поэтому для дальнейшего анализа воспользуемся предложенным численным методом.

Рассмотрим сначала установление течения в цилиндре. Исходные данные для расчета возьмем близкими к условиям работы [1], в которой рассматривался цилиндрический бак с полу-сферическими днищами диаметром 0.1 м и вы-

сотой 0.2 м. Бак грелся равномерно с удельным тепловым потоком в стенку 80 Вт. Общие для всех расчетов начальные условия и параметры задачи примем следующими:

$$\begin{aligned} T_0 &= 20 \text{ К}, P_0 = 1 \text{ бар}, \\ \rho_0 &= 1.22 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, q_w = 80 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}. \end{aligned} \quad (36)$$

Для безразмерных уравнений условия (30) дадут следующие исходные параметры задачи:

$$\begin{aligned} T(0) &= 1, P(0) = 1, \rho(0) = 1, \\ \text{Pr} &= 1.05, A = 13. \end{aligned} \quad (37)$$

Рассмотрим результаты моделирования нагрева цилиндра с высотой, равной двум радиусам, при наличии конвекции и в случае, когда конвекция отсутствует.

Как видно из рис. 5, среднее число Нуссельта на стационарном режиме достаточно хорошо совпадает с аналитической формулой (35). Так-

же из приведенных рисунков можно выделить, что рассматриваемый в данной работе интервал времени попадает в участок существенно нестационарного течения, сопровождающегося нелинейным изменением теплообмена на нижней границе во времени. На рис. 6–8 приведена зависимость среднего числа Нуссельта на нижней стенке от времени при различных значениях числа Рэлея для различных значений B в характерном для баковых задач интервале времени.

Из приведенных на рис. 7–9 данных видно, что в интересующем нас интервале времени увеличение интенсивности конвекции приводит к снижению теплоотдачи в изотермическую стенку, замедляя рост давления по сравнению с случаем чистой невесомости, когда процесс нагрева цилиндра определяется только поршневым эффектом [18] и теплопроводностью. Для объяснения этого эффекта рассмотрим влияние интенсивности конвекции на поле температуры в сосуде.

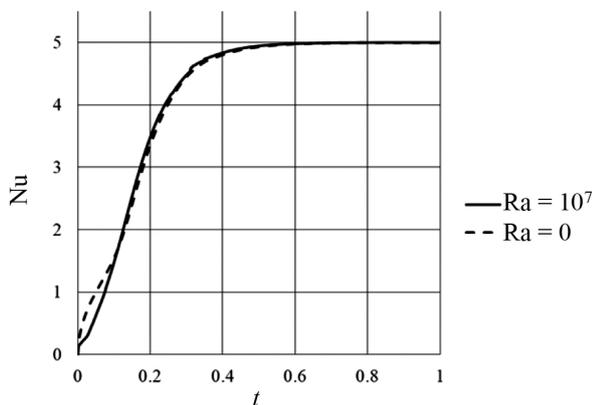


Рис. 5. Установление давления в емкости при $B = 2, Ra = 10^7$

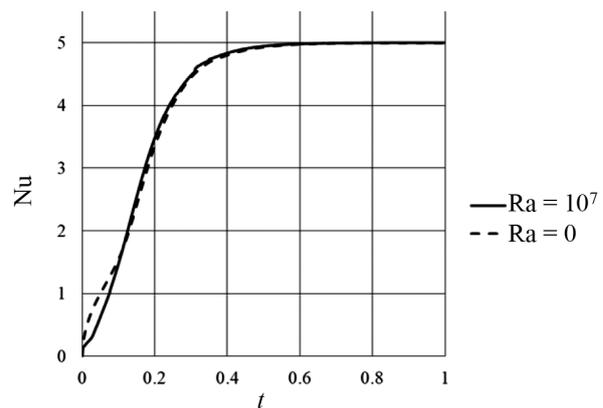


Рис. 6. Среднее число Нуссельта на нижней стенке при $B = 2, Ra = 10^7$

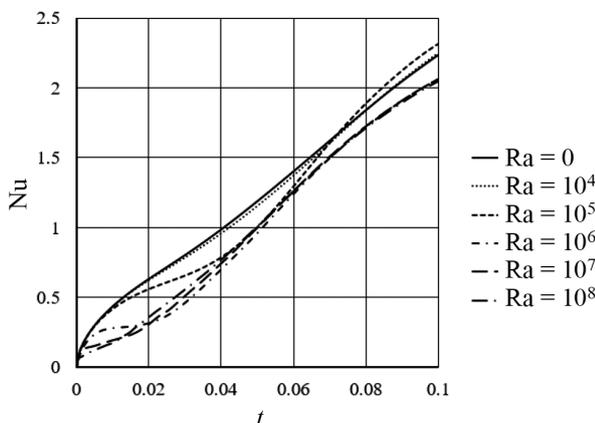


Рис. 7. Среднее число Нуссельта на изотермической стенке при различных значениях числа Рэлея и $B = 1$

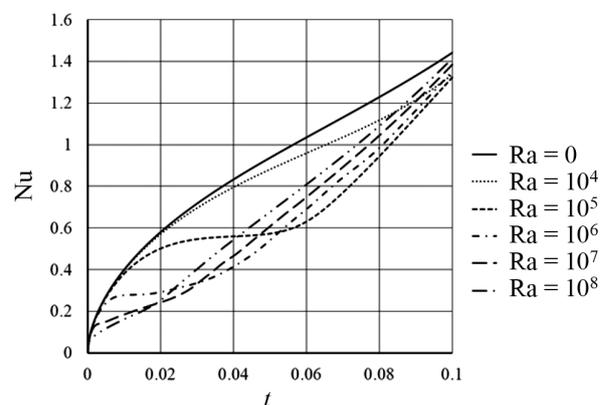


Рис. 8. Среднее число Нуссельта на изотермической стенке при различных значениях числа Рэлея и $B = 2$

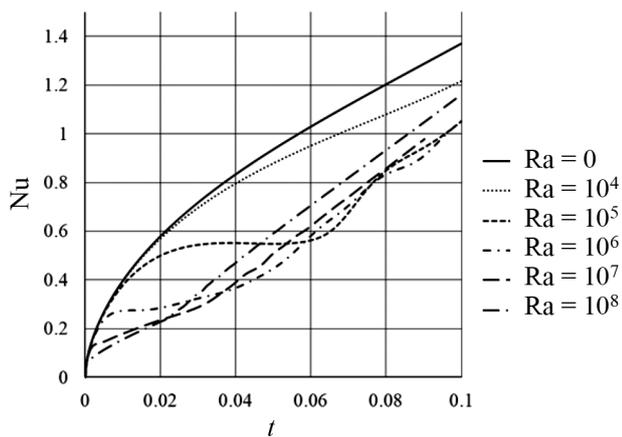


Рис. 9. Среднее число Нуссельта на изотермической стенке при различных значениях числа Рэлея и $B = 3$

Важной особенностью конвекции в осесимметричных сосудах при подводе тепла сверху и сбоку является формирование вертикальной температурной стратификации, причем горизонтальные температурные градиенты при этом малы по сравнению с вертикальными [5, 6]. Более подробно распределение температуры и поле скорости в зависимости от интенсивности конвекции продемонстрировано на рис. 10–13.

На приведенных изолиниях температуры видно, что при наличии конвекции в газе, как и в случае жидкости, формируется вертикальная температурная стратификация, когда градиенты температуры в вертикальном направлении значительно больше, чем в горизонтальном. Форми-

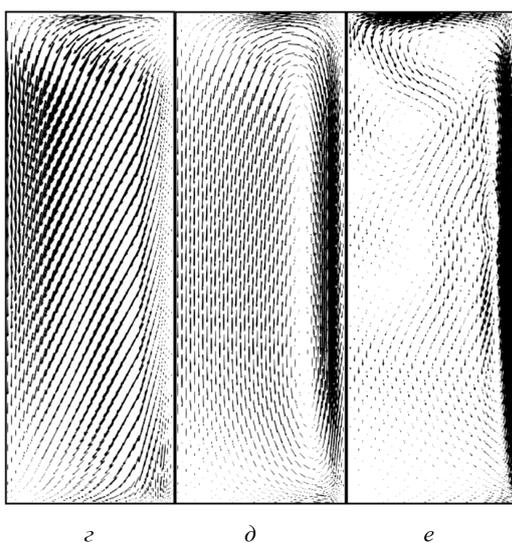
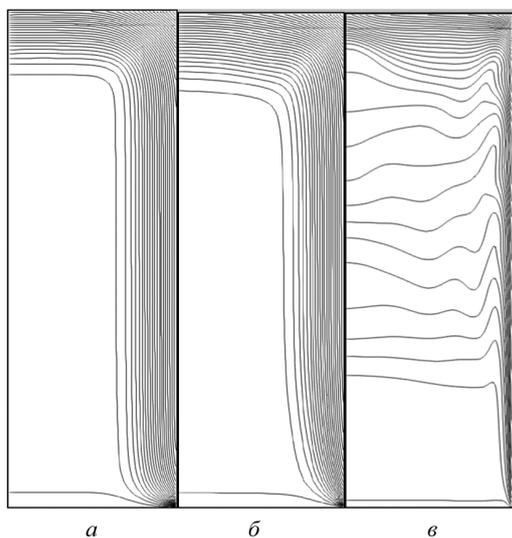


Рис. 10. Изолинии температуры (*a, б, в*) и векторы скорости (*z, д, е*) в сосуде в момент времени $t = 0.01$ при $B = 3$: *a, z* – $Ra = 0$, $T_{\min} = 1.0$, $T_{\max} = 3.76$; *б, д* – $Ra = 10^6$, $T_{\min} = 1.0$, $T_{\max} = 3.77$; *в, е* – $Ra = 10^8$, $T_{\min} = 1.0$, $T_{\max} = 3.39$

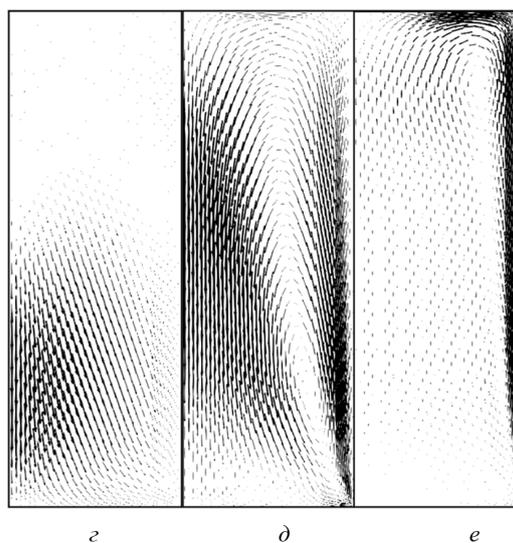
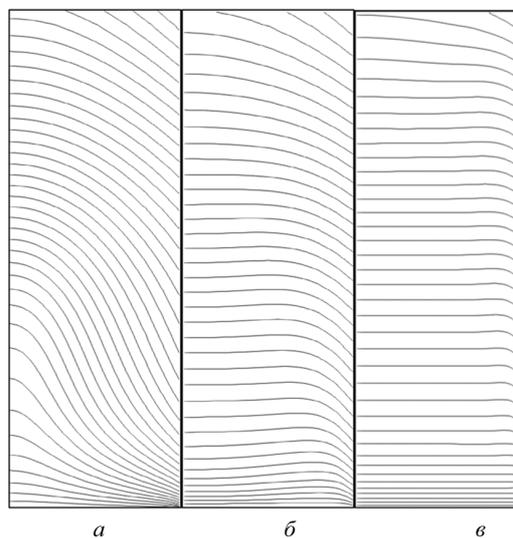


Рис. 11. Изолинии температуры (*a, б, в*) и векторы скорости (*z, д, е*) в сосуде в момент времени $t = 0.1$ при $B = 3$: *a, z* – $Ra = 0$, $T_{\min} = 1.0$, $T_{\max} = 9.28$; *б, д* – $Ra = 10^6$, $T_{\min} = 1.0$, $T_{\max} = 10.23$; *в, е* – $Ra = 10^8$, $T_{\min} = 1.0$, $T_{\max} = 9.80$

рование подобного распределения температуры происходит быстрее при увеличении интенсивности конвекции. В случае отсутствия конвекции имеют место и значительные горизонтальные перепады температуры. Также необходимо отметить, что при уменьшении высоты цилиндра значительно растут вертикальные градиенты температуры и, соответственно, интенсивность теплообмена на нижней границе.

Величины безразмерного давления в ходе нагрева в момент времени $t = 0.1$ при различной интенсивности конвекции и высоте цилиндра приведены в табл. 3.

Из приведенных в таблице данных видно, что оценка давления по формуле (30) без учета теплообмена с нижней границей дает существенную погрешность, максимум которой для приведенных в табл. 1 результатов составляет 51%. Кроме того, максимальная разница между данными по давлению, полученными с учетом конвекции, и случаем идеальной невесомости составила 6%. Также можно отметить влияние параметра B на скорость роста давления. При увеличении высоты цилиндра скорость роста давления сначала значительно увеличивается, а при $B > 2$ немного снижается. При этом разница между максимальным и минимальным приростом давления при увеличении B и фиксированном числе Рэлея составила 13%.

Для оценки роста давления при хранении жидкости в емкостях часто применяется метод, основанный на расчете среднemasсовой температуры жидкости [25].

Таблица 3. Безразмерное давление в момент времени $t = 0.1$ при различных значениях числа Рэлея и параметра B

Ra	Давление при B , равном			
	1	1.5	2.0	3.0
0	4.242	4.613	4.673	4.670
10^4	4.264	4.665	4.729	4.712
10^5	4.342	4.810	4.896	4.850
10^6	4.377	4.853	4.940	4.906
10^7	4.371	4.855	4.922	4.900
10^8	4.370	4.803	4.889	4.863
Теплоизолированная нижняя граница	6.460	5.853	5.550	5.247

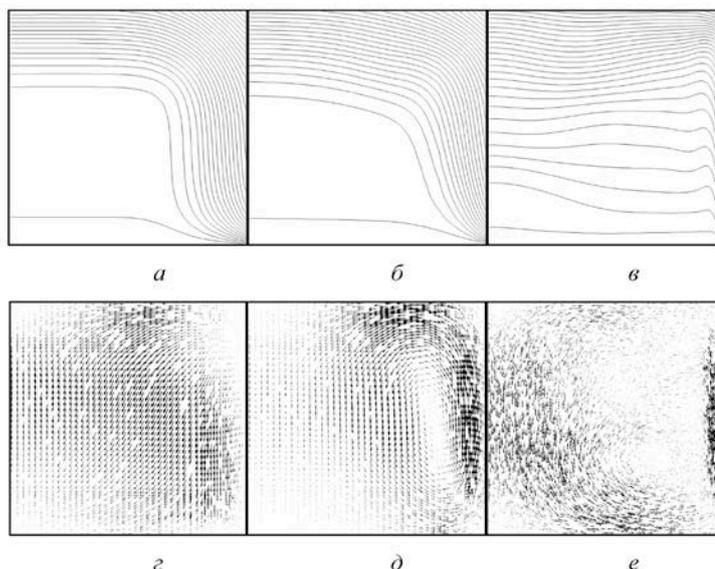


Рис. 12. Изолинии температуры ($a, б, в$) и векторы скорости (z, d, e) в со-суде в момент времени $t = 0.01$ при $B = 1$: $a, z - Ra = 0, T_{min} = 1.0, T_{max} = 3.74$; $б, d - Ra = 10^6, T_{min} = 1.0, T_{max} = 3.74$; $в, e - Ra = 10^8, T_{min} = 1.0, T_{max} = 3.23$

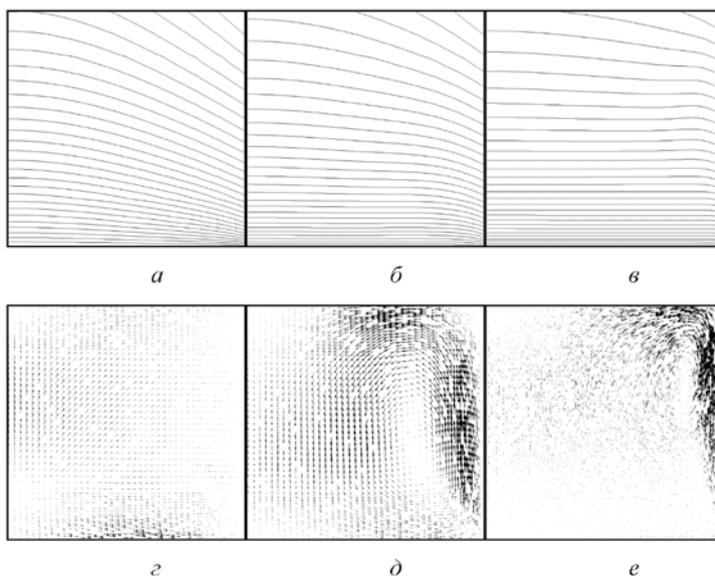


Рис. 13. Изолинии температуры ($a, б, в$) и векторы скорости (z, d, e) в со-суде в момент времени $t = 0.1$ при $B = 1$: $a, z - Ra = 0, T_{min} = 1.0, T_{max} = 7.57$; $б, d - Ra = 10^6, T_{min} = 1.0, T_{max} = 7.63$; $в, e - Ra = 10^8, T_{min} = 1.0, T_{max} = 7.41$

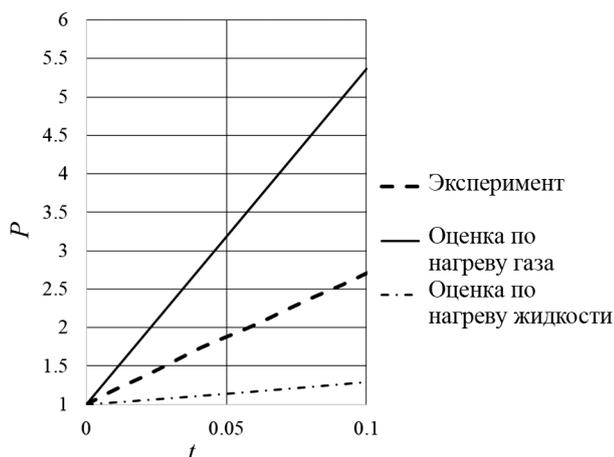


Рис. 14. Рост безразмерного давления от времени в условиях эксперимента [1] при степени заполнения 37% и асимптотические расчеты по формуле (30) и среднемассовой температуре жидкости.

На рис. 14 приведено сравнение результатов расчета давления в рамках описанного выше эксперимента [1] для бака, заполненного жидкостью на 37%, по формуле (30) с расчетом по среднемассовой температуре жидкости и с опытными данными. Как видно из представленных данных, оба асимптотических метода оценки очень сильно расходятся с экспериментальными данными, однако их применение позволяет определить нижнюю и верхнюю границы прироста давления при бездренажном хранении.

Заключение

В данной работе для случая осесимметричных задач был развит метод расчета естественной конвекции в газах на основе приближения гомобаричности, причем полученные данным методом результаты показали хорошее совпадение по динамике роста давления с аналитическим решением для задачи о нагреве цилиндрического сосуда при заданных тепловых потоках через его стенки.

Была теоретически проанализирована задача о конвекции газа в прямом цилиндре с изотермическим днищем, температура которого равна начальной температуре газа в емкости. Показано, что в рамках данной задачи в процессе нестационарного нагрева рост давления определяется теплообменом на нижней границе.

Используя численное моделирование, данная задача исследована для случая, когда нагрев происходит в условиях, близких к бездренаж-

ному хранению паров водорода в ракетном баке. Показано, что для оценки роста давления сверху можно пользоваться аналитическим соотношением (30). Погрешность определения давления при помощи данной оценки по сравнению с результатами расчетов не превышала 51%.

Продемонстрировано применение соотношения (30) для оценки роста давления сверху при бездренажном хранении топлива в баке. Вместе с методом, основанным на расчете среднемассовой температуры жидкости с последующим пересчетом давления по кривой насыщения, эти подходы позволяют качественно оценить границы возможного роста давления при хранении.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A – безразмерный характерный температурный перепад;
 a – коэффициент температуропроводности;
 c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении;
 H – высота цилиндра;
 g – ускорение силы тяжести;
 P – термодинамическое давление;
 p_D – динамическое давление;
 R – радиус цилиндра;
 R_V – газовая постоянная;
 r – радиальная координата;
 T – абсолютная температура;
 u – r -компонента скорости;
 w – z -компонента скорости;
 z – вертикальная координата;
 Nu – число Нуссельта;
 Pr – число Прандтля;
 Ra – число Рэлея;
 λ – коэффициент теплопроводности;
 μ – коэффициент динамической вязкости;
 ρ – плотность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Belyaev A.Yu., Ivanov A.V., Egorov S.D., Voyteshonok V.S., Mironov V.M. Pathways to solve the problem of cryogenic rocket propellant long storage in space // Proc. Int. Aerospace Congress. Moscow, Russia. August 15–19. 1994. V. 1. P. 558–562.
2. Van Dresar N.T., Lin C.S., Hasan M.M. Self-presurization of a flightweight liquid hydrogen tank: Effect of fill level at low wall heat flux // AIAA Paper-92-0818. 1992.
3. Technical report HSM-R421-67, Evaluation of AS-203 low gravity orbital experiment. Contract NAS8-4016. Chrysler corporation. Space division. 1967.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том IV. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
5. Полежаев В.И., Черкасов С.Г. Нестационарная тепловая конвекция в цилиндрическом сосуде при боковом подводе тепла // Известия АН СССР. МЖГ. 1983. № 4. С. 148–157.
6. Черкасов С.Г. Естественная конвекция в вертикальном цилиндрическом сосуде при подводе тепла к боковой и

- свободной поверхностям // Известия АН СССР. МЖГ. 1984. № 6. С. 51–56.
7. **Войтешонок В.С., Черкасов С.Г.** Автомодельный режим тепловой стратификации при естественной конвекции в емкостях // Известия АН СССР. МЖГ. 1989. № 5. С. 19–24.
 8. **Моисеева Л.А., Черкасов С.Г.** Математическое моделирование естественной конвекции и теплообмена в криогенном топливном баке с захлаживающим теплообменником // Известия РАН. МЖГ. 1997. № 3. С. 39–46.
 9. **Черкасов С.Г., Ананьев А.В., Миронов В.В., Моисеева Л.А.** Температурное расслоение в вертикальной цилиндрической емкости с турбулентным свободно-конвективным пограничным слоем // Известия РАН. Энергетика. 2016. № 4. С. 137–146.
 10. **Gray D.D., Giorgini A.** The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases // Int. J. Heat Mass Transfer. 1976. V. 19. P. 545–551.
 11. **Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.** Внутренние течения газовых смесей. М.: Наука, 1989. 368 с.
 12. **Черкасов С.Г.** О некоторых особенностях описания тепловых и динамических процессов в газах в приближении гомобаричности // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 3. С. 444–448.
 13. **Нигматуллин Р.И., Хабеев Н.С.** Динамика паровых пузырьков // Известия АН СССР. МЖГ. 1975. № 3. С. 59–67.
 14. **Хабеев Н.С.** К вопросу об использовании гомобаричности в динамике пузырьков // Известия РАН. МЖГ. 2010. № 2. С. 47–50.
 15. **Hyunik Yang, Desyatov A.V., Cherkasov S.G., McConnell D.B.** On the fulfillment of the energy conservation law in mathematical models of evolution of single spherical bubble // Int. J. Heat Mass Transfer. 2008. V. 51. P. 3623. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.10.013>
 16. **Десятов А.В., Ильмов Д.Н., Кубышкин А.П., Черкасов С.Г.** Математическое моделирование эволюции одиночного сферического парового пузырька на основе гомобарической модели // Теплофизика высоких температур. 2011. Т. 49. № 3. С. 436–443.
 17. **Ильмов Д.Н., Черкасов С.Г.** Теплофизические процессы при сжатии парового пузырька в жидком углеводороде на основе гомобарической модели // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50. № 5. С. 676–684.
 18. **Черкасов С.Г., Миронов В.В., Тлевцев В.В.** Теоретическое исследование нестационарного теплообмена в замкнутом газовом объеме при отсутствии массовых сил // Известия РАН. Энергетика. 2012. № 4. С. 139–150.
 19. **Черкасов С.Г.** Ламинарный свободно-конвективный пограничный слой в сжимаемом газе // Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 5. С. 625–626.
 20. **Chenoweth D.R., Paolucci S.** Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature difference // J. Fluid Mech. 1986. V. 169. P. 173–210. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112086000587>
 21. **Никулин Д.А., Стрелец М.Х.** Численное моделирование нестационарной естественной конвекции однородного сжимаемого газа в замкнутой неадиабатической области // ТВТ. 1984. Т. 22. С. 906–912.
 22. **Черкасов С.Г., Лаптев И.В.** Упрощенный расчет ламинарного свободно-конвективного слоя в газе // Тепловые процессы в технике. 2017. Т. 9. № 4. С. 146–153.
 23. **Черкасов С.Г., Лаптев И.В., Ананьев А.В., Городнов А.О.** Ламинарная естественная конвекция газа в замкнутой квадратной области // Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. № 5–6. С. 182–191.
 24. **Cherkasov S.G., Anan'ev A.V., Moiseeva L.A.** Limitations of the boussinesq model on the example of laminary natural convection of gas between vertical isothermal walls // High Temperature. 2018. V. 56. N 6. P. 878–883. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X18060081>
 25. **Амирханян Н.В., Черкасов С.Г.** Теоретический анализ и методика расчета теплофизических процессов, протекающих в криогенной емкости в режиме бездренажного хранения // Теплофизика высоких температур. 2001. Т. 39. № 4. С. 970–976.
 26. **Черкасов С.Г., Миронов В.В., Миронова Н.А., Моисеева Л.А.** Метод расчета скорости роста давления при бездренажном хранении жидкого водорода в емкостях // Известия РАН. Энергетика. 2012. № 4. С. 155–163.
 27. **Варгафтик Н.Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.
 28. **Qu'ér'e P.L.** Modelling of natural convection flows with large temperature differences: a benchmark problem for low mach number solvers. Part 1, Reference solutions // ESAIM: Mathematical modelling and numerical analysis. 2005. V. 39. N 3, P. 609–616.
 29. **Городнов А.О., Лаптев И.В., Черкасов С.Г.** Моделирование естественной конвекции сжимаемого газа в замкнутой области // Сборник тезисов юбилейной конференции Национального комитета РАН по тепло- и массообмену «Фундаментальные и прикладные проблемы теплообмена» и «Проблемы газодинамики и теплообмена в энергетических установках». Издательский дом МЭИ. 2017. Т. 1. С. 103–104.
 30. **Ferziger J.H., Peric M.** Computational methods for fluid dynamics. Springer, 2002. 423 p.

Pressure rise during unsteady natural convection of hydrogen vapor in a vertical cylinder with isothermal bottom boundary

S.G. Cherkasov, I.V. Laptev, A.V. Anan'ev, A.O. Gorodnov

*Keldysh Research Centre, Moscow, 125438, Russia
e-mail: an.ol.gorodnov@gmail.com*

The problem of pressure rise of hydrogen vapor in the presence of natural convection in a vertical cylinder with isothermal bottom boundary is considered using homobaricity approach. Several analytical solutions for pressure and average Nusselt number is received for cylinder

with thermally isolated bottom boundary and cylinder with isothermal bottom boundary on steady state regime. The original numerical algorithm for low Mach number flows is developed for the case of axial symmetry. Moreover, the analysis of grid and time convergence of this method is made in this article. This method is shown good agreement with analytical solution for the case of the cylinder with thermally isolated bottom boundary. The numerical simulation of unsteady heating of cylinder is made in wide range of laminar Rayleigh numbers and aspect ratios. The initial conditions for this calculation approximately modeled vapor storage in the rocket fuel tank. The flow patterns and temperature isolines for different time moments and Rayleigh number and aspect ratio values are shown. The influence of natural convection intensity and cylinder height on pressure rise is investigated. The method of asymptotic estimate for the upper limit of pressure rise during fuel storage is given.

Keywords: laminar natural convection, nonstationary convection, homobaricity, ideal gas, Boussinesq approach, low Mach number approach, vertical cylinder, fuel storage

REFERENCES

1. Belyaev A.Yu., Ivanov A.V., Egorov S.D., Voyteshonok V.S., Mironov V.M. Pathways to solve the problem of cryogenic rocket propellant long storage in space. *Proc. Int. Aerospace Congress. Moscow, Russia. August 15–19. 1994*, vol. 1, pp. 558–562.
2. Van Dresar N.T., Lin C.S., Hasan M.M. *Self-pressurization of a flightweight liquid hydrogen tank: Effect of fill level at low wall heat flux*. AIAA Paper-92-0818, 1992.
3. *Evaluation of AS-203 low gravity orbital experiment*. Technical report HSM-R421-67. Contract NAS8-4016, 1967. 203 p.
4. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid mechanics (Course of theoretical physics; v. 6)*. Pergamon Press, 1987. 547 p.
5. Polezhaev V.I., Cherkasov S.G. Unsteady thermal convection in a cylindrical vessel heated from the side. *Fluid Dynamics*, 1983, vol.18, no. 4, pp. 620–629. <https://doi.org/10.1007/BF01090631>
6. Cherkasov S.G. Natural convection in a vertical cylindrical vessel with heat supplied to its side and free surfaces. *Fluid Dynamics*, 1984, vol. 19, no. 6, pp. 902–906. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01411577>
7. Voiteshonok V.S., Cherkasov S.G. Self-similar thermal stratification regime in vessels with natural convection. *Fluid Dynamics*, 1989, vol. 24, no. 5, pp. 670–674. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01051716>
8. Moiseeva L.A., Cherkasov S.G. Mathematical modeling of natural convection in a vertical cylindrical tank with alternating-sign heat flux distribution on the wall. *Fluid Dynamics*, 1996, vol. 31, no. 2, pp. 218–223. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02029680>
9. Cherkasov S.G., Ananyev A.V., Mironov V.V., Moiseeva L.A. Temperaturnoe rassloenie v vertikal'noj tsilindricheskoj emkosti s turbulentnym svobodno-konvektivnym pogranchnym sloem [Temperature stratification in a vertical cylindrical enclosure with turbulent natural-convective boundary layer]. *Izvestiya RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2016, no. 4, pp. 137–146. In Russ.
10. Gray D.D., Giorgini A. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 1976, vol. 19, pp. 545–551.
11. Lapin, M.K., Strelets Y.V. *Vnutrennie techeniya gazovykh smesey* [Internal flows of gas mixtures]. Moscow: Nauka, 1989. 368 p. In Russ.
12. Cherkasov S.G. Some special features of description of thermal and dynamic processes in gases in the approximation of homobaricity. *High Temperature*, 2010, vol. 48, no. 3, pp. 422–426. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X10030181>
13. Nigmatulin R.I., Khabeev N.S. Dynamics of vapor-gas bubbles. *Fluid Dynamics*, 1976, vol. 11, no. 6, pp. 867–871. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01026406>
14. Khabeev N. S. The question of the uniform-pressure condition in bubble dynamics. *Fluid Dynamics*, 2010, vol. 45, no. 2, pp. 208–210. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462810020055>
15. Hyunik Yang, Desyatov A.V., Cherkasov S.G., McConnell D.B. On the fulfillment of the energy conservation law in mathematical models of evolution of single spherical bubble. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2008, vol. 51, no. 13–14, pp. 3623–3629. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.10.013>
16. Desyatov A.V., Il'mov D.N., Kubyshekin A.P., Cherkasov S.G. Mathematical simulation of evolution of solitary spherical gas bubble based on homobaric model. *High Temperature*, 2011, vol. 49, no. 3, pp. 422–429. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X11030035>
17. Il'mov D. N., Cherkasov S. G. Thermal processes in compression of a vapor bubble in liquid hydrocarbon based on the homobaric model. *High Temperature*, 2012, vol. 50, no. 5, pp. 631–638. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X12040104>
18. Cherkasov S.G., Mironov V.V., Tlevcejev V.V. Teoreticheskoe issledovanie nestatsionarnogo teploobmena v zamknutom gazovom ob'eme pri otsutstvii massovykh sil [Theoretical research of non-stationary heat-exchange in closed gas volume at the absence of mass forces]. *Izvestiya RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 4, pp. 139–150. In Russ.
19. Cherkasov S.G. Laminarnyj svobodno-konvektivnyj pogranchnyj sloj v szhimaemom gaze [Laminar natural-convective boundary layer in compressible gas]. *Doklady RAN – Doklady Akademii nauk*, 1995, vol. 343, no. 5, pp. 625–626. In Russ.
20. Chenoweth D.R., Paolucci S. Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature difference. *J. Fluid Mech.*, 1986, vol. 169, pp. 173–210. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112086000587>
21. Nikulin D.A., Strelets Y.V. Numerical modeling of non-steady natural-convection of homogeneous compressible gas in a closed nonadiabatic region. *High Temperature*, 1984, vol. 22, no. 5, pp. 707–713.

22. **Cherkasov S.G., Laptev I.V.** Uproshhennyj raschet laminarnogo svobodno-konvektivnogo sloya v gaze [Simplified approach for natural convection laminar boundary layer calculation]. *Teplovyje protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2017, vol. 9, no. 4, pp. 146–153. In Russ.
23. **Cherkasov S.G., Laptev I.V., Anan'ev A.V., Gorodnov A.O.** Laminarnaya estestvennaya konvektsiya gaza v zamknutoj kvadratnoj oblasti [Laminar natural convection of gas in closed square cavity]. *Teplovyje protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2018, vol. 10, no. 5-6, pp. 182–191. In Russ.
24. **Cherkasov S.G., Anan'ev A.V., Moiseeva L.A.** Limitations of the Boussinesq model on the example of laminar natural convection of gas between vertical isothermal walls. *High Temperature*, 2018, vol. 56, no. 6, pp. 878–883. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0018151X18060081>
25. **Amirkhanyan N. V., Cherkasov S. G.** Theoretical analysis and procedure for the calculation of thermophysical processes occurring in a cryogenic vessel under conditions of nonvented storage. *High Temperature*, 2001, vol. 39, no. 6, pp. 905–911. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1013103425192>
26. **Cherkasov S.G., Mironov V.V., Mironova N.A., Moiseeva L.A.** Metod rascheta skorosti rosta davleniya pri bezdrenazhnom khranении zhidkogo vodoroda v emkostyakh [Method of calculation of pressure velocity growth at non-drainage storage of liquid hydrogen in enclosures]. *Izvestiya RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 4, pp.155–163. In Russ.
27. **Vargafik N.B.** *Spravochnik po teplofizicheskim svojstvam gazov i zhidkostej* [Reference book on thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow: Nauka, 1972. 720 p. In Russ.
28. **Qu'er'e P.L.** Modelling of natural convection flows with large temperature differences: a benchmark problem for low Mach number solvers. Part 1, reference solutions. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2005, vol. 39, no. 3, pp. 609–616.
29. **Gorodnov A.O., Laptev I.V., Cherkasov S.G.** Modelirovanie estestvennoj konvektsii szhimaemogo gaza v zamknutoj oblasti [Simulation of natural convection of a compressible gas in a closed region]. *Sbornik tezisov yubilejnoj konferentsii Natsional'nogo komiteta RAN po teplo- i massoobmenu «Fundamental'nye i prikladnye problemy teplo- i massoobmena» i «Problemy gazodinamiki i teplo- i massoobmena v ehnergeticheskikh ustanovkakh» – Extended abstracts of both jubilee conference “Fundamental and applied problems in heat and mass transfer” and “Problems of gas dynamics, heat and mass transfer in power plants”*, Publishing house MPEI, 2017, vol. 1, pp. 103–104. In Russ.
30. **Ferziger J.H., Peric M.** *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002. 423 p.