Вестник Московского авиационного института. 2021. Т. 28. №4. С. 180-191.
Aerospace MAI Journal, 2021, vol. 28, no. 4, pp. 180-191.

Научная статья
УДК 621.45.00.11.24:629.735
DOI: 10.34759/vst-2021-4-180-191

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАБОЧЕГО ТЕЛА ДЛЯ ТЕРМОГАЗОДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ГАЗОТУРБИННОГО ДВИГАТЕЛЯ

Андрей Юрьевич Ткаченко

Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва (Самарский университет), Самара, Россия
tau@ssau.ru

Аннотация. Представлена модель рабочего тела газотурбинных двигателей, позволяющая учитывать зависимость термодинамических свойств и газодинамических функций от температуры и состава рабочего тела. Метод имеет широкий спектр применений и может быть использован для создания эффективных алгоритмов расчета рабочего процесса газотурбинного двигателя.

Ключевые слова: модель рабочего тела, газотурбинный двигатель, математическое моделирование, термодинамические свойства рабочего тела, газодинамические функции.

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации комплексного проекта по созданию высокотехнологичного производства по теме: «Организация высокотехнологичного производства индустриальных ГТД с интеллектуальной системой конструкторско-технологической подготовки для повышения функциональных характеристик» (Соглашение о предоставлении гранта № 075-11-2021-042 от 24.06.2021 г.)

Для цитирования: Ткаченко А.Ю. Математическая модель рабочего тела для термогазодинамического расчета газотурбинного двигателя // Вестник Московского авиационного института. 2021. Т. 28. № 4. С. 180-191. DOI: 10.34759/vst-2021-4-180-191

Original article

WORKING FLUID MATHEMATICAL MODEL FOR THE GAS TURBINE ENGINE THERMO-GAS-DYNAMIC DESIGN

Andrey Yu. Tkachenko

Samara National Research University named after academician S.P. Korolev (Samara University), Samara, Russia
tau@ssau.ru

© Ткаченко А.Ю., 2021

Abstract

The article presents the results of a study aimed at enhancing accuracy and computational efficiency of algorithms for working fluid thermodynamic properties and functions determining used for the gas turbine engine workflow computing.

The working fluid of an atmospheric gas turbine engine is a mixture of seven general individual components such as nitrogen, oxygen, water vapor, carbon dioxide, sulfur dioxide, argon and helium. Setting values of relative mass fractions of components allows calculate the working fluid parameters depending on the properties of the above-said components.

Expressions and corresponding coefficients for a mixture thermodynamic properties and functions computing were obtained based on the existing dependencies of the isobaric heat capacity on temperature for the above-listed components. A new thermodynamic function *j* was introduced, which allowed establishing a relationship between the total and critical temperatures of the working fluid, with account for its composition and variable heat capacity.

The expressions being presented allow replacing conventional isentropic functions based on the assumption of a constant heat capacity. Application of these new expressions for isentropic relationships between total, static and critical state parameters ensures higher adequacy and better reliability of a gas turbine engine thermodynamic model. This became possible since the isentropic functions are accounting for the dependence of properties on working fluid composition and temperature as well.

The developed approach for the working fluid properties numerical modeling allows creating the time-efficient algorithms for thermodynamic and gas-dynamic process simulation. It has a wide range of applications and scaling capability to create more complex working fluid models.

Keywords: working fluid, gas turbine engine, mathematical modeling, thermodynamic properties, heat capacity, enthalpy, entropy, temperature, composition, workflow.

Funding: the work was performed with the financial support of the Ministry of Education and Science of Russian Federation within the framework comprehensive project realization on high-tech production creation on the subject of “Organization of High-Tech Production of Industrial Gas Turbine Engines with Intellectual System of Design-Technology Preparation to Increase Functional Characteristics” (Agreement on Grant Provision No. 075-11-2021-042 dated 24.06.2021)

For citation: Tkachenko A.Y. Working fluid mathematical model for the gas turbine engine thermo-gas-dynamic design. *Aerospace MAI Journal*, 2021, vol. 28, no. 4, pp. 180-191. DOI: 10.34759/vst-2021-4-180-191

Введение

Математическое моделирование рабочего процесса газотурбинных двигателей широко применяется в научных исследованиях и поисковых разработках, а также на всех этапах жизненного цикла двигателя, включая проектирование, доводку, серийное производство и эксплуатацию [1—7]. Этому способствует рост мощности вычислительных средств, развитие их программного обеспечения. В свою очередь, необходима разработка алгоритмов и численных методов, обеспечивающих максимально эффективную реализацию математических моделей и организацию вычислительных процессов на современных компьютерах.

В течение ряда лет происходило непрерывное совершенствование методов расчета параметров и характеристик газотурбинных двигателей. Одним из важных направлений такого совершенствования являлась разработка более эффективных способов определения термогазодинамических параметров рабочего тела. В настоящее время в подавляющем большинстве известных методик термогазодинамического расчета ГТД с помощью ЭВМ общепринятым является использование зависимостей изобарной теплоемкости, энтальпии и изобарной энтропии от температуры рабочего тела и коэффициента избытка воздуха [8—10]. Фундаментальными трудами о свойствах различных веществ являются справочники [11, 12], в которых собраны спектроскопические данные с учетом новых значений основных физических констант.

Особенности существующих способов представления зависимостей между термодинамическими параметрами рабочего тела ограничивают область применения некоторых из них и могут затруднить сопоставление результатов расчетов.

Кроме того, различные способы представления указанных зависимостей неэквивалентны с точки зрения затрат машинного времени, что в некоторых случаях является определяющим фактором. Анализ публикаций за последние 10 лет показывает почти полное отсутствие исследований в области совершенствования математической модели рабочего тела газотурбинных двигателей. Однако потребность в ее развитии становится все более актуальной задачей в связи с разработкой и внедрением в процесс проектирования двигателей цифровых двойников, разработкой интеллектуальных систем управления и диагностики, а также повышением требований к адекватности и достоверности получаемых с использованием компьютерных моделей результатов.

Рабочим телом для открытых термодинамических систем, к которым относятся авиационные газотурбинные двигатели и наземные газотурбинные установки, служит атмосферный воздух и его производные, например продукты сгорания углеводородного топлива. При этом рабочее тело представляет собой смесь газов, перечень которых достаточно широк. Для формирования адекватной и эффективной расчетной модели рабочего тела необходимо выбрать минимальный набор составляющих компонентов, которые вносят наибольший вклад в величину термодинамических свойств, и отбросить те компоненты, которые не имеют значимого влияния.

Основными компонентами сухого атмосферного воздуха являются азот (N_2), кислород (O_2), углекислый газ (CO_2), аргон (Ar) и гелий (He), объёмные доли которых составляют соответственно 78,084%, 20,9476%, 0,0314%, 0,934% и 0,0524% (ГОСТ 4401-81, ISO 2533-75). Влажный воздух может содержать значительное количество водяного пара (H_2O). При высокой температуре и относительной влажности его массовая доля превышает 4%. Кроме того, водяной пар и углекислый газ являются продуктами окисления углеводородного топлива. Диоксид серы (SO_2) также может вносить значительный вклад в свойства рабочего тела, так как является продуктом сгорания некоторых сортов топлива с высоким содержанием серы. Все перечисленные газы, наряду с метаном и другими углеводородами, также являются основными компонентами газообразного топлива.

Поэтому рабочее тело газотурбинных и других атмосферных тепловых двигателей при их численном моделировании и исследовании целесообразно рассматривать как смесь семи основных компонентов: N_2, O_2, H_2O, CO_2, SO_2, Ar и He. В некоторых задачах для упрощения можно ограничиться только четырьмя компонентами: N_2, O_2, H_2O, CO_2.

В этом случае модель рабочего тела описывается совокупностью массовых долей данных компонентов, а также все термодинамические свойства и газодинамические функции рабочего тела рассчитываются в зависимости от свойств этих компонентов.

Расчет удельной изобарной теплоёмкости компонентов рабочего тела

Базовым термодинамическим свойством i-го компонента рабочего тела в идеально газовом состоянии является зависимость удельной изобарной теплоёмкости c_{pi} от абсолютной температуры T.

На практике встречаются различные способы описания данной зависимости, но наибольшее распространение получили полиномиальные функции. Общепризнанным стандартом в этой области является методика расчета свойств индивидуальных веществ, описанная в [13—16], на основе которой и разработана представленная модель.

В данной методике зависимость c_{pi} от T описывается двумя наборами семи коэффициентов полинома со степенями от –2 до 4 для двух диапазонов температур: от 200 до 1000 K и от 1000 до 6000 K.

Таким образом, удельная изобарная теплоёмкость компонента (индивидуального газа) рассчитывается по следующим формулам:

при 200 K ≤ T ≤ 1000 K

$$c_{pi}(T) = R_i\left(a_{1i}T^{-2} + a_{2i}T^{-1} + a_{3i} + \right.$$
$$\left. + a_{4i}T + a_{5i}T^2 + a_{6i}T^3 + a_{7i}T^4\right);$$

при 1000 K < T ≤ 6000 K

$$c_{pi}(T) = R_i\left(b_{1i}T^{-2} + b_{2i}T^{-1} + b_{3i} + \right.$$
$$\left. + b_{4i}T + b_{5i}T^2 + b_{6i}T^3 + b_{7i}T^4\right),$$

где R — газовая постоянная компонента.

Удельная изобарная теплоёмкость, рассчитанная по данным формулам, имеет такую же размерность, как и газовая постоянная, обычно кДж/(кг·K).

Газовая постоянная рассчитывается в зависимости от молярной массы компонента μ_i и универсальной газовой постоянной R_μ:

$$R_i = \frac{R_\mu}{\mu_i},$$

где $R_\mu = 8{,}31451 \dfrac{\text{кДж}}{\text{кмоль} \cdot \text{К}}$.

Значения коэффициентов полиномов, молярные массы и газовые постоянные основных компонентов представлены в табл. 1 и 2.

С целью исключения повторяющихся вычислений исходные полиномы преобразованы путём перемножения каждого коэффициента на газовую постоянную к следующему виду:

при $T \in [200{,}1000]$ К

$$c_{pi}(T) = \left(ac_{1i}\frac{1}{T} + ac_{2i}\right)\frac{1}{T} +$$

$$+ac_{3i} + \left(ac_{4i} + \left(ac_{5i} + \left(ac_{6i} + ac_{7i}T\right)T\right)T\right)T;$$

при $T \in (1000{,}6000]$ К

$$c_{pi}(T) = \left(bc_{1i}\frac{1}{T} + bc_{2i}\right)\frac{1}{T} +$$

$$+bc_{3i} + \left(bc_{4i} + \left(bc_{5i} + \left(bc_{6i} + bc_{7i}T\right)T\right)T\right)T.$$

Таблица 1

Значения молярной массы, газовой постоянной и исходных коэффициентов полиномов удельной изобарной теплоёмкости для N_2, O_2, H_2O и CO_2

Константы и коэффициенты	Компонент			
	N_2	O_2	H_2O	CO_2
μ_i, кг/кмоль	28,0134	31,9988	18,01528	44,0095
R_i, кДж/(кг·К)	0,296805	0,259838	0,461525	0,188925
a_{1i}	+2.210371497E+04	-3,425563420E+04	-3.947960830E+04	+4.943650540E+04
a_{2i}	-3.818461820E+02	+4,847000970E+02	+5.755731020E+02	-6.264116010E+02
a_{3i}	+6.082738360E+00	+1,119010961E+00	+9.317826530E-01	+5.301725240E+00
a_{4i}	-8.530914410E-03	+4,293889240E-03	+7.222712860E-03	+2.503813816E-03
a_{5i}	+1.384646189E-05	-6,836300520E-07	-7.342557370E-06	-2.127308728E-07
a_{6i}	-9.625793620E-09	-2,023372700E-09	+4.955043490E-09	-7.689988780E-10
a_{7i}	+2.519705809E-12	+1,039040018E-12	-1.336933246E-12	+2.849677801E-13
b_{1i}	+5.877124060E+05	-1.037939022E+06	+1.034972096E+06	+1.176962419E+05
b_{2i}	-2.239249073E+03	+2.344830282E+03	-2.412698562E+03	-1.788791477E+03
b_{3i}	+6.066949220E+00	+1.819732036E+00	+4.646110780E+00	+8.291523190E+00
b_{4i}	-6.139685500E-04	+1.267847582E-03	+2.291998307E-03	-9.223156780E-05
b_{5i}	+1.491806679E-07	-2.188067988E-07	-6.836830480E-07	+4.863676880E-09
b_{6i}	-1.923105485E-11	+2.053719572E-11	+9.426468930E-11	-1.891053312E-12
b_{7i}	+1.061954386E-15	-8.193467050E-16	-4.822380530E-15	+6.330036590E-16

Таблица 2

Значения молярной массы, газовой постоянной и исходных коэффициентов полиномов удельной изобарной теплоёмкости для SO_2, Ar и He

Константы и коэффициенты	Компонент		
	SO_2	Ar	He
μ_i, кг/кмоль	64,0638	39,9480	4,002602
R_i, кДж/(кг·К)	0,129785	0,208133	2,07728
a_{1i}	-5.310842140E+04	+0.000000000E+00	+0.000000000E+00
a_{2i}	+9.090311670E+02	+0.000000000E+00	+0.000000000E+00
a_{3i}	-2.356891244E+00	+2.500000000E+00	+2.500000000E+00
a_{4i}	+2.204449885E-02	+0.000000000E+00	+0.000000000E+00
a_{5i}	-2.510781471E-05	+0.000000000E+00	+0.000000000E+00
a_{6i}	+1.446300484E-08	+0.000000000E+00	+0.000000000E+00
a_{7i}	-3.369070940E-12	+0.000000000E+00	+0.000000000E+00
b_{1i}	-1.127640116E+05	+2.010538475E+01	+0.000000000E+00
b_{2i}	-8.252261380E+02	-5.992661070E-02	+0.000000000E+00
b_{3i}	+7.616178630E+00	+2.500069401E+00	+2.500000000E+00
b_{4i}	-1.999327610E-04	-3.992141160E-08	+0.000000000E+00
b_{5i}	+5.655631430E-08	+1.205272140E-11	+0.000000000E+00
b_{6i}	-5.454316610E-12	-1.819015576E-15	+0.000000000E+00
b_{7i}	+2.918294102E-16	+1.078576636E-19	+0.000000000E+00

Значения коэффициентов преобразованных полиномов представлены в табл. 3 и 4.

Расчет термодинамических свойств рабочего тела

Как уже было отмечено, рабочее тело, представляющее собой смесь индивидуальных газов, описывается совокупностью значений массовых долей компонентов $\Gamma = \{g_i\}$. Очевидно, что должно выполняться равенство $\sum_i g_i = 1$.

Тогда значения молярной массы μ и газовой постоянной R рассчитываются по формулам

$$\mu(\Gamma) = \frac{1}{\sum_i \left(\frac{g_i}{\mu_i}\right)};$$

$$R(\Gamma) = \frac{R_\mu}{\mu(\Gamma)}.$$

Таблица 3

Значения коэффициентов преобразованных полиномов удельной изобарной теплоёмкости для N_2, O_2, H_2O и CO_2

Коэффициенты	Компонент			
	N_2	O_2	H_2O	CO_2
ac_{1i}	+6,560487E+03	-8,900922E+03	-1,822084E+04	+9,339809E+03
ac_{2i}	-1,133338E+02	+1,259436E+02	+2,656416E+02	-1,183450E+02
ac_{3i}	+1,805386E+00	+2,907618E-01	+4,300414E-01	+1,001630E+00
ac_{4i}	-2,532016E-03	+1,115716E-03	+3,333466E-03	+4,730339E-04
ac_{5i}	+4,109696E-06	-1,776332E-07	-3,388777E-06	-4,019025E-08
ac_{6i}	-2,856981E-09	-5,257495E-10	+2,286879E-09	-1,452834E-10
ac_{7i}	+7,478606E-13	+2,699823E-13	-6,170287E-13	+5,383764E-14
bc_{1i}	+1,744358E+05	-2,696962E+05	+4,776660E+05	+2,223580E+04
bc_{2i}	-6,646197E+02	+6,092764E+02	-1,113522E+03	-3,379480E+02
bc_{3i}	+1,800699E+00	+4,728359E-01	+2,144298E+00	+1,566479E+00
bc_{4i}	-1,822288E-04	+3,294352E-04	+1,057816E-03	-1,742488E-05
bc_{5i}	+4,427753E-08	-5,685436E-08	-3,155371E-07	+9,188718E-10
bc_{6i}	-5,707868E-12	+5,336348E-12	+4,350555E-11	-3,572679E-13
bc_{7i}	+3,151931E-16	-2,128976E-16	-2,225651E-15	+1,195904E-16

Для расчета удельной изобарной теплоёмкости предварительно рассчитываются коэффициенты полиномов:

$$ac_k(\Gamma) = \sum_i \left(g_i \cdot ac_{ki}\right); \quad bc_k(\Gamma) = \sum_i \left(g_i \cdot bc_{ki}\right),$$

где $k = 1...7$.

Полученные значения коэффициентов используются в функции расчёта удельной изобарной теплоёмкости в зависимости от температуры:

$$c_p(T,\Gamma) = \left[kc_1(T,\Gamma)\frac{1}{T} + kc_2(T,\Gamma)\right]\frac{1}{T} + kc_3(T,\Gamma) +$$
$$+\Big[kc_4(T,\Gamma) + \Big[kc_5(T,\Gamma) +$$
$$+\Big[kc_6(T,\Gamma) + kc_7(T,\Gamma)T\Big]T\Big]T\Big]T,$$

где

$$kc_k(T,\Gamma) = \begin{cases} ac_k(\Gamma), \text{ если } T \in (200,1000)K; \\ bc_k(\Gamma), \text{ если } T \in (1000,6000]K; \end{cases} \quad k = 1...7.$$

На основе данной функции выводятся формулы для расчёта удельной энтальпии h и удельной относительной энтропии в изобарном процессе s_p в зависимости от абсолютной температуры T и состава $\{g_i\}$, так как для идеального газа справедливы следующие соотношения:

$$h(T,\Gamma) = \int_{T_0}^{T} c_p(T,\Gamma)dT; \quad s_p(T,\Gamma) = \int_{T_0}^{T} \frac{c_p(T,\Gamma)}{T}dT,$$

где T_0 — значение абсолютной температуры, при которой данные термодинамические функции в

Таблица 4

Значения коэффициентов преобразованных полиномов удельной изобарной теплоёмкости для SO_2, Ar и He

Коэффициенты	Компонент		
	SO_2	Ar	He
ac_{1i}	-6,892668E+03	+0,000000E+00	+0,000000E+00
ac_{2i}	+1,179785E+02	+0,000000E+00	+0,000000E+00
ac_{3i}	-3,058888E-01	+5,203333E-01	+5,193191E+00
ac_{4i}	+2,861042E-03	+0,000000E00	+0,000000E+00
ac_{5i}	-3,258614E-06	+0,000000E00	+0,000000E+00
ac_{6i}	+1,877079E-09	+0,000000E00	+0,000000E+00
ac_{7i}	-4,372543E-13	+0,000000E00	+0,000000E+00
b_{1i}	-1,463506E+04	+4,184601E+00	+0,000000E+00
bc_{2i}	-1,071018E+02	-1,247272E-02	+0,000000E+00
bc_{3i}	+9,884645E-01	+5,203478E-01	+5,193191E+00
bc_{4i}	-2,594824E-05	-8,308976E-09	+0,000000E+00
bc_{5i}	+7,340152E-09	+2,508573E-12	+0,000000E+00
bc_{6i}	-7,078876E-13	-3,785978E-16	+0,000000E+00
bc_{7i}	+3,787503E-17	+2,244877E-20	+0,000000E+00

соответствии с принятым соглашением равны нулю.

Поскольку функции расчета удельной изобарной теплоёмкости представлены в виде полиномов, то аналитически легко выводятся функции $h(T, \Gamma)$ и $s_p(T, \Gamma)$.

Функция расчёта удельной энтальпии $h(T, \Gamma)$:

$$h(T,\Gamma) = kh_0(\Gamma) + kh_1(T,\Gamma)\frac{1}{T} + kh_2(T,\Gamma)\cdot\ln T +$$
$$+\Big[kh_3(T,\Gamma) + \Big[kh_4(T,\Gamma) + \Big[kh_5(T,\Gamma) +$$
$$+\Big[kh_6(T,\Gamma) + kh_7(T,\Gamma)T\Big]T\Big]T\Big]T\Big]T,$$

где

$$kh_k(T,\Gamma) = \begin{cases} ah_k(\Gamma), \text{если } T \in (200,1000)\ K; \\ bh_k(\Gamma), \text{если } T \in (1000,6000]\ K; \end{cases} k = 1\ldots7;$$

$$ah_1(\Gamma) = ac_1(\Gamma)\cdot(-1);$$

$$ah_2(\Gamma) = ac_2(\Gamma);$$

$$ah_3(\Gamma) = ac_3(\Gamma);$$

$$ah_4(\Gamma) = ac_4(\Gamma)\cdot(0,5);$$

$$ah_5(\Gamma) = ac_5(\Gamma)\cdot\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$ah_6(\Gamma) = ac_6(\Gamma)\cdot(0,25);$$

$$ah_7(\Gamma) = ac_7(\Gamma)\cdot(0,2);$$

$$ah_0(\Gamma) = -\Big[ah_1(T_0,\Gamma)\frac{1}{T_0} + ah_2(T_0,\Gamma)\cdot\ln T_0 +$$

$$+\left[ah_3(T_0,\Gamma)+\left[ah_4(T_0,\Gamma)+\left[ah_5(T_0,\Gamma)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left[ah_6(T_0,\Gamma)+ah_7(T_0,\Gamma)T_0\right]T_0\right]T_0\right]T_0\right];$$

$$bh_1(\Gamma)=bc_1(\Gamma)\cdot(-1);$$

$$bh_2(\Gamma)=bc_2(\Gamma);$$

$$bh_3(\Gamma)=bc_3(\Gamma);$$

$$bh_4(\Gamma)=bc_4(\Gamma)\cdot(0,5);$$

$$bh_5(\Gamma)=bc_5(\Gamma)\cdot\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$bh_6(\Gamma)=bc_6(\Gamma)\cdot(0,25);$$

$$bh_7(\Gamma)=bc_7(\Gamma)\cdot(0,2);$$

$$bh_0(\Gamma)=-\left[bh_1(T_0,\Gamma)\frac{1}{T_0}+bh_2(T_0,\Gamma)\cdot\ln T_0+\right.$$

$$+\left[bh_3(T_0,\Gamma)+\left[bh_4(T_0,\Gamma)+\left[bh_5(T_0,\Gamma)+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.+\left[bh_6(T_0,\Gamma)+bh_7(T_0,\Gamma)T_0\right]T_0\right]T_0\right]T_0\right]T_0\right].$$

Функция расчёта удельной относительной энтропии в изобарном процессе $s_p(T,\Gamma)$:

$$s_p(T,\Gamma)=ks_0(\Gamma)+\left[ks_1(T,\Gamma)\frac{1}{T}+ks_2(T,\Gamma)\right]\frac{1}{T}+$$

$$+ks_3(T,\Gamma)\ln T+\left[ks_4(T,\Gamma)+\right.$$

$$\left.+\left[ks_5(T,\Gamma)+\left[ks_6(T,\Gamma)+ks_7(T,\Gamma)T\right]T\right]T\right]T,$$

где

$$ks_k(T,\Gamma)=\begin{cases}as_k(\Gamma),\text{если } T\in(200,1000)\ K;\\ bs_k(\Gamma),\text{если } T\in(1000,6000]\ K;\end{cases} k=1\ldots7;$$

$$as_1(\Gamma)=ac_1(\Gamma)\cdot(-0,5);$$

$$as_2(\Gamma)=ac_2(\Gamma)\cdot(-1);$$

$$as_3(\Gamma)=ac_3(\Gamma);$$

$$as_4(\Gamma)=ac_4(\Gamma);$$

$$as_5(\Gamma)=ac_5(\Gamma)\cdot(0,5);$$

$$as_6(\Gamma)=ac_6(\Gamma)\cdot\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$as_7(\Gamma)=ac_7(\Gamma)\cdot(0,25);$$

$$as_0(\Gamma)=-\left[\left[as_1(T_0,\Gamma)\frac{1}{T_0}+as_2(T_0,\Gamma)\right]\frac{1}{T_0}+\right.$$

$$+as_3(T_0,\Gamma)\ln T_0+\left[as_4(T_0,\Gamma)+\left[as_5(T_0,\Gamma)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[as_6(T_0,\Gamma)+as_7(T_0,\Gamma)T_0\right]T_0\right]T_0\right]T_0\right];$$

$$bs_1(\Gamma)=bc_1(\Gamma)\cdot(-0,5);$$

$$bs_2(\Gamma)=bc_2(\Gamma)\cdot(-1);$$

$$bs_3(\Gamma)=bc_3(\Gamma);$$

$$bs_4(\Gamma)=bc_4(\Gamma);$$

$$bs_5(\Gamma)=bc_5(\Gamma)\cdot(0,5);$$

$$bs_6(\Gamma)=bc_6(\Gamma)\cdot\left(\frac{1}{3}\right);$$

$$bs_7(\Gamma)=bc_7(\Gamma)\cdot(0,25);$$

$$bs_0(\Gamma)=-\left[\left[bs_1(T_0,\Gamma)\frac{1}{T_0}+bs_2(T_0,\Gamma)\right]\frac{1}{T_0}+\right.$$

$$+bs_3(T_0,\Gamma)\ln T_0+\left[bs_4(T_0,\Gamma)+\left[bs_5(T_0,\Gamma)+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[bs_6(T_0,\Gamma)+bs_7(T_0,\Gamma)T_0\right]T_0\right]T_0\right]T_0\right].$$

Во всех формулах выше T_0 = 1000 K, т. е. значения h и s_p отсчитываются от точки сопряжения двух полиномов, что позволяет рассчитывать свободные члены полиномов $ah_0(\Gamma)$ и $bh_0(\Gamma)$, $as_0(\Gamma)$ и $bs_0(\Gamma)$ независимо друг от друга.

Термодинамическая функция $y(T,\Gamma)$, использующаяся при расчёте изменения давления в изоэнтропическом процессе, является производной от $s_p(T,\Gamma)$:

$$y(T,\Gamma)=\frac{s_p(T,\Gamma)}{R(\Gamma)}.$$

Термодинамическая функция $j(T,\Gamma)$ определяется по формуле

$$j(T,\Gamma)=h(T,\Gamma)+0.5\left[1.0+\frac{R(\Gamma)}{c_p(T,\Gamma)-R(\Gamma)}\right]R(\Gamma)T.$$

Данная функция используется для определения критической температуры потока $T^{\wedge}$, так как она связана с полной температурой потока T^* соотношением

$$j\left(T^{\wedge},\Gamma\right)=h\left(T^*,\Gamma\right).$$

Значение одной из термодинамических функций *h, y* или *j* однозначно определяет значение абсолютной температуры *T* рабочего тела заданного состава. Поскольку из выражений для расчёта данных функций невозможно в явном виде выразить *T*, то температура в зависимости от *h, y* или *j* вычисляется методом последовательных приближений:

$$T(h,\Gamma)=iterate\left[T,h(T,\Gamma)\to h\right];$$

$$T(y,\Gamma)=iterate\left[T,y(T,\Gamma)\to y\right];$$

$$T(j,\Gamma)=iterate\left[T,j(T,\Gamma)\to j\right].$$

Так как прямые функции $h(T,\Gamma)$, $y(T,\Gamma)$ и $j(T,\Gamma)$ являются монотонными в зависимости от *T*, то подбор значения температуры не представляет сложности и может выполняться любым из стандартных численных методов решения уравнения, например, методом Ньютона [17—20].

Расчет газодинамических функций

Газодинамические функции описывают соотношение между статическими, полными, критическими параметрами потока рабочего тела в зависимости от кинематических (скоростных) параметров.

Скорость звука *a* в рабочем теле рассчитывается с помощью выражения:

$$a(T,\Gamma)=\sqrt{\left[1.0+\frac{R(\Gamma)}{c_p(T,\Gamma)-R(\Gamma)}\right]R(\Gamma)T},\ \text{м/с}.$$

Рассчитать критическую температуру $T^{\wedge}$ в зависимости от полной температуры T^* потока и наоборот можно следующим образом:

$$T^{\wedge}\left(T^*,\Gamma\right)=iterate\left[T^{\wedge},j\left(T^{\wedge},\Gamma\right)\to h\left(T^*,\Gamma\right)\right];$$

$$T^*\left(T^{\wedge},\Gamma\right)=iterate\left[T^*,h\left(T^*,\Gamma\right)\to j\left(T^{\wedge},\Gamma\right)\right].$$

Если значения функций $h^*=h\left(T^*,\Gamma\right)$ или $j^{\wedge}=j\left(T^{\wedge},\Gamma\right)$ определены заранее, то

$$T^{\wedge}\left(h^*,\Gamma\right)=iterate\left[T^{\wedge},j\left(T^{\wedge},\Gamma\right)\to h^*\right];$$

$$T^*\left(j^{\wedge},\Gamma\right)=iterate\left[T^*,h\left(T^*,\Gamma\right)\to j^{\wedge}\right].$$

Полная энтальпия h^* (кДж/кг) связана с величинами статической энтальпии *h* (кДж/кг) и скорости потока *v* (м/с) выражением

$$h^*(h,v)=h+0{,}0005\cdot v^2.$$

Соответственно,

$$h\left(h^*,v\right)=h^*-0{,}0005\cdot v^2;$$

$$v\left(h,h^*\right)=\sqrt{2000\left(h^*-h\right)};$$

$$h^*(T,v,\Gamma)=h(T,\Gamma)+0{,}0005\cdot v^2;$$

$$h\left(T^*,v,\Gamma\right)=h\left(T^*,\Gamma\right)-0{,}0005\cdot v^2;$$

$$h\left(T^{\wedge},v,\Gamma\right)=j\left(T^{\wedge},\Gamma\right)-0{,}0005\cdot v^2.$$

Отсюда выводятся функциональные связи между статической, полной и критической температурами:

$$T^*(T,v,\Gamma)=iterate\left[T^*,h\left(T^*,\Gamma\right)\to h^*(T,v,\Gamma)\right];$$

$$T\left(T^*,v,\Gamma\right)=iterate\left[T,h(T,\Gamma)\to h\left(T^*,v,\Gamma\right)\right];$$

$$T\left(h^*,v,\Gamma\right)=iterate\left[T,h(T,\Gamma)\to h\left(h^*,v\right)\right];$$

$$T\left(T^{\wedge},v,\Gamma\right)=iterate\left[T,h(T,\Gamma)\to h\left(T^{\wedge},v,\Gamma\right)\right].$$

Приведенная скорость потока λ, по определению, равна отношению скорости потока *v* к критической скорости звука $a^{\wedge}$:

$$\lambda\left(T^{\wedge},v,\Gamma\right)=\frac{v}{a\left(T^{\wedge},\Gamma\right)}$$

или

$$\lambda\left(h^*,v,\Gamma\right)=\frac{v}{a\left(T^{\wedge}\left(h^*,\Gamma\right),\Gamma\right)};$$

$$\lambda\left(h,h^*,\Gamma\right)=\frac{v\left(h,h^*\right)}{a\left(T^{\wedge}\left(h^*,\Gamma\right),\Gamma\right)}.$$

По величине приведенной скорости можно рассчитывать значения кинематических и статических параметров потока с использованием следующих функций:

$$v\left(T^{\wedge},\lambda,\Gamma\right)=\lambda\cdot a\left(T^{\wedge},\Gamma\right);$$

$$v\left(h^{*},\lambda,\Gamma\right)=\lambda\cdot a\left(T^{\wedge}\left(h^{*},\Gamma\right),\Gamma\right);$$

$$h\left(h^{*},\lambda,\Gamma\right)=h\left(h^{*},v\left(h^{*},\lambda,\Gamma\right)\right);$$

$$T\left(h^{*},\lambda,\Gamma\right)=T\left(h^{*},v\left(h^{*},\lambda,\Gamma\right),\Gamma\right);$$

$$T\left(T^{\wedge},\lambda,\Gamma\right)=T\left(h^{*},v\left(T^{\wedge},\lambda,\Gamma\right),\Gamma\right).$$

Другим параметром режима течения является число Маха скорости потока М — отношение скорости потока v к местной скорости звука a:

$$\mathrm{M}(T,v,\Gamma)=\frac{v}{a(T,\Gamma)}.$$

Число Маха скорости потока также определяет взаимосвязь между полными и статическими параметрами:

$$v(T,M,\Gamma)=M\cdot a(T,\Gamma);$$

$$h^{*}(T,M,\Gamma)=h^{*}\left(T,v(T,M,\Gamma),\Gamma\right);$$

$$T\left(h^{*},M,\Gamma\right)=iterate\left[T,h^{*}(T,M,\Gamma)\to h^{*}\right].$$

Функция относительного давления ψ может быть двух видов. Первая — ψ^{*} — отношение статического p и полного давлений p^{*} при условии изоэнтропического торможения потока:

$$\psi^{*}=\frac{p}{p^{*}}.$$

Вторая — $\psi^{\wedge}$ — отношение статического давления p и давления при критическом режиме течения потока рабочего тела $p^{\wedge}$ при условии изоэнтропического перехода от текущего режима к критическому:

$$\psi^{\wedge}=\frac{p}{p^{\wedge}}.$$

Поскольку в изоэнтропическом процессе изменение давления однозначно определяет изменение температуры, то значения ψ^{*} и $\psi^{\wedge}$ определяются соотношением функций, зависящих от соответствующих температур:

$$\psi^{*}\left(y,y^{*}\right)=\exp\left[y-y^{*}\right];$$

$$\psi^{*}\left(T,y^{*},\Gamma\right)=\exp\left[y(T,\Gamma)-y^{*}\right];$$

$$\psi^{*}\left(T,T^{*},\Gamma\right)=\exp\left[y(T,\Gamma)-y\left(T^{*},\Gamma\right)\right];$$

$$\psi^{*}\left(T^{*},\lambda,\Gamma\right)=\exp\left[y\left(T\left(h\left(T^{*},\Gamma\right),\lambda,\Gamma\right),\Gamma\right)-y\left(T^{*},\Gamma\right)\right];$$

$$\psi^{*}\left(h^{*},y^{*},v,\Gamma\right)=\psi^{*}\left(T\left(h^{*},v,\Gamma\right),y^{*},\Gamma\right);$$

$$\psi^{*}\left(h^{*},y^{*},\lambda,\Gamma\right)=\psi^{*}\left(T\left(h^{*},\lambda,\Gamma\right),y^{*},\Gamma\right);$$

$$\psi^{\wedge}\left(y,y^{\wedge}\right)=\exp\left[y-y^{\wedge}\right];$$

$$\psi^{\wedge}\left(T,T^{\wedge},\Gamma\right)=\exp\left[y(T,\Gamma)-y\left(T^{\wedge},\Gamma\right)\right].$$

И наоборот, например, с помощью функции ψ^{*} можно задать соотношение между T и T^{*}, что позволяет, в свою очередь, рассчитать скорость потока:

$$y=y^{*}+\ln\psi^{*};$$

$$T\left(y^{*},\psi^{*},\Gamma\right)=T\left(\left[y^{*}+\ln\psi^{*}\right],\Gamma\right);$$

$$T\left(T^{*},\psi^{*},\Gamma\right)=T\left(\left[y\left(T^{*},\Gamma\right)+\ln\psi^{*}\right],\Gamma\right);$$

$$v\left(h^{*},y^{*},\psi^{*},\Gamma\right)=v\left(h\left(T\left(y^{*},\psi^{*},\Gamma\right),\Gamma\right),h^{*}\right).$$

Газодинамическая функция $\kappa^{\wedge}$ — относительная плотность тока, равная отношению плотности тока $(\rho\cdot v)$ к критической плотности тока $\left(\rho^{\wedge}\cdot a^{\wedge}\right)$, может быть рассчитана по следующим формулам:

$$\kappa^{\wedge}\left(T,T^{\wedge},\lambda,\Gamma\right)=\lambda\frac{exp\left[y(T,\Gamma)-y\left(T^{\wedge},\Gamma\right)\right]}{T/T^{\wedge}};$$

$$\kappa^{\wedge}\left(T^{\wedge},\lambda,\Gamma\right)=\kappa^{\wedge}\left(T\left(T^{\wedge},\lambda,\Gamma\right),T^{\wedge},\lambda,\Gamma\right).$$

Расчет газодинамических функций по представленным формулам позволяет повысить адекватность и достоверность математической модели газотурбинного двигателя, так как в отличие от применяемых методик учитывает зависимость свойств рабочего тела от его состава и температуры.

Выводы

Разработанный метод численного моделирования термодинамических и газодинамических свойств рабочего тела обладает рядом преимуществ по сравнению с используемыми в настоящий момент подходами:

— позволяет создавать эффективные с точки зрения затрат времени на вычисления алгоритмы расчёта процессов, происходящих в газовых потоках;

— обеспечивает более высокую достоверность результатов моделирования за счёт того, что расчет всех параметров, в том числе газодинамических, выполняется с учетом зависимости свойств рабочего тела от температуры и состава;

— имеет широкий диапазон применения и возможность дальнейшего масштабирования при необходимости моделирования рабочего тела более сложного состава.

Список источников

1. *Ахмедзянов А.М.* (ред.). Математические модели авиационных двигателей произвольных схем (Компьютерная среда DVIG): Учеб. пособие. — Уфа: УГАТУ, 1998. — 128 с.
2. *Дружинин Л.Н., Швец Л.И., Ланшин А.И.* Математическое моделирование ГТД на современных ЭВМ при исследовании параметров и характеристик авиационных двигателей // Труды ЦИАМ. 1982. № 832. — 44 с.
3. *Дорофеев В.М., Маслов В.Г., Первышин Н.В.* и др. Термогазодинамический расчет газотурбинных силовых установок. – М.: Машиностроение, 1973. — 144 с.
4. *Ильичев Я.Т.* Термодинамический расчет воздушно-реактивных двигателей // Труды ЦИАМ. 1975. № 677. — 126 с.
5. *Зиненков Ю.В., Агавердыев С.В., Луковников А.В.* Выбор оптимальных параметров силовой установки ударного беспилотного летательного аппарата // Вестник Московского авиационного института. 2020. Т. 27. № 4. С. 105-116. DOI: 10.34759/vst-2020-4-105-116
6. *Маслов В.Г., Кузьмичев В.С., Григорьев В.А.* Выбор параметров и проектный термогазодинамический расчет авиационных газотурбинных двигателей: Учеб. пособие. — Куйбышев: Изд-во КуАИ, 1984. — 176 с.
7. *Зиненков Ю.В., Черкасов А.Н., Луковников А.В.* Оценка эффективности силовой установки высотного беспилотного летательного аппарата // Вестник Московского авиационного института. 2015. Т. 22. № 3. С. 91-102.
8. *Дорофеев В.М.* Термодинамический расчет воздушно-реактивных двигателей с помощью диаграмм π, i-функций: Учеб. пособие. – Куйбышев: Изд-во КуАИ, 1968. — 175 с.
9. *Ривкин С.Л.* Термодинамические свойства газов: Справочник. — 4-е изд., перераб. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 288 с.
10. *Дружинин Л.Н., Швец Л.И., Малинина Н.С.* Алгоритмы и подпрограммы расчета термодинамических параметров воздуха и продуктов сгорания углеводородных топлив в ГТД. Техн. отчет №8787. — М.: ЦИАМ, 1979. — 85 с.
11. *Гурвич Л.В., Вейц И.В., Медведев В.*А. и др. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание. В 4-х т. — 3-е изд., перераб. и расшир. — М.: Наука, 1979-1982.
12. *Chase M.W.* NIST-JANAF Thermochemical Tables: Monograph No.9 // Journal of Physical and Chemical Reference Data. 4th Ed. 1998, 61 p.
13. *Bride B.J., Zehe M.J., Gordon S.* NASA Glenn Coefficients for Calculating Thermodynamic Properties of Individual Species. Report NASA/TP2002211556. Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2002. URL: 20020085330.pdf
14. *Visser W.* Generic Analysis Methods for Gas Turbine Engine Performance: The development of the gas turbine simulation program GSP. PhD thesis. Technische Universiteit Delft, 2014. DOI: 10.4233/uuid:f95da308-e7ef-47de-abf2-aedbfa30cf63
15. *Bride B., Gordon S.* Fortran IV program for calculation of thermodynamic data. NASA TN D-4097, 1967. – 137 p. URL: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19670025863/downloads/19670025863.pdf
16. *Bride B., Gordon S.* Computer program for calculating and fitting thermodynamic functions. NASA Reference Publication 1271, 1992, 94 p. URL: 19930003779.pdf
17. *Филинов Е.П., Безбородова К.В.* Анализ конструкции трехконтурных газотурбинных двигателей // Вестник Московского авиационного института. 2021. Т. 28. № 3. С. 159-170. DOI: 10.34759/vst-2021-2-159-170
18. *Филинов Е.П., Авдеев С.В., Красильников С.А.* Математическая модель массы малоразмерных газотурбинных двигателей // Вестник РГАТУ им. П.А. Соловьева. 2018. № 3(46). С. 19-25.
19. *Ткаченко А.Ю., Рыбаков В.Н., Крупенич И.Н.* и др. Автоматизированная система для виртуальных испытаний газотурбинных двигателей // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. 2014. № 5-3(47). С. 113-119.
20. *Авдеев С.В., Ткаченко А.Ю.* Метод аппроксимации характеристик компрессоров газотурбинных двигателей // Вестник Уфимского государственного авиационно-технологического университета. 2020.Т. 24. № 4(90). С. 17-24.

References

1. Akhmedzyanova A.M. (ed) *Matematicheskie modeli aviatsionnykh dvigatelei proizvol'nykh skhem. Komp'yuternaya sreda DVIG* (Mathematical models of aircraft engines of arbitrary schemes. The DVIG software). Ufa, UGATU, 1998, 128 p.
2. Druzhinin L.N., Shvets L.I., Lanshin A.I. *Trudy TsIAM*, 1982, no. 832, 44 p.
3. Dorofeev V.M., Maslov V.G., Pervyshin N.V. et al. *Termogazodinamicheskii raschet gazoturbinnykh silovykh ustanovok* (Thermo-gas-dynamic design of gas turbine power plants), Moscow, Mashinostroenie, 1973, 144 p.
4. Il'ichev Ya.T. *Trudy TsIAM*, 1975, no. 677, 126 p.
5. Agaverdyev S.V., Zinenkov Y.V., Lukovnikov A.V. Optimal parameters selection of the strike unmanned aerial vehicle power plant. *Aerospace MAI Journal,* 2020, vol. 27, no. 4, pp. 105-116. DOI: 10.34759/vst-2020-4-105-116.
6. Maslov V.G., Kuz'michev V.S., Grigor'ev V.A. *Vybor parametrov i proektnyi termogazodinamicheskii raschet aviatsionnykh gazoturbinnykh dvigatelei* (Parameters selection and design thermogasodynamic calculation of aircraft gas turbine engines), Kuibyshev, KuAI, 1984, 176 p.
7. Zinenkov Y.V., Lukovnikov A.V., Cherkasov A.N. Estimation of the effectiveness of a power plant for a high-altitude unmanned aerial vehicle. *Aerospace MAI Journal,* 2015, vol. 22, no. 3, pp. 91-102.
8. Dorofeev V.M. *Termodinamicheskii raschet vozdushno-reaktivnykh dvigatelei s pomoshch'yu diagramm p, i-funktsii* (Thermodynamic design of air-jet engines with π, *i*-functions diagrams), Kuibyshev, KuAI, 1968, 175 p.
9. Rivkin S.L. *Termodinamicheskie svoistva gazov* (Thermodynamic properties of gases), Moscow, Energoatomizdat, 1987, 288 p.
10. Druzhinin L.N., Shvets L.I., Malinina N.S. *Algoritmy i podprogrammy rascheta termodinamicheskikh parametrov vozdukha i produktov sgoraniya uglevodorodnykh topliv v GTD. Tekhn. otchet №8787* (Algorithms and routines for thermodynamic parameters computing of air and combustion products of hydrocarbon fuels in the gas turbine engine. Tech. Report No. 8787). Moscow, TsIAM, 1979, 85 p.
11. Gurvich L.V., Veits I.V., Medvedev V.A. et al. *Termodinamicheskie svoistva individual'nykh veshchestv: Spravochnoe izdanie*. V 4 t. (Thermodynamic properties of individual substances. Reference edition in four volumes). Moscow, Nauka. 1979-1982.
12. Chase M.W. NIST-JANAF Thermochemical Tables: Monograph No.9. *Journal of Physical and Chemical Reference Data*. 4th Ed. 1998, 61 p.
13. Bride B.J., Zehe M.J., Gordon S. *NASA Glenn Coefficients for Calculating Thermodynamic Properties of Individual Species.* Report NASA/TP2002211556. Glenn Research Center, Cleveland, Ohio, 2002. URL: 20020085330.pdf
14. Visser W. *Generic Analysis Methods for Gas Turbine Engine Performance: The development of the gas turbine simulation program GSP*. PhD thesis. Technische Universiteit Delft, 2014. DOI: 10.4233/uuid:f95da308-e7ef-47de-abf2-aedbfa30cf63
15. Bride B., Gordon S. *Fortran IV program for calculation of thermodynamic data*. NASA TN D-4097, 1967, 137 p. URL: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19670025863/downloads/19670025863.pdf
16. Bride B., Gordon S. *Computer program for calculating and fitting thermodynamic functions*. NASA Reference Publication 1271, 1992, 94 p. URL: 19930003779.pdf
17. Filinov E.P., Bezborodova K.V. Double bypass turbojet engine structure analysis. *Aerospace MAI Journal,* 2021, vol. 28, no. 3, pp. 159-170. DOI: 10.34759/vst-2021-2-159-170
18. Filinov E.P., Avdeev S.V., Krasil'nikov S.A. *Vestnik RGATU im. P.A. Solov'eva*, 2018, no. 3(46), pp. 19-25.
19. Tkachenko A.Yu., Rybakov V.N., Krupenich I.N. et al. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta,* 2014, no. 5-3(47), pp. 113-119.
20. Avdeev S.V., Tkachenko A.Yu. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionno-tekhnologicheskogo universiteta*, 2020, vol. 24, no. 4(90), pp. 17-24.

Статья поступила в редакцию 01.11.2021; одобрена после рецензирования 10.11.2021; принята к публикации 11.11.2021.

The article was submitted on 01.11.2021; approved after reviewing on 10.11.2021; accepted for publication on 11.11.2021.