

УДК 539.3

Моделирование внутреннего вязкого трения в материале пластины при ее нестационарном нагружении с помощью дифференциальных и интегральных операторов

Воропай А.В.^{1*}, Гришакин В.Т.^{2}**

¹*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, Харьков, 61002, Украина*

²*Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет, (МАДИ), Ленинградский пр-т, 64, Москва, 125319, Россия*

**e-mail: voropay.alexey@gmail.com*

***e-mail: grichacin@yandex.ru*

Статья поступила 12.11.2019

Аннотация

В работе представлено сопоставление результатов расчета прогибов в некоторой точке вязкоупругой пластины, полученных в рамках классической теории тонких пластин Кирхгоффа, с результатами аналогичного расчета, основанного на уточненной теории типа С. П. Тимошенко для пластин средней толщины. При расчетах рассматривается поперечное импульсное нагружение прямоугольной однородной изотропной вязкоупругой пластины, шарнирно опертой по ее контуру. Учет внутреннего вязкого трения на основе модели Кельвина–Фойгта для пластин Кирхгоффа осуществлялся с использованием известного подхода, использующего дифференциальные операторы.

В работе предложен новый подход к анализу переходных процессов в вязкоупругом континууме, вызванных нестационарными силовыми возмущениями,

основанный на интегральных преобразованиях и теореме Эфроса. Этот подход использует сглаживающий линейный интегральный оператор и может быть применен для любых решений задач, в том числе авиационной и ракетно-космической отрасли, полученных в рамках теории упругости и представленных в виде интегралов Дюамеля.

Ключевые слова: нестационарное нагружение, вязкоупругая пластина, теория пластин Кирхгоффа, уточненная теория Тимошенко, внутреннее вязкое трение, модель Кельвина-Фойгта, теорема Эфроса.

1. Введение

Особый интерес у исследователей вызывает нестационарное нагружение элементов конструкций, обусловленное важностью и сложностью таких задач, для решения которых применяются как аналитические, так и численные методы [1-2]. Отметим актуальность исследований связанных с уточнением моделей деформирования, усложнением геометрии объектов и их закрепления, а также учетом влияния дополнительных подкреплений и орebrения [3–5].

В ряде случаев исследуемые процессы могут быть нелинейными в силу различных факторов [6–12]. При деформировании большинства реальных элементов конструкций происходит не чисто упругое, а вязкоупругое деформирование [13–15]. В случае, когда вязкие (пластические) деформации малы – ими пренебрегают. Однако, в ряде случаев диссипацию энергии при механических колебаниях

необходимо учитывать, и для нелинейных колебаний справедливы вязкоупругие постановки.

Для решения задач нестационарного деформирования упругих элементов конструкций существует несколько общепринятых аналитических методов. Один из основных методов – это использование интегрального преобразования Лапласа. Многие решения могут быть представлены в виде интегралов Дюамеля с ядрами Коши, что подробно изложено, например, в монографиях [16-17].

2. Постановка задачи

Учет диссипативных свойств вязкоупругих материалов, как правило, осуществляется с использованием дифференциальных операторов [14-15]. Такой подход широко известен в научной литературе, хорошо разработан и многократно проверен. Например, в монографии [15] в рамках классической теории тонких пластин Кирхгоффа приведены дифференциальные уравнения в вязкоупругой постановке.

В статьях [18-19] показано, что для решений в виде свёрточных интегралов с ядрами Коши можно модификацией ядра моделировать наличие внутреннего вязкого трения Кельвина–Фойгта. Этот подход использует сглаживающий линейный интегральный оператор и может быть применен для любых решений, полученных в рамках теории упругости, которые могут быть представлены в виде интегралов Дюамеля.

Представляет интерес сопоставление результатов расчета нестационарных прогибов в некоторой точке вязкоупругой тонкой пластины Кирхгоффа с

результатами аналогичного расчета для пластин средней толщины, основанного на уточненной теории типа Тимошенко.

3. Использование дифференциальных операторов

Общий вид аналитического решения задачи упругого деформирования элементов конструкций можно записать в следующей форме

$$u(t) = \int_0^t K_0(t-\tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где $u(t)$ – перемещения исследуемого объекта в некоторой точке, $P(t)$ – внешняя нестационарная нагрузка, вызывающая колебания, $K_0(t-\tau)$ – ядро интеграла, несущее информацию об упруго деформируемом объекте (индекс «0» в обозначении ядра использован для уточнения постановки задачи, а именно упругости изучаемого объекта нагружения).

Отметим, что при упругой постановке задачи ядро интеграла (1) может быть вычислено по формуле [17]:

$$K_0(t) = \sum_j f(\omega_j) \frac{\sin(\omega_j t)}{\omega_j}, \quad (2)$$

где ω_j – круговые (циклические) частоты свободных колебаний исследуемого объекта, $f(\omega_j)$ – амплитудные функции в точке приложения возмущающего воздействия.

Учет внутреннего трения в материале возможен с применением дифференциального оператора Кельвина-Фойгта, как это выполнено в монографии [15], в которой зависимость напряжений от времени $\sigma(t)$ имеет вид:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \quad (3)$$

где $\varepsilon(t)$ - зависимость от времени деформаций исследуемого объекта, α – время релаксации деформаций в материале объекта.

Очевидно, что применение указанного оператора приводит к появлению в ядре уравнения (1) слагаемого, пропорционального $\frac{du(t)}{dt}$, а учет затухания колебаний в этом случае будет осуществлен с помощью экспоненциальной зависимости. Следовательно, выражение для ядра уравнения (1) примет форму

$$K_{\eta}(t) = \sum_j f(\omega_j) \cdot e^{-\alpha_j t} \frac{\sin(\beta_j t)}{\beta_j}, \quad (4)$$

где вещественные частоты ω_j те же, что и в уравнении (2), а комплексные частоты $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ являются корнями характеристического уравнения:

$$\lambda_j^2 + \eta\omega_j^2\lambda_j + \omega_j^2 = 0, \quad (5)$$

откуда

$$\alpha_j = \eta\omega_j^2/2, \quad \beta_j = \omega_j\sqrt{1 - \eta^2\omega_j^2/4}. \quad (6)$$

В зависимости от формы исследуемых объектов деформирования и используемых моделей, применение дифференциальных операторов для учета диссипации энергии колебаний может приводить к сильно разнящимся по форме выражениям, описывающим затухающие колебания указанных объектов. Как следствие – возможные различия в результатах численных экспериментов даже в тех случаях, когда есть основания считать поведение моделей одинаковым.

Использование интегральных операторов для учета внутреннего трения в этом смысле можно считать более совершенным.

4. Использование интегральных операторов

Если решение уравнения колебаний упругого континуума представлено в виде (1), то учет диссипации сводится к корректировке указанного соотношения, что сводится к введению интегрального ядра $K_\eta(t)$, форма которого сглажена трением:

$$u(t) = \int_0^t K_\eta(t - \tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Если нагрузка приложена не в одной точке, а в дискретном наборе или на континуальном множестве точек, то используется принцип линейной суперпозиции, и в правой части равенств (1) и (7) появляется сумма или еще один (внешний) интеграл.

Для случая вязкого внутреннего трения в статьях [18, 19] с учетом теоремы Эфроса об оригинале сложного изображения [20, 21] доказано, что ядра $K_0(t)$ и $K_\eta(t)$ связаны соотношением

$$K_\eta(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau, \quad (8)$$

где

$$\Psi_\eta(s, \tau) = \frac{1}{1 + \eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + \eta s}}\right). \quad (9)$$

Здесь неотрицательное число τ играет роль параметра.

Очевидно, учет трения сводится к корректировке разностного ядра Коши в интеграле (1), и операция корректирования ядра одинакова для всех упругих систем и для всех точек системы.

Корректирующее ядро $\Psi(t, \tau)$ при $\eta = 0$ примет вид

$$\Psi_0(s, \tau) = e^{-\tau s}, \quad (10)$$

что соответствует оригиналу

$$\Psi_0(t, \tau) = \delta(t - \tau), \quad (11)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Следовательно,

$$K_\eta(t) = \int_0^\infty \delta(t - \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau = K_0(t) \quad (12)$$

а интеграл дельта-функции Дирака, как известно, есть функция Хевисайда:

$$\int_0^\infty \delta(t - \tau) d\tau = H(t - \tau).$$

Но если коэффициент трения $\eta > 0$, то для отыскания оригинала полученного изображения требуется разработка специального метода нахождения корректирующего ядра.

Аналитически функцию $\Psi_\eta(t, \tau)$ для случая внутреннего трения получить довольно сложно, и так как для решения практических задач в дальнейшем для всех полученных выражений будет выполняться дискретизация, то функция $\Psi_\eta(t, \tau)$ определялась численно. Значения функции $\Psi_\eta(t, \tau)$ оказались положительными, а характерный вид графиков при $t/\eta \gg 1$, показан на рис. 1.

Анализ расчетных кривых показал, что в случае внутреннего трения при условии $t > 3\eta$ расчетные кривые близки к форме графика плотности нормального распределения (то есть, к кривой Гаусса $\rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t})$), причем максимум кривой близок к моменту t , но несколько отклоняется в меньшую сторону (рис.1).

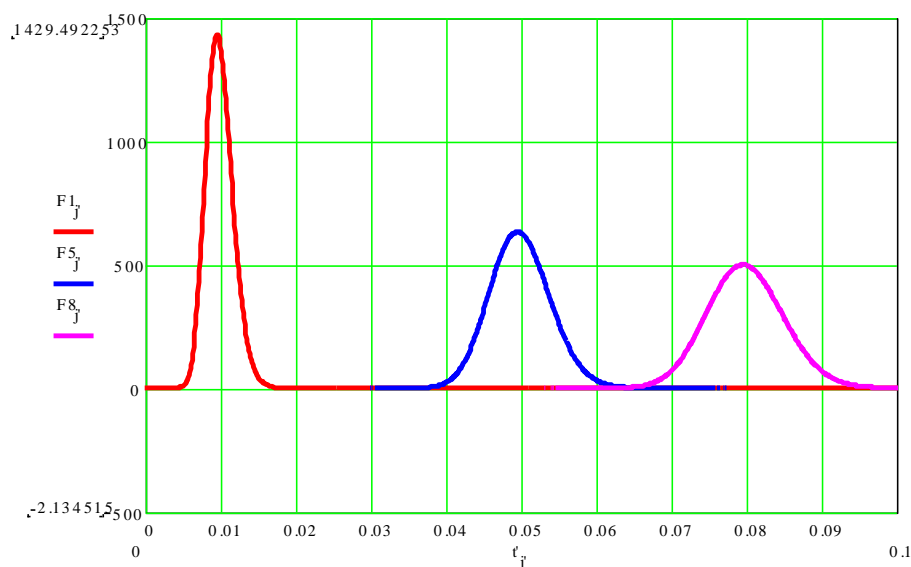


Рис. 1. Численное определение $\Psi_{\eta}(t, \tau)$

При выполнении условия $t/\eta \gg 1$ эта функция имеет следующий вид:

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int e^{-\frac{(\tau-t)^2}{2\cdot\sqrt{\sigma}}} d\tau, \quad (13)$$

где $\sigma^2 = \eta t$ – дисперсия (см. рис. 1); $\Psi_{\eta}(t, \tau)$ совпадает с функцией $\rho_0(\tau - a, \sigma)$ плотности нормального распределения, имеющего математическое ожидание $a = t$ и дисперсию σ^2 .

На классе оригиналов $y = K(t)$, заданных при значениях $t \geq 0$, кусочно-непрерывных и интегрируемых на любом конечном промежутке изменения аргумента t , определим линейный интегральный оператор формулой

$$\mathcal{G}_\eta[K(t)] = \int_0^\infty \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t}) \cdot K(\tau) d\tau. \quad (14)$$

Именно этот оператор при условии $t/\eta \gg 1$ по формуле $K_\eta(t) = \mathcal{G}_\eta[K_0(t)]$ выполняет сглаживающую корректировку ядра $K_0(t)$ при учете внутреннего трения Кельвина–Фойгта, поэтому его можно называть сглаживающим линейным интегральным оператором Кельвина–Фойгта (ОКФ).

ОКФ во многом напоминает известный фильтр Гаусса [22], используемый при обработке результатов эксперимента, но имеется существенное отличие: здесь дисперсия – это переменная величина, которая увеличивается пропорционально корню из времени t . В результате чего носитель корректирующего ядра приобретает клиновидную форму.

Как и любой другой оператор, ОКФ можно применять повторно; кроме того, можно перемножать (то есть применять последовательно) ОКФ, отвечающие различным коэффициентам вязкости. В статьях [16–17] доказана соответствующая теорема.

5. Применение ОКФ при численных расчетах

Вид дельта-функции Дирака хорошо известен и представляет собой импульс бесконечно малой ширины и бесконечно большой высоты, площадь которого равна единице, имеет четкое математическое обоснование. Однако имеется ряд вопросов с

его физическим обоснованием и реализацией. В случае учёта диссипации энергии дельта-функция заменяется на дельта-образующую последовательность (для случая вязкого трения на основе интеграла Гаусса – см. рис. 1) и картина становится более реалистичной, то есть у нас имеются амплитуды конечной высоты и конечной ширины 6σ (т.к. $t \pm 3\sigma$). Причем в зависимости от момента времени и коэффициента диссипации ширина будет меняться при постоянстве площади. Это подтверждается современными исследованиями упругих материалов при нагружении: в большинстве случаев вязкоупругие или пластические деформации всё же появляются, но они пренебрежимо малы.

Использование интеграла Гаусса при выполнении преобразования Эфроса для ядра позволяет заменить пределы интегрирования в выражении (12) от 0 до ∞ на $t - 3\sigma$ и $t + 3\sigma$ соответственно:

$$K_{\eta}(t) = \int_{t-3\sigma}^{t+3\sigma} \Psi_{\eta}(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau. \quad (15)$$

После дискретизации выражение (15) эквивалентно следующему матричному соотношению:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{A}_G \mathbf{K}, \quad (16)$$

где вектор \mathbf{K} соответствует «упругому» ядру Коши $K_0(t)$ в выражении (1), вектор \mathbf{K}_G – ядру $K_{\eta}(t)$ для вязкоупругого случая в выражении (7), а матрица \mathbf{A}_G – является по сути весовой Гауссовой матрицей, соответствующей $\Psi_{\eta}(t, \tau)$, причем ее элементы могут быть получены с использованием интеграла Гаусса, или с помощью

функции распределения вероятности этого интеграла (рис. 2), в случае, если при дискретизации выражения (12) использовать частичное интегрирование:

$$K_G(t_j) = \sum_{i=J1}^{J2} K_0(t_i) \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} \Psi_\eta(t_j, \tau) d\tau, \quad (17)$$

где $t_j = j \cdot \Delta t$ – дискретное время, $J1$ и $J2$ – числа соответствующие моментам времени $t_j - 3\sigma_j$ и $t_j + 3\sigma_j$.

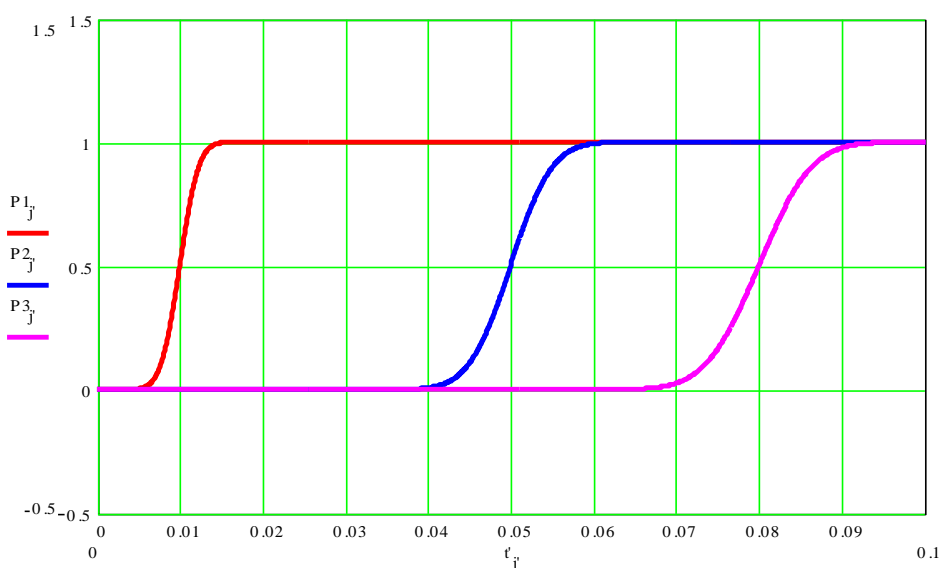


Рис. 2. Изменение функции вероятности

Напомним, что для предельного случая, когда $\eta = 0$, вместо функции плотности вероятности (рис. 2), в формулу (12) войдёт функция Хевисайда. Таким образом, можно сказать, что вязкоупругая модель (учитывающая диссипацию) сглаживает фронт изменений, причем большим значениям коэффициента η будет соответствовать более сильное сглаживание скачка и его наклона (более плавный переход от нуля к единице).

Укажем, что для получения дискретного вектора \mathbf{K}_G с J -элементами необходимо иметь исходный вектор \mathbf{K} , для которого будет известно

$J_\sigma = J + 3 \cdot \sigma_J / \Delta t$ значений, а также рассчитать элементы весовой матрицы \mathbf{A}_G размером $J * J_\sigma$.

Таким образом, для перехода от упругой модели к вязкоупругой, согласно матричному выражению (11) необходимо получить один раз для конкретной задачи весовую матрицу \mathbf{A}_G . Затем модифицировать все упругие ядра \mathbf{K} в \mathbf{K}_G , при этом длина вязкоупругих ядер станет короче, то есть потеряется небольшая часть информации в конце исследуемого промежутка времени, так как дисперсия для $\Psi_\eta(t, \tau)$ зависит от Δt и величины коэффициента диссипации: $\sigma_J = f(\eta, \Delta t)$.

6. Численные расчеты для прямоугольных пластин

Выражение для определения прогиба шарнирно опертой пластины (рис. 3) в случае, когда на неё действует нестационарная поперечная нагрузка $P(t)$ импульсного типа (рис. 4), приведены, например, в [17], и имеют следующий вид:

$$w(x, y, t) = \int_0^t K_w(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где $w(x, y, t)$ – изменение прогиба пластины во времени; $K_i(x, y, t)$ – упругие разностные ядра интегралов типа свертки в точке пластины с координатами (x, y) .

Методы получения ядер и их вид описаны в [16-17].

Если считать, что возмущающая сила является сосредоточенной нагрузкой, то соответствующие ядра $K_w(t)$ для шарнирно-опертой пластины классической теории можно представить в виде

$$K_w(x_S, y_S, t) = \frac{4}{\rho h l m} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_{kn} t} \frac{\sin \beta_{kn} t}{\beta_{kn}} \times \quad (19)$$

$$\times \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right),$$

где $\beta_{kn} = \sqrt{\omega_{kn}^2 - \alpha_{kn}^2}$; $\alpha_{kn} = \frac{\eta D}{2\rho h} \left(\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{m}\right)^2 \right)$; $\omega_{kn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left(\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{m}\right)^2 \right)}$,

D – цилиндрическая жесткость пластины; ρ – плотность материала пластины; l , m и h – размеры пластины (рис. 3); (x_0, y_0) – координаты точки O , в которой прикладывается нагрузка, а (x_S, y_S) – координаты точки S , в которой определяется изменение прогиба во времени.

Для пластины средней толщины по модели типа С. П. Тимошенко ядра Коши будут иметь вид:

$$K_w(x_S, y_S, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin(\omega_{1kn} t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin(\omega_{2kn} t)] \times \quad (20)$$

$$\times \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right),$$

где ω_{1kn} и ω_{2kn} – собственные частоты колебаний пластины.

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью xOy декартовой системы координат.

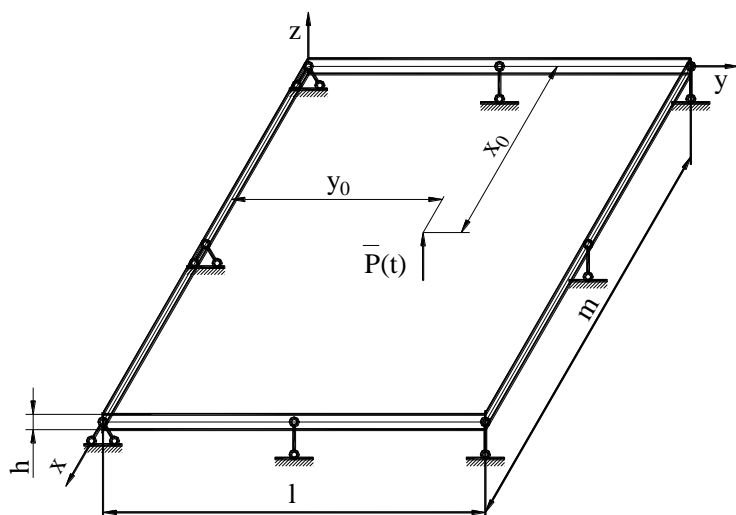
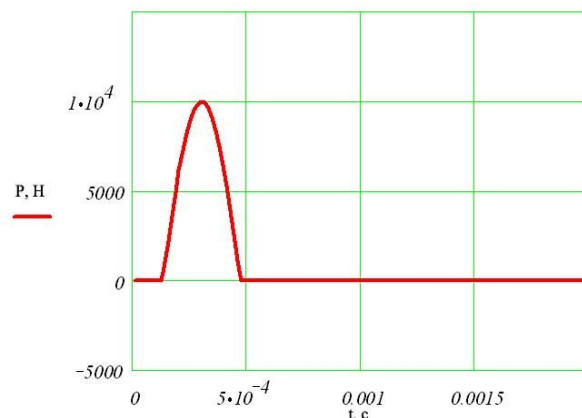


Рис. 3. Схема нагружения пластины

Рис. 4. Зависимость $P(t)$

Расчеты производились при следующих значениях параметров:

- плотность материала $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$; модуль упругости $E = 2.07 \cdot 10^{11} \text{ Па}$;
- толщина пластины $h = 0.04 \text{ м}$; длина $l = 0.8 \text{ м}$, ширина $m = 0.5 \text{ м}$;
- координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения: $x_0 = 0.5 \text{ м}$, $y_0 = 0.35 \text{ м}$;
- координаты точки, в которой исследуются вязкоупругие колебания пластины: $x_S = 0.3 \text{ м}$, $y_S = 0.2 \text{ м}$.

Укажем, что точками O и S могут быть любые точки пластины, не принадлежащие ее контуру.

Число слагаемых в соответствующих двойных рядах Фурье, описывающих разложение решения по собственным формам колебаний, во всех случаях составляло 40×40 ; но, как указывалось выше, после учета трения оно (без снижения точности расчета) могло быть сокращено до $80 \dots 100$ гармоник.

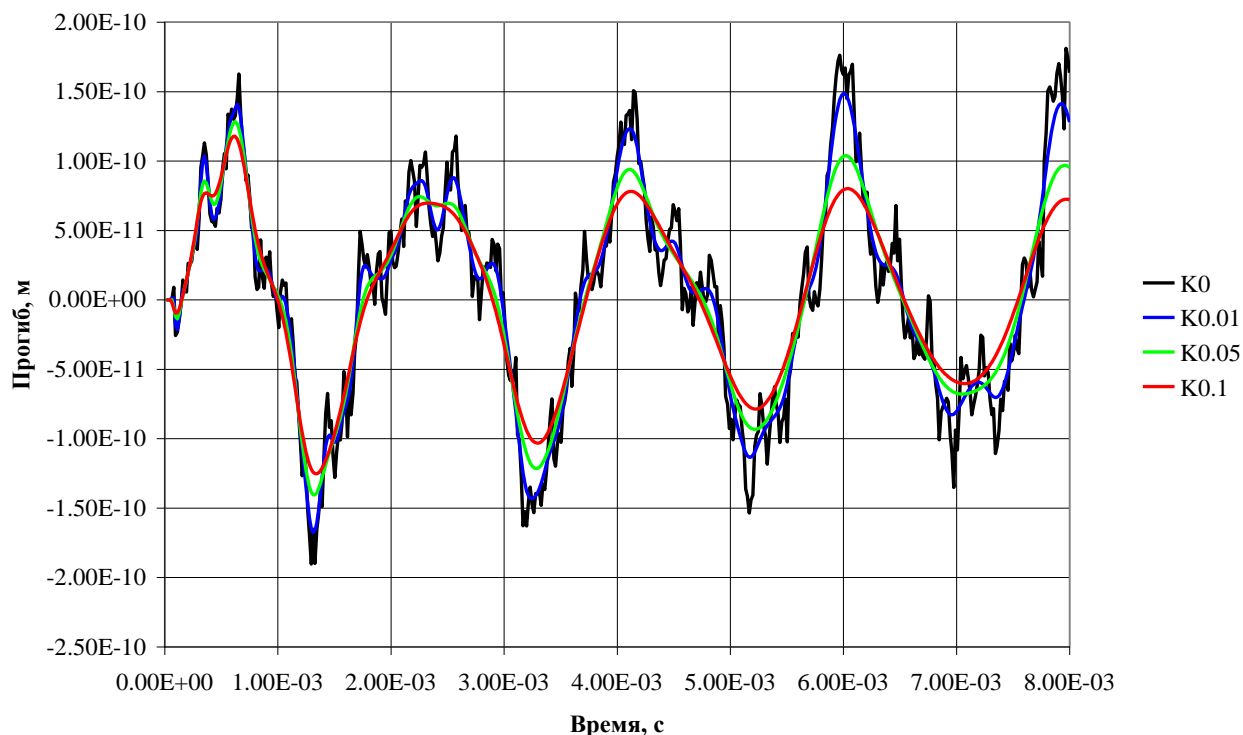


Рис. 5. Вид исходных и модифицированных ядер Коши

На рис. 5 представлен вид ядер (20) для свёрточных интегралов (18): кривая 1 – это исходное ядро, а кривые 2, 3 и 4 соответствуют модифицированным (согласно описанной выше процедуре) ядрам с декрементами затухания основной формы колебаний $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.05$, $d_0 = 0.1$.

Результаты расчетов прогиба без учета трения и при заданных декрементах затухания колебаний для пластин теории С.П. Тимошенко приведены на рис. 6. Кривой 1 отвечает упругое изменение прогиба, а кривым 2, 3 и 4 – прогибы с учетом внутреннего вязкого трения при $d_0 = 0.01$, $d_0 = 0.05$, $d_0 = 0.1$, соответственно. Возбуждающая сила (вид которой приведен на рис. 4) представляла собой первую полуволну синусоиды с амплитудой 10 кН и длительностью 1.6 мс; началу импульса отвечает время 0.8 мс.

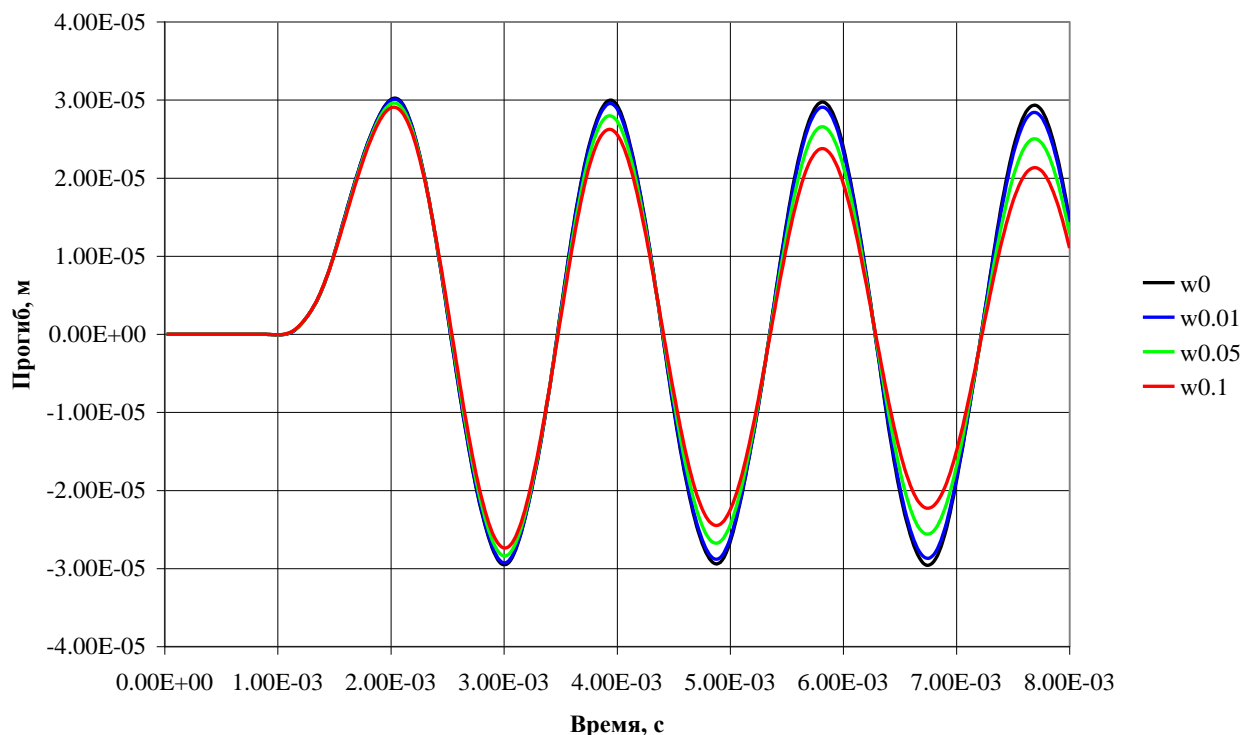


Рис. 6. Изменения прогиба пластин теории С.П. Тимошенко при колебаниях (расчет с учетом и без учета вязкого трения)

На рис. 7 сопоставлены результаты расчетов изменения прогибов некоторой точки S пластины в рамках классической теории тонких пластин Кирхгофа и уточненной теории пластин средней толщины типа Тимошенко.

Укажем, что учёт внутреннего вязкого трения для пластин Кирхгофа осуществлялся с использованием дифференциального оператора в рамках модели Кельвина–Фойгта, а для пластин типа Тимошенко – сглаживающего линейного интегрального оператора ОКФ.

Кривым 1 и 3 отвечает упругое изменение прогиба, а кривым 2 и 4 – вязкоупругие прогибы при $d_0 = 0.05$ (логарифмический декремент затухания 5%).

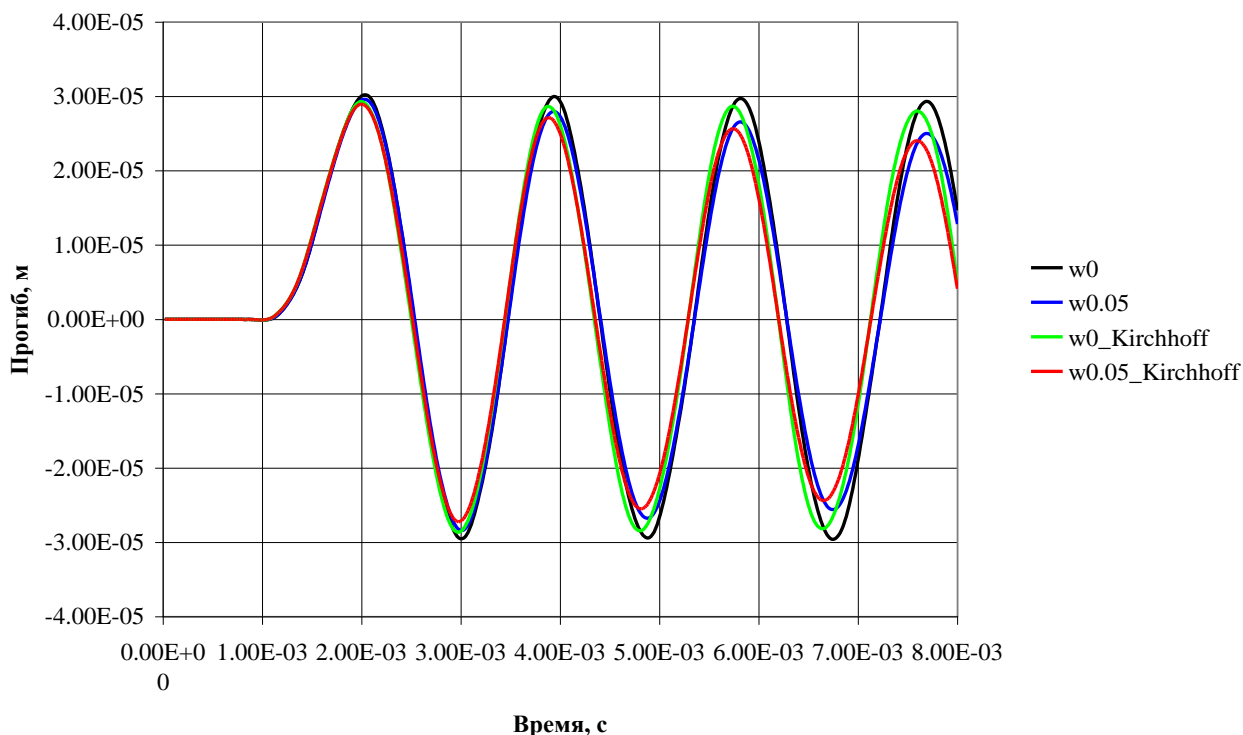


Рис. 7. Изменения прогиба пластин типа Тимошенко и Кирхгоффа
(расчет с учетом и без учета вязкого трения)

Приведенные на рис. 7 графики позволяют сделать вывод о том, что применение дифференциальных и интегральных операторов для учета диссипации энергии при деформировании вязкоупругих пластин (к тому же с разными гипотезами деформирования – Кирхгофа и Тимошенко) дает близкие результаты. Видно, что имеются примерно одинаковые расхождения между двумя парами кривых: упругие прогибы, рассчитанные в рамках гипотез Кирхгофа, имеют немного более высокие частоты и чуть меньшие амплитуды. Это известный факт и аналогичная закономерность прослеживается для полученных результатов расчетов в вязкоупругой постановке.

Таким образом, два независимых подхода (с использованием дифференциальных и интегральных операторов), применённых к разным моделям деформирования (существенное отличие дифференциальных уравнений в частных производных) демонстрируют хорошее совпадение. Это подтверждает достоверность выполненных расчётов, что оба решения получены верно, а также правильность разработанного нового подхода, корректность введения и использования сглаживающего интегрального оператора ОКФ.

Выводы

Разработан новый численно-аналитический метод расчета переходных процессов, происходящих под воздействием нестационарного силового нагружения, для вязкоупругого континуума, моделируемого с учетом внутреннего вязкого трения, которое описывается моделью Кельвина–Фойхта. Имеется хорошее совпадение результатов расчетов на базе предложенного подхода с результатами аналогичных расчетов на базе классических уравнений для вязкоупругих пластин (использующих дифференциальные операторы).

Главным достоинством, которое предопределило высокую эффективность нового метода, является то, что он не использует информацию о структуре решения, а именно о частотах и формах свободных колебаний континуума. Следовательно, он не чувствителен к погрешностям описания граничных условий и несовершенству принятых гипотез деформирования (Кирхгофа, С.П. Тимошенко, и др.), благодаря чему его удастся использовать в режиме обработки осциллограмм, полученных в результате проведения эксперимента.

Метод позволяет выделять из исследуемых колебаний так называемую упругую составляющую и наименее трудоемким способом моделировать переходные процессы при различных значениях коэффициента трения, что, например, отвечает изменяющемуся термическому состоянию материала.

Возможности разработанного метода проиллюстрированы на примере вынужденных нестационарных колебаний двумерного континуума – прямоугольной пластины.

Библиографический список

1. Митин А.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твердого эллиптического параболоида // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=107884>
2. Голдовский А.А. Численные модели прогнозирования контактных зон в результате ударного взаимодействия авиационных конструкций с преградой при аварийных ситуациях // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=107919>
3. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=107919>
4. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на

основе уточненной теории // Труды МАИ. 2018. № 103. URL:
<http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>

5. Фирсанов В.В., Во А.Х., Чан Н.Д. Исследование напряженного состояния подкрепленных оболочек по уточненной теории с учетом влияния упругости ребер и защемленного края // Труды МАИ. 2019. № 104. URL:
<http://trudymai.ru/published.php?ID=102130>

6. Marco Amabili. Nonlinear vibrations of viscoelastic rectangular plates // Journal of Sound and Vibration, 2015, DOI: [10.1016/j.jsv.2015.09.035](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2015.09.035)

7. Litewka P., Lewandowski R. Nonlinear harmonically excited vibrations of plates with Zener material // Nonlinear Dynamics, 2017, vol. 89 (1). DOI: [10.1007/s11071-017-3480-7](https://doi.org/10.1007/s11071-017-3480-7)

8. Ari M., Faal R.T., Zayernouri M. Vibrations Suppression of Fractionally Damped Plates using Multiple Optimal Dynamic Vibration Absorbers // International Journal of Computer Mathematics, 2019, DOI: 10.1080/00207160.2019.1594792

9. Assaee H., Nazanin P. Development of a viscoelastic spline finite strip formulation for transient analysis of plates // *Thin-Walled Structures*, 2018, vol. 124, pp. 430 - 436. DOI: [10.1016/j.tws.2017.12.021](https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.12.021)

10. Asnafi Alireza. Chaotic analysis of Kelvin–Voigt viscoelastic plates under combined transverse periodic and white noise excitation: an analytic approach // *Acta Mechanica*, 2019, pp. 1 - 16.

11. Dastjerdi S., Abbasi M. A new approach for time-dependent response of viscoelastic graphene sheets embedded in visco-Pasternak foundation based on nonlocal FSDT and

MHSDT theories // Mechanics of Time-Dependent Materials, 2019, pp. 1 - 33.

<https://doi.org/10.1007/s11043-019-09424-1>

12. Иванов С.В., Могилевич Л.И., Попов В.С. Продольные волны в нелинейной цилиндрической оболочке, содержащей вязкую жидкость // Труды МАИ. 2019. №

105. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=104003>

13. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. - Киев: Наукова думка, 1971. - 375 с.

14. Василенко Н.В. Теория колебаний. - Киев: Вища школа, 1992. – 430 с.

15. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. - М.: Наука, 1960. - 186 с.

16. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Воропай Н.И., Гнатенко Г.А., Гришакин В.Т. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х ч. - Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. Ч. 1. - 180 с.

17. Янютин Е.Г., Воропай А.В., Поваляев С.И., Янчевский И.В. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография в 2-х частях. Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. Ч. II. - 212 с.

18. Воропай А.В., Григорьев А.Л. Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций // Вестник национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Серия: Математическое моделирование в технике и технологиях. 2017. № 6 (1228). С. 29 – 44.

19. Воропай А.В., Григорьев А.Л. Использование сглаживающих интегральных операторов для учета внутреннего трения при нестационарном деформировании элементов конструкций // Механика и машиностроение. 2018. № 1. С. 3 - 22.
20. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. - М.: Наука, 2003. - 208 с.
21. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. - 524 с.
22. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике – М.: Наука, 1977. – 832 с.