

## **Томографический метод определения местоположений и мощностей источников**

**Самойленко М.В.**

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия  
e-mail: Samoi.Mar@mail.ru*

### **Аннотация**

В статье изложен новый, томографический метод, позволяющий определять местоположения и мощности когерентных источников излучения по ковариационной матрице принимаемого сигнала. Приведены результаты компьютерного моделирования.

**Ключевые слова:** томографический метод, когерентные источники, ковариационная матрица, местоположение.

### **Введение**

Функционирование аэрокосмических комплексов и систем во многих случаях сопровождается необходимостью определять местоположения удаленных объектов по излучаемым или отражаемым ими сигналам. Решение этой задачи требуется, например, для обеспечения оптимальных параметров связи с подвижными объектами, для навигации, мониторинга околоземного пространства и др.

Данная статья посвящена решению задачи определения местоположений, а также мощностей излучения удаленных когерентных источников. При этом под источниками будем понимать объекты как с собственным, так и с отраженным излучением, а в качестве измерительного средства будем рассматривать пассивную приемную антенную систему, обладающую возможностью измерять пространственную ковариационную матрицу принимаемых сигналов.

Изложенный в статье метод разработан в рамках томографического подхода в обработке сигналов – научного направления, начало которому положил доктор технических наук, профессор Виталий Иванович Самойленко.

Рассматриваемый томографический метод позволяет определять местоположения и мощности когерентных удалённых источников по пространственной ковариационной матрице принимаемых сигналов. Таким образом, этот метод позволяет определять местоположения и мощности когерентных источников однопозиционной антенной системой без дальномерного канала. Известные методы решать такую задачу не позволяют. По изложенному в статье методу получен патент на изобретение [1].

*Цель статьи* – представление теории метода и иллюстрация его работы с помощью компьютерного моделирования.

### **Теоретическое изложение метода**

Разобьем контролируемую область пространства на малые объемы – элементы разрешения по местоположению, пронумеруем их и зафиксируем координаты каждого элемента разрешения. Обозначим эти координаты трехмерными координатными векторами  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_K$ , где  $K$  – число элементов разрешения в контролируемой области пространства. В качестве приемной антенны используем антенную решётку (АР) и за начало системы координат примем некоторый ее базовый элемент (например, первый).

Для каждого элемента разрешения контролируемой области пространства определим коэффициент ослабления сигнала, получающийся за счет пространственного распространения от этого элемента разрешения до приемной антенны. Будем полагать, что контролируемая область пространства находится в дальней зоне антенны. Тогда приходящий на апертуру приемной антенны сигнал из любого элемента разрешения будет иметь плоский волновой фронт на всей апертуре, а коэффициент пространственного ослабления сигнала можно считать одинаковым для всей апер-

туры приемной АР и равным  $\alpha(\vec{r}_k) = \frac{S_A}{4\pi|\vec{r}_k|^2}$ , где  $|\vec{r}_k|$  – модуль вектора  $\vec{r}_k$ , равный расстоянию  $k$ -го элемента разрешения от АР,  $S_A$  – эффективная площадь приемного элемента АР.

Определим, также, для каждого элемента разрешения временные задержки распространения сигнала от этого элемента разрешения до каждого элемента АР. Время распространения связано с фазовым набегом, поэтому его необходимо учитывать с точностью до элемента АР.

Для  $k$ -го элемента разрешения время распространения сигнала от него до базового (первого) элемента АР составит

$$\tau_{k1} = \frac{|\vec{r}_k|}{v_c}, \quad (1)$$

где  $v_c$  – скорость распространения сигнала в пространстве.

Распространение этого сигнала по апертуре АР приводит к дополнительной временной задержке распространения между базовым и  $n$ -м элементами АР

$$\Delta\tau_{1n} = \frac{\vec{r}_k^T \vec{\rho}_n}{v_c |\vec{r}_k|}, \quad (2)$$

где  $\vec{\rho}_n$  – координата  $n$ -го элемента АР относительно её базового элемента.

Временную задержку распространения сигнала от  $k$ -го элемента разрешения контролируемой области пространства до  $n$ -го элемента приемной АР получим просуммировав (1) и (2):

$$\tau_{kn} = \tau_{k1} + \Delta\tau_{1n}. \quad (3)$$

Пусть в  $k$ -м элементе разрешения находится источник излучения  $s_k(t) = A_k e^{j(\varphi_{k0} + \omega t)}$ , где  $A_k$  – амплитуда,  $\varphi_{k0}$  – начальная фаза,  $\omega$  – несущая частота. С учетом задержки распространения (3), сигнал от этого источника на входе  $n$ -го элемента АР будет определяться выражением

$$x_{n(k)}(t) = \alpha(\vec{r}_k) s_k(t - \tau_{kn}) = \alpha(\vec{r}_k) A_k e^{j\varphi_{k0}} e^{j\omega(t - \tau_{kn})} = \alpha(\vec{r}_k) e^{-j\omega\tau_{kn}} s_k(t). \quad (4)$$

Объединим сомножители, описывающие преобразование сигнала за счет пространственного распространения, в коэффициент пространственного преобразования сигнала  $w_{kn} = \alpha(\vec{r}_k) e^{-j\omega\tau_{kn}}$  и перепишем (4) в виде

$$x_{n(k)}(t) = w_{kn} s_k(t). \quad (5)$$

Запишем суммарный сигнал на входе  $n$ -го элемента АР от всех источников излучения, находящихся в контролируемой области пространства. Для этого просуммируем сигналы (5) по всем элементам разрешения:

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^K w_{kn} s_k(t) = \vec{w}_n^T \vec{s}(t), \quad (6)$$

где  $\vec{w}_n^T = [w_{1n} \ w_{2n} \ \dots \ w_{Kn}]^T$  – вектор пространственного преобразования сигналов,  $\vec{s}(t) = [s_1(t) \ s_2(t) \ \dots \ s_K(t)]^T$  – вектор излучений элементов разрешения, в котором  $s_k(t)$  – сигнал источника в  $k$ -м элементе разрешения, причем в случае отсутствия источника в этом элементе разрешения  $s_k(t) = 0$ .

Запишем входные сигналы (6) для всех элементов АР

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \bar{w}_1^T \bar{s}(t), \\
x_2(t) &= \bar{w}_2^T \bar{s}(t), \\
&\dots \quad \dots \\
x_N(t) &= \bar{w}_N^T \bar{s}(t)
\end{aligned}$$

и полученную систему уравнений перепишем в векторно-матричной форме

$$\bar{x}(t) = \mathbf{W} \bar{s}(t), \quad (7)$$

где  $\bar{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_N(t)]^T$  – вектор сигналов, принимаемых элементами АР,  $N$  – число элементов АР,  $\mathbf{W} = [\bar{w}_1 \ \bar{w}_2 \ \dots \ \bar{w}_N]^T$  – весовая матрица размером  $N \times K$ .

Запишем теперь выражение для пространственной ковариационной матрицы принимаемых сигналов. С учетом (7), получим

$$\mathbf{R}_{xx} = \overline{\bar{x}(t) \bar{x}^{T*}(t)} = \mathbf{W} \overline{\bar{s}(t) \bar{s}^{T*}(t)} \mathbf{W}^{T*} = \mathbf{W} \mathbf{R}_{ss} \mathbf{W}^{T*}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{R}_{ss} = \overline{\bar{s}(t) \bar{s}^{T*}(t)}$  – ковариационная матрица источников.

Будем полагать, что пространственная ковариационная матрица принимаемых сигналов  $\mathbf{R}_{xx}$  известна. Определить её можно, например, томографическим методом, который разработал В.И. Самойленко и опубликовал его в работе [2].

Дальнейшая задача заключается в том, чтобы по известной матрице  $\mathbf{R}_{xx}$  найти ковариационную матрицу источников  $\mathbf{R}_{ss}$ . Для этого обозначим следующим образом компоненты известной пространственной ковариационной матрицы принимаемых сигналов и искомой ковариационной матрицы источников:

$$\mathbf{R}_{xx} = \begin{bmatrix} \overline{x_1(t)x_1^*(t)} & \overline{x_1(t)x_2^*(t)} & \dots & \overline{x_1(t)x_N^*(t)} \\ \overline{x_2(t)x_1^*(t)} & \overline{x_2(t)x_2^*(t)} & \dots & \overline{x_2(t)x_N^*(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{x_N(t)x_1^*(t)} & \overline{x_N(t)x_2^*(t)} & \dots & \overline{x_N(t)x_N^*(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{N1} & z_{N2} & \dots & z_{NN} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_N \\ \zeta_{N+1} & \zeta_{N+2} & \dots & \zeta_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta_{(N-1)N+1} & \zeta_{(N-1)N+2} & \dots & \zeta_{N^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{ss} = \begin{bmatrix} \overline{s_1(t)s_1^*(t)} & \overline{s_1(t)s_2^*(t)} & \dots & \overline{s_1(t)s_K^*(t)} \\ \overline{s_2(t)s_1^*(t)} & \overline{s_2(t)s_2^*(t)} & \dots & \overline{s_2(t)s_K^*(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{s_K(t)s_1^*(t)} & \overline{s_K(t)s_2^*(t)} & \dots & \overline{s_K(t)s_K^*(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1K} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{K1} & y_{K2} & \dots & y_{KK} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_K \\ \xi_{K+1} & \xi_{K+2} & \dots & \xi_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{(K-1)K+1} & \xi_{(K-1)K+2} & \dots & \xi_{K^2} \end{bmatrix}.$$

Исходя из выражения (8) и структур матриц (9) и (10), получаем

$$z_{mi} = \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K w_{mk} w_{il}^* y_{kl}, \quad (11)$$

где  $m$  – номер строки,  $i$  – номер столбца матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$ .

Воспользуемся далее математическим приёмом, который был применён В.И. Самойленко в работе [2]. Этот приём позволяет перейти от двойной суммы к скалярному произведению векторов. Для этого введём переменные  $\mu = (m-1)N + i$ ,

$u = (k-1)K + l$ ,  $\eta_{\mu u} = w_{mk} w_{il}^*$ . С учётом этих обозначений, а также обозначенных в (9) и (10) равенств  $\zeta_{\mu} = z_{mi}$ ,  $\xi_u = y_{kl}$ , преобразуем выражение (11) следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta_{\mu} &= \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K w_{mk} w_{il}^* y_{kl} = w_{m1} w_{i1}^* y_{11} + w_{m1} w_{i2}^* y_{12} + \dots + w_{m1} w_{iK}^* y_{1K} + w_{m2} w_{i1}^* y_{21} + \\ &+ w_{m2} w_{i2}^* y_{22} + \dots + w_{m2} w_{iK}^* y_{2K} + \dots + w_{mK} w_{iK}^* y_{KK} = \sum_{u=1}^{K^2} \eta_{\mu u} \xi_u = \vec{\eta}_{\mu}^T \vec{\xi}, \end{aligned}$$

где  $\vec{\eta}_{\mu} = [w_{m1} w_{i1}^* \ w_{m1} w_{i2}^* \ \dots \ w_{m1} w_{iK}^* \ w_{m2} w_{i1}^* \ w_{m2} w_{i2}^* \ \dots \ w_{mK} w_{iK}^*]^T$  – вектор пространственного преобразования сигналов,  $\vec{\xi} = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_{K^2}]^T$  – вектор, компонентами которого являются компоненты ковариационной матрицы источников  $\mathbf{R}_{ss}$ .

Перепишем полученный результат в виде

$$\zeta_{\mu} = \sum_{u=1}^{K^2} \eta_{\mu u} \xi_u = \vec{\eta}_{\mu}^T \vec{\xi}, \quad (12)$$

Теперь искомые компоненты ковариационной матрицы источников, обозначенные переменными  $\xi_u$ , входят под знак суммы, которую можно рассматривать как дискретный вариант интеграла. Найдём эти переменные.

Восстановление подынтегральной величины по множеству значений интегралов (сумм) является классической задачей томографии, откуда и название метода. Применительно к рассматриваемой задаче в качестве множества интегралов используем компоненты ковариационной матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$  (12) для  $\mu = 1, 2, \dots, N^2$ .

Запишем (12) последовательно для всех компонент измеренной матрицы  $\mathbf{R}_{xx}$ :

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \vec{\eta}_1^T \vec{\xi}, \\
\zeta_2 &= \vec{\eta}_2^T \vec{\xi}, \\
&\dots \quad \dots, \\
\zeta_{N^2} &= \vec{\eta}_{N^2}^T \vec{\xi}
\end{aligned}$$

и полученную систему уравнений представим в виде векторно-матричного уравнения измерений

$$\vec{\zeta} = \mathbf{\theta} \vec{\xi} + \vec{n}, \quad (13)$$

где  $\vec{\zeta} = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \dots \ \zeta_{N^2}]^T$  – вектор измерений, состоящий из компонент измеренной ковариационной матрицы принимаемых сигналов  $\mathbf{R}_{xx}$ , как обозначено в (9),  $\vec{n}$  – вектор ошибок измерений,  $\mathbf{\theta} = [\vec{\eta}_1 \ \vec{\eta}_2 \ \dots \ \vec{\eta}_{N^2}]^T$  – матрица отображения, компонентами которой являются комбинации коэффициентов пространственного преобразования сигналов.

Из уравнения (13) найдем вектор  $\vec{\xi}$ . При известных статистических характеристиках измеряемых величин и ошибок измерений это можно сделать методом Винерова оценивания, в результате которого получим оценку искомого вектора в виде

$$\hat{\vec{\xi}} = \mathbf{R}_{\xi\xi} \mathbf{\theta}^T (\mathbf{\theta} \mathbf{R}_{\xi\xi} \mathbf{\theta}^T + \mathbf{R}_{nn})^{-1} \vec{\zeta},$$

где  $\mathbf{R}_{\xi\xi}$  и  $\mathbf{R}_{nn}$  – ковариационные матрицы, соответственно, измеряемых величин и ошибок измерений.

При отсутствии данных о вероятностных характеристиках измеренных величин и ошибок измерений, более грубую оценку можно найти методом псевдообращения:

$$\vec{\xi} = \mathbf{\theta}^+ \vec{\zeta},$$

где  $\mathbf{\theta}^+$  – матрица восстановления, индекс + обозначает операцию псевдообращения.

Сформируем из компонент найденной оценки вектора  $\vec{\xi}$  оценку ковариационной матрицы источников  $\mathbf{R}_{ss}$ , используя соответствие компонент этого вектора и компонент формируемой матрицы (10):

$$\hat{\mathbf{R}}_{ss} = \begin{bmatrix} \overline{\hat{s}_1(t)s_1^*(t)} & \overline{\hat{s}_1(t)s_2^*(t)} & \dots & \overline{\hat{s}_1(t)s_K^*(t)} \\ \overline{\hat{s}_2(t)s_1^*(t)} & \overline{\hat{s}_2(t)s_2^*(t)} & \dots & \overline{\hat{s}_2(t)s_K^*(t)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \overline{\hat{s}_K(t)s_1^*(t)} & \overline{\hat{s}_K(t)s_2^*(t)} & \dots & \overline{\hat{s}_K(t)s_K^*(t)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\xi}_1 & \hat{\xi}_2 & \dots & \hat{\xi}_K \\ \hat{\xi}_{K+1} & \hat{\xi}_{K+2} & \dots & \hat{\xi}_{2K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\xi}_{(K-1)K+1} & \hat{\xi}_{(K-1)K+2} & \dots & \hat{\xi}_{K^2} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

где  $\hat{\phantom{x}}$  обозначает оценку соответствующей величины.

Определим мощности и местоположения источников излучения по компонентам главной диагонали полученной матрицы  $\hat{\mathbf{R}}_{ss}$ . Как видно из структуры этой матрицы (14), компонентами ее главной диагонали являются оценки мощностей, излучаемых из всех элементов разрешения контролируемой области пространства: если обозначить мощность излучения из  $k$ -го элемента разрешения как  $p_k$ , то  $p_1 = \overline{\hat{s}_1(t)s_1^*(t)}$ ,  $p_2 = \overline{\hat{s}_2(t)s_2^*(t)}$ ,  $\dots$ ,  $p_K = \overline{\hat{s}_K(t)s_K^*(t)}$ . Таким образом, значение  $k$ -го диагонального элемента равно оценке мощности излучения из  $k$ -го элемента разрешения, местоположение которого определяется координатным вектором  $\vec{r}_k$ .

Таким образом, получено решение задачи определения местоположений и мощностей источников излучения: по значениям диагональных элементов можно выявить те элементы разрешения, в которых находятся источники, например, по максимумам в распределении значений оценок мощностей по элементам разрешения. Номера выявленных элементов разрешения определяют координаты, т.е. ме-

стоположения источников в виде априори определенных координатных векторов этих элементов разрешения.

### Результаты компьютерного моделирования

Моделирование проведено для «плоской» задачи, геометрия которой представлена на рис. 1.

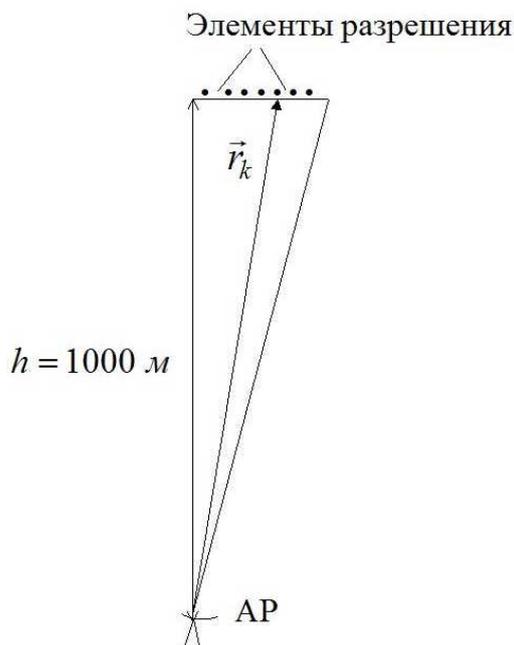


Рис. 1. Геометрические соотношения.

В качестве приёмной антенны используется линейная семиэлементная АР с межэлементным расстоянием 10 см. Задача решается в плоскости АР. Пространственные элементы разрешения расположены на высоте 1 км. В контролируемой области пространства выделим семь элементов разрешения, координаты их центров, соответственно, равны  $\vec{r}_1 = (0;1000) \text{ м}$ ,  $\vec{r}_2 = (20;1000) \text{ м}$ ,  $\vec{r}_3 = (30;1000) \text{ м}$ ,  $\vec{r}_4 = (40;1000) \text{ м}$ ,  $\vec{r}_5 = (50;1000) \text{ м}$ ,  $\vec{r}_6 = (60;1000) \text{ м}$ ,  $\vec{r}_7 = (70;1000) \text{ м}$ . Поле на АР формируется двумя монохроматическими источниками, расположенными во втором и в пятом элементах разрешения. Длина волны излучения обоих источников равна 10 см, а амплитуды, соответственно,  $A_1 = 2$ ,  $A_2 = 4$ .

Проведено два эксперимента. В первом из них положения источников совпадают с координатами элементов разрешения, а во втором – отличаются по оси абсцисс на 10% размера элемента разрешения. Результаты моделирования первого случая приведены на рис. 2, второго – на рис. 3.

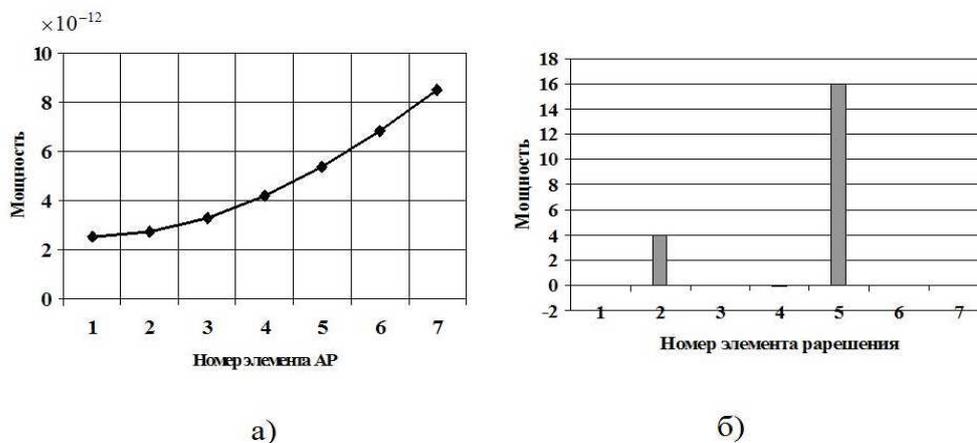


Рис. 2. Результаты моделирования при совпадении положений источников с координатами элементов разрешения: а) распределение принимаемой мощности сигналов по элементам AP; б) восстановленное распределение мощностей источников по пространственным элементам разрешения.

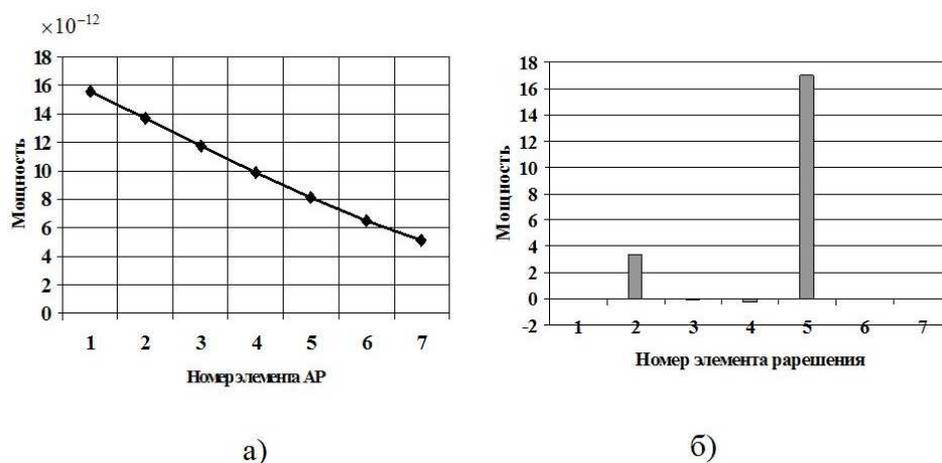


Рис. 3. Результаты моделирования при отклонении на 10% положений источников от координат элементов разрешения по оси абсцисс: а) распределение принимаемой мощности сигналов по элементам AP; б) восстановленное распределение мощностей источников по пространственным элементам разрешения.

Как видно из рисунков, в обоих случаях получается хорошее восстановление (рис. 2,б и 3,б) по различающимся исходным данным: в первом случае мощности сигналов, принимаемых элементами АР, показаны на рис. 2,а), а во втором – на рис. 2,б. Заметим, что принимаемые мощности сигналов отличается от мощностей источников на 12 порядков, тем не менее мощности источников восстанавливаются, причём с тем меньшей ошибкой, чем ближе истинное положение источников к координатам элементов разрешения. Таким образом, проведённые компьютерные эксперименты подтверждают работоспособность метода.

### **Библиографический список**

1. Самойленко М.В. Способ определения местоположений и мощностей источников излучения однопозиционной локационной станцией. Патент РФ № 2499273. Бюл. № 32, 20.11.2013.

2. Самойленко В.И. Оценивание ковариационной матрицы сигналов по измеренной мощности. // Известия ВУЗов. Радиоэлектроника. 1991. № 2. С. 95–97.