УДК 629.735.33.015

Математическая модель коэффициентов аэродинамических характеристик в продольном движении летательного аппарата на больших углах атаки с учётом отрывного обтекания

М. А. Захаров.

В данной работе с целью повышения точности моделирования предлагается новая математическая модель аэродинамических характеристик с введением точных (нелинейных) выражений составляющих $C_{y_{c.o.}}$, $m_{z_{c.o.}}$, *соответствующих структуре обтекания. Эта модель является единой для точных (нелинейных) и приближённых (линеаризованных) выражений* $C_{y_{c.o.}}$, $m_{z_{c.o.}}$. *Предполагается, что статические (нелинейные) составляющие* $C_{y_H}(\alpha, x_0(\alpha))$, $m_{z_H}(\alpha, x_0(\alpha))$ *могут быть определены по данным испытаний в аэродинамической трубе, а значения вращательных производных* $C_{y_*}^{\overline{\omega}_z}$, $m_{z_*}^{\overline{\omega}_z}$ *уточняются. Предлагается два варианта аналитической зависимости* $x_0(\alpha)$, *даётся их анализ и сравнение с известным вариантом [8]. На основе принятой зависимости* $x_0(\alpha)$ *находится решение релаксационного уравнения с помощью программы "MathCAD". Рассматриваются погрешности линеаризации отклонения* ξ *и нестационарной составляющей* $C_{y_{c.o.}}$, *соответствующей структуре обтекания, при возрастании амплитуды колебаний* α.

Традиционная форма представления коэффициентов аэродинамических характеристик (АХ) основана на предположении, что любой коэффициент АХ есть функция кинематических параметров движения летательного аппарата (ЛА) и их производных [1,2].

Так в общем случае изолированного продольного движения коэффициенты нормальной силы и момента тангажа можно соответственно представить в виде:

$$\begin{aligned} C_y &= C_{y_0}(\alpha) + C_y^{\alpha}(\alpha)\alpha + C_y^{\varphi}(\alpha)\varphi + C_y^{\overline{\omega}_z}\overline{\omega}_z + C_y^{\overline{\dot{\alpha}}}\overline{\dot{\alpha}}\ ; \\ m_y &= m_{z_0}(\alpha) + m_z^{\alpha}(\alpha)\alpha + m_z^{\varphi}(\alpha)\varphi + m_z^{\overline{\omega}_z}\overline{\omega}_z + m_z^{\overline{\dot{\alpha}}}\overline{\dot{\alpha}}\ , \end{aligned} \tag{1}$$

где: α – угол атаки; $\omega_z, \dot{\alpha}, \overline{\omega}_z, \overline{\dot{\alpha}}$ – размерные и безразмерные угловая скорость тангажа ЛА и производная угла атаки

$$\overline{\omega}_z = \frac{\omega_z b_A}{V}; \qquad \overline{\dot{\alpha}} = \frac{\dot{\alpha} b_A}{V},$$

b_A – средняя аэродинамическая хорда крыла; V – воздушная скорость полёта ЛА; φ – угол отклонения поворотного стабилизатора; $C_{y_0}(\alpha), m_{z_0}(\alpha)$ – начальные составляющие, зависящие от α; $C_y^{\alpha}(\alpha), C_y^{\varphi}(\alpha), m_z^{\alpha}(\alpha), m_z^{\varphi}(\alpha)$ – статические аэродинамические производные; $C_y^{\overline{\omega}_z}, m_z^{\overline{\omega}_z}, C_y^{\dot{\overline{\alpha}}}, m_z^{\dot{\overline{\alpha}}}$ – соответственно переменные вращательные и нестационарные аэродинамические производные.

В частном случае, в ограниченном диапазоне углов атаки $(\alpha < 15° \div 20°)$, величины $C_{y_0}, m_{z_0}, C_y^{\alpha}, m_z^{\alpha}$ считаются постоянными.

При использовании модели (1) трудно учесть эффекты отрывного обтекания, поскольку нельзя однозначно связать состояние отрывного обтекания с текущими значениями кинематических параметров движения $(\alpha, \dot{\alpha})$.

При альтернативной, интегральной форме представления нестационарных АХ [1, 2] коэффициенты аэродинамической силы и момента записываются в виде функционалов – интегральных выражений, зависящих от времени и кинематических переменных. Однако из-за происходящих качественных изменений структуры обтекания на больших углах атаки функционал зависит от предыстории движения и описание становится чрезвычайно сложным.

Для описания процессов при изолированном продольном движении ЛА на больших углах атаки в работах [1, 3] была предложена математическая модель выражения коэффициентов АХ с введением релаксационного (дифференциального) уравнения, включающего внутреннюю переменную состояния x, в виде:

$$\begin{aligned} C_y &= C_{y_H}(\alpha, x) + C_{y_*}^{\overline{\omega}_z}\overline{\omega}_z + C_{y_*}^{\dot{\overline{\alpha}}}\dot{\overline{\alpha}} + C_y^{\varphi}(\alpha)\varphi \;; \\ m_z &= m_{z_H}(\alpha, x) + m_{z_*}^{\overline{\omega}_z}\overline{\omega}_z + m_{z_*}^{\dot{\overline{\alpha}}}\dot{\overline{\alpha}} + m_z^{\varphi}(\alpha)\varphi \;; \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\tau_1 \frac{dx}{dt} + x = x_0(\alpha - \tau_2\dot{\alpha}) \;, \qquad (3)$$

где: x – внутренняя переменная состояния, $x \in [0,1]$; может рассматриваться как относительная координата по хорде крыла точки отрыва потока с верхней поверхности (или взрыва вихрей); τ_1 – постоянная времени (размерности [с]), обусловленная инерционностью процессов развития отрывного обтекания или восстановления безотрывного обтекания (связанных со скоростью $|\dot{x} > 0|$); τ_2 – постоянная времени (размерности [с]), характеризующая эффекты затягивания развития отрывного обтекания (связанные с нестационарностью угла атаки $|\dot{\alpha} > 0|$); $C_{y_*}^{\overline{\omega}_z}, m_{z_*}^{\overline{\omega}_z}, C_{y_*}^{\dot{\overline{\alpha}}}, m_{z_*}^{\dot{\overline{\alpha}}}$ – соответственно постоянные вращательная и нестационарная аэродинамические производные (со звёздочками); $C_{y_H}(\alpha, x)$, $m_{z_H}(\alpha, x)$ – нелинейные составляющие аэродинамических коэффициентов, описывающие нестационарные и нелинейные особенности возникновения отрывного обтекания на профиле, определяются или формулами Чаплыгина-Лаврентьева, или по формулам с включением весовой функции g(x), выражающей переходные режимы обтекания [3].

Для крыльев обычного профиля равенство x=1 соответствует безотрывному обтеканию. При увеличении угла α точка отрыва потока перемещается с задней кромки профиля к передней. При x=0 наступает полностью отрывное обтекание. Для треугольных крыльев при x=1 – развитая вихревая структура над крылом. При увеличении α точка исчезновения (взрыва) вихрей перемещается с задней кромки к передней. При x=0 вихри над крылом отсутствуют. Для полной компоновки самолёта при наличии горизонтального оперения и при одновременном действии отрывного и вихревого обтекания, переменная x выступает в виде обобщенной переменной.

В [3] для уравнения (3) используются безразмерные постоянные времени $\bar{\tau}_1 = \frac{\tau_1 V}{b_A}$, $\bar{\tau}_1 = \frac{\tau_1 V}{b_A}$ и безразмерные производные $\bar{\dot{\alpha}}$, $\bar{\dot{x}} = \frac{\dot{x} \cdot V}{b_A}$.

При очень медленном изменении угла α (стационарные условия)

$$\dot{\alpha} = 0; \quad \dot{x} = 0 \tag{4}$$

из (3) следует:

$$x(\alpha) = x_0(\alpha).$$

Указанная математическая модель (2), в статическом режиме $(\dot{\alpha} = 0, \ \ \omega_z = 0, \ \ \dot{x} = 0)$ имеет вид:

$$\begin{aligned} C_{y_{ст}}(\alpha, \varphi) &= C_{y_H}(\alpha, x_0(\alpha)) + C_y^{\varphi}(\alpha)\varphi \ ; \\ m_{z_{ст}}(\alpha, \varphi) &= m_{z_H}(\alpha, x_0(\alpha)) + m_z^{\varphi}(\alpha)\varphi \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Для нестационарных условий при малых возмущениях (в частности при вынужденных колебаниях с маленькой амплитудой) предложена линеаризованная по ξ форма уравнений (2)

$$\begin{aligned} C_y &= C_{y_{ст}}(\alpha, \varphi) + \frac{\partial C_y}{\partial x}\xi + C_{y_*}^{\bar{\dot{\alpha}}} \cdot \bar{\dot{\alpha}} + C_{y_*}^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z \ ; \\ m_z &= m_{z_{ст}}(\alpha, \varphi) + \frac{\partial m_z}{\partial x}\xi + m_{z_*}^{\bar{\dot{\alpha}}} \cdot \bar{\dot{\alpha}} + m_{z_*}^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z \ , \end{aligned} \tag{6}$$

где: $\xi(t)$ – отклонение внутренней переменной x относительно этой же переменной в стационарных условиях, при данном угле атаки $\alpha(t)$.

$$\xi(t) = x(t) - x_0(\alpha(t)) \ . \tag{7}$$

При малых ξ и линеаризации правой части (3) по малой величине $\tau_2\dot{\alpha}$ из (3) и (7) получают уравнение относительно ξ [1, 3]:

$$\tau_1\dot{\xi} + \xi = -(\tau_1 + \tau_2)\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha}\dot{\alpha} \ . \tag{8}$$

Выполняя преобразование Лапласа к выражению (8), найдём зависимость $\xi(p) = f(\alpha(p))$ (где p – оператор Лапласа). Затем, используя обратное преобразование Лапласа $\xi(t) = L^{-1}(f(\alpha(p)))$, подставляем это выражение в (6).

$$C_y = C_{y_{ст}}(\alpha,\varphi) + K_c(\alpha)L^{-1}\left(\frac{p\alpha(p)}{1+\tau_1 p}\right) + C_{y_*}^{\bar{\dot\alpha}} \cdot \bar{\dot\alpha} + C_{y_*}^{\bar\omega_z} \cdot \bar\omega_z \ ;$$
$$m_z = m_{z_{ст}}(\alpha,\varphi) + K_m(\alpha)L^{-1}\left(\frac{p\alpha(p)}{1+\tau_1 p}\right) + m_{z_*}^{\bar{\dot\alpha}} \cdot \bar{\dot\alpha} + m_{z_*}^{\bar\omega_z} \cdot \bar\omega_z \ , \qquad (9)$$

где $K_c(\alpha),\ K_m(\alpha)$ - коэффициенты размерности [c]:

$$K_c(\alpha) = -(\tau_1+\tau_2)\frac{\partial C_y}{\partial x}\frac{dx_0}{d\alpha} \ ;$$
$$K_m(\alpha) = -(\tau_1+\tau_2)\frac{\partial m_z}{\partial x}\frac{dx_0}{d\alpha} \ . \qquad (10)$$

В работе [4] с учётом (3) показывается, что выражение $K_c(\alpha)L^{-1}\left(\frac{p\alpha(p)}{1+\tau_1 p}\right)$ в (9) соответствует

интегралу Дюамеля: $-a\int_0^t e^{\frac{(t-\tau)}{\tau_1}}\frac{d}{d\tau}\alpha(\tau)d\tau$ в интегральной форме представления АХ,

где: $a = \frac{\tau_1+\tau_2}{\tau_1}\frac{dx_0}{d\alpha}\frac{\partial C_y}{\partial x}$; τ – характерная переменная интеграла Дюамеля.

При этом для описания продольного движения ЛА в форме Коши, уравнение (8) записано в качестве дополнительного уравнения к уравнениям динамики с производными $\dot\alpha(t);\ \dot\omega_z(t)$. Линеаризируя подобные уравнения (в том числе (8)), получают [5] уравнения движения в отклонениях $(\Delta\xi,\ \Delta\alpha,\ \Delta\omega_z)$ от опорного режима, для нахождения условий устойчивости продольного движения ЛА.

В некоторых манёврах ЛА при продольном движении (в частности в манёвре “Кобра Пугачёва” [6]) наблюдаются малые изменения углов наклона траектории при больших изменениях углов тангажа и атаки. Это равносильно следующему соотношению

$$\omega_z \approx \dot\alpha \ . \qquad (11)$$

В работе [7] (опираясь на связь с традиционным описанием коэффициентов АХ (1)) показано, что для этого случая значения $C_{y_H}(\alpha, x_0(\alpha)),\ m_{z_H}(\alpha, x_0(\alpha))$ соответственно равны статическим параметрам (определяемым точнее при статических аэродинамических испытаниях при $\varphi = 0$):

$$C_{y_H}(\alpha, x_0(\alpha)) = C_{y_0}(\alpha) + C_y^{\alpha}(\alpha)\alpha \ ;$$
$$m_{z_H}(\alpha, x_0(\alpha)) = m_{z_0}(\alpha) + m_z^{\alpha}(\alpha)\alpha \ , \qquad (12)$$

и вместо выражений (2), (6), (9) можно записать единую для точного (нелинейного) и приближенного (линеаризованного) представления модель:

$$C_y = C_{y_0}(\alpha) + C_y^{\alpha}(\alpha)\alpha + C_y^{\varphi}(\alpha)\varphi + C_{y_{c.o.}}(\alpha, x) + \left(C_{y_*}^{\overline{\omega}_z} + C_{y_*}^{\bar{\dot\alpha}}\right)\bar{\dot\alpha} \;;$$
$$m_y = m_{z_0}(\alpha) + m_z^{\alpha}(\alpha)\alpha + m_z^{\varphi}(\alpha)\varphi + m_{z_{c.o.}}(\alpha, x) + \left(m_{z_*}^{\overline{\omega}_z} + m_{z_*}^{\bar{\dot\alpha}}\right)\bar{\dot\alpha} \;; \qquad (13)$$

$$\tau_1 \frac{dx}{dt} + x = x_0(\alpha - \tau_2\dot\alpha) \;,$$

где: $\left(C_{y_*}^{\overline{\omega}_z} + C_{y_*}^{\bar{\dot\alpha}}\right)$, $\left(m_{z_*}^{\overline{\omega}_z} + m_{z_*}^{\bar{\dot\alpha}}\right)$ – постоянные комплексы (со звёздочками) вращательных и нестационарных производных АХ, равные комплексам АХ (без звёздочек), измеряемым (в аэродинамической трубе по методу вынужденных колебаний) при частоте колебаний, стремящейся к бесконечности (это следует из формулы (15) работы [3]); $C_{y_{c.o.}}(\alpha, x)$, $m_{z_{c.o.}}(\alpha, x)$ – нестационарные составляющие (коэффициентов нормальной силы и момента тангажа), соответствующие структуре обтекания, которые соответственно равны либо точным (нелинейным) выражениям:

$$C_{y_{c.o._н}}(\alpha, x) = C_{y_H}(\alpha, x) - C_{y_H}(\alpha, x_0(\alpha)) = C_{y_\xi}(\alpha, \xi)\cdot\xi \;;$$
$$m_{z_{c.o._н}}(\alpha, x) = m_{z_H}(\alpha, x) - m_{z_H}(\alpha, x_0(\alpha)) = m_{z_\xi}(\alpha, \xi)\cdot\xi \;, \qquad (14)$$

либо (при $\xi \to 0$) приближённым (линеаризованным) выражениям:

$$C_{y_{c.o._л}}(\alpha, x) = \frac{\partial C_y}{\partial x}\cdot\xi = K_c(\alpha)\cdot L^{-1}\left(\frac{p\alpha(p)}{1+\tau_1 p}\right) \;;$$
$$m_{z_{c.o._л}}(\alpha, x) = \frac{\partial m_z}{\partial x}\cdot\xi = K_m(\alpha)\cdot L^{-1}\left(\frac{p\alpha(p)}{1+\tau_1 p}\right) \;, \qquad (15)$$

где: $C_{y_\xi}(\alpha, \xi)$, $m_{z_\xi}(\alpha, \xi)$ – коэффициенты пропорциональности, зависящие от ξ.

Иначе говоря, для линеаризованного представления АХ значения ξ принимаются небольшими и коэффициенты пропорциональности $C_{y_\xi}(\alpha, \xi)$, $m_{z_\xi}(\alpha, \xi)$ соответственно равны производным $\frac{\partial C_y}{\partial x}$, $\frac{\partial m_z}{\partial x}$, а для точного (нелинейного) представления отклонения ξ – значительные и коэффициенты пропорциональности C_{y_ξ} и m_{z_ξ} сначала равны, а затем отклоняются от значений указанных производных при увеличении ξ от 0 до максимального значения.

Поскольку $x_0 = f(\alpha)$, $x = f(\alpha, \dot\alpha)$ и коэффициенты уравнений (12), (14), (15) в конечном итоге зависят от α и $\dot\alpha$, то делаем вывод, что уравнения (12), (14), (15) справедливы при любом соотношении ω_z и $\dot\alpha$, и единая модель с применением (14), (15) имеет вид:

$$C_y = C_{y_0}(\alpha) + C_y^{\alpha}(\alpha)\alpha + C_y^{\varphi}(\alpha)\varphi + C_{y_{c.o.}}(\alpha, x) + C_{y_*}^{\overline{\omega}_z}\cdot\overline{\omega}_z + C_{y_*}^{\bar{\dot\alpha}}\cdot\bar{\dot\alpha} \;;$$
$$m_y = m_{z_0}(\alpha) + m_z^{\alpha}(\alpha)\alpha + m_z^{\varphi}(\alpha)\varphi + m_{z_{c.o.}}(\alpha, x) + m_{z_*}^{\overline{\omega}_z}\cdot\overline{\omega}_z + m_{z_*}^{\bar{\dot\alpha}}\cdot\bar{\dot\alpha} \;; \qquad (16)$$

$$\tau_1 \frac{dx}{dt} + x = x_0(\alpha - \tau_2 \dot{\alpha}) .$$

Поэтому сравнивая (1) и (16) в стационарных условиях (4) и при учёте (14), можно уточнить значения $C_{y_*}^{\overline{\omega}_z}, m_{z_*}^{\overline{\omega}_z}$:

$$C_{y_*}^{\overline{\omega}_z} = C_y^{\overline{\omega}_z}; \quad m_{z_*}^{\overline{\omega}_z} = m_z^{\overline{\omega}_z}. \tag{17}$$

Для моделирования указанных уравнений состояния и решения релаксационного уравнения (3) необходимо знать функцию $x_0(\alpha)$. Эта функция может быть определена экспериментально либо из расчётного решения соответствующей задачи для вязкого воздушного потока [3]. При этом определённый интерес представляет её аналитическая аппроксимация. Известный вариант аналитической зависимости $x_0(\alpha)$ представлен в [8]:

$$x_{01}(\alpha) = 0.5\{1 - \tanh[2 \cdot K_x(\alpha - \alpha_x)]\} , \tag{18}$$

где: K_x – модуль углового коэффициента касательной к функции $x_0(\alpha)$ в точке её перегиба, α_x – угол точки перегиба функции $x_0(\alpha)$.

Параметры K_x и α_x могут быть определены методами идентификации исследуемых физической модели или самолёта.

С целью получения возможности более близкого воспроизведения реальной зависимости в настоящей работе предлагается новая аппроксимация $x_0(\alpha)$ в двух вариантах:

а) $$x_{02}(\alpha) = 0.5\{1 - \mathrm{erf}[\sqrt{\pi} \cdot K_x(\alpha - \alpha_x)]\} , \tag{19}$$

где:

$$\mathrm{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum \frac{(-1)^n \cdot z^{(2 \cdot n+1)}}{n! \cdot (2 \cdot n + 1)} \text{ –функция ошибок (интеграл вероятности);} \tag{20}$$

$$z = \sqrt{\pi} \cdot K_x(\alpha - \alpha_x) ,$$

б) $$x_{03}(\alpha) = 0.5\left\{1 - \frac{2}{\pi} \mathrm{arctg}[\pi \cdot K_x(\alpha - \alpha_x)]\right\} . \tag{21}$$

Для сравнения показанных функций находим их производные:

$$\frac{dx_{01}}{d\alpha} = -K_x \left\{1 - [\tanh[2 \cdot K_x(\alpha - \alpha_x)]]^2\right\} , \tag{22}$$

$$\frac{dx_{02}}{d\alpha} = -K_x \cdot \exp\left[-\pi \cdot K_x^2 (\alpha - \alpha_x)^2\right] , \tag{23}$$

$$\frac{dx_{03}}{d\alpha} = -\frac{K_x}{1 + \pi^2 \cdot K_x^2 (\alpha - \alpha_x)^2} . \tag{24}$$

Все указанные производные при $\alpha = \alpha_x$ равны $(-K_x)$. Рассмотренные зависимости (18), (19), (21) - (24) приведены на рис. 1 (где: $K_x = 1;\ \alpha_x = 50°$). Видно, что при данном K_x в районе точки $\alpha = \alpha_x$ производная $\frac{dx_{03}}{d\alpha}$ имеет самую крутую впадину, а $\frac{dx_{02}}{d\alpha}$ - самую пологую.

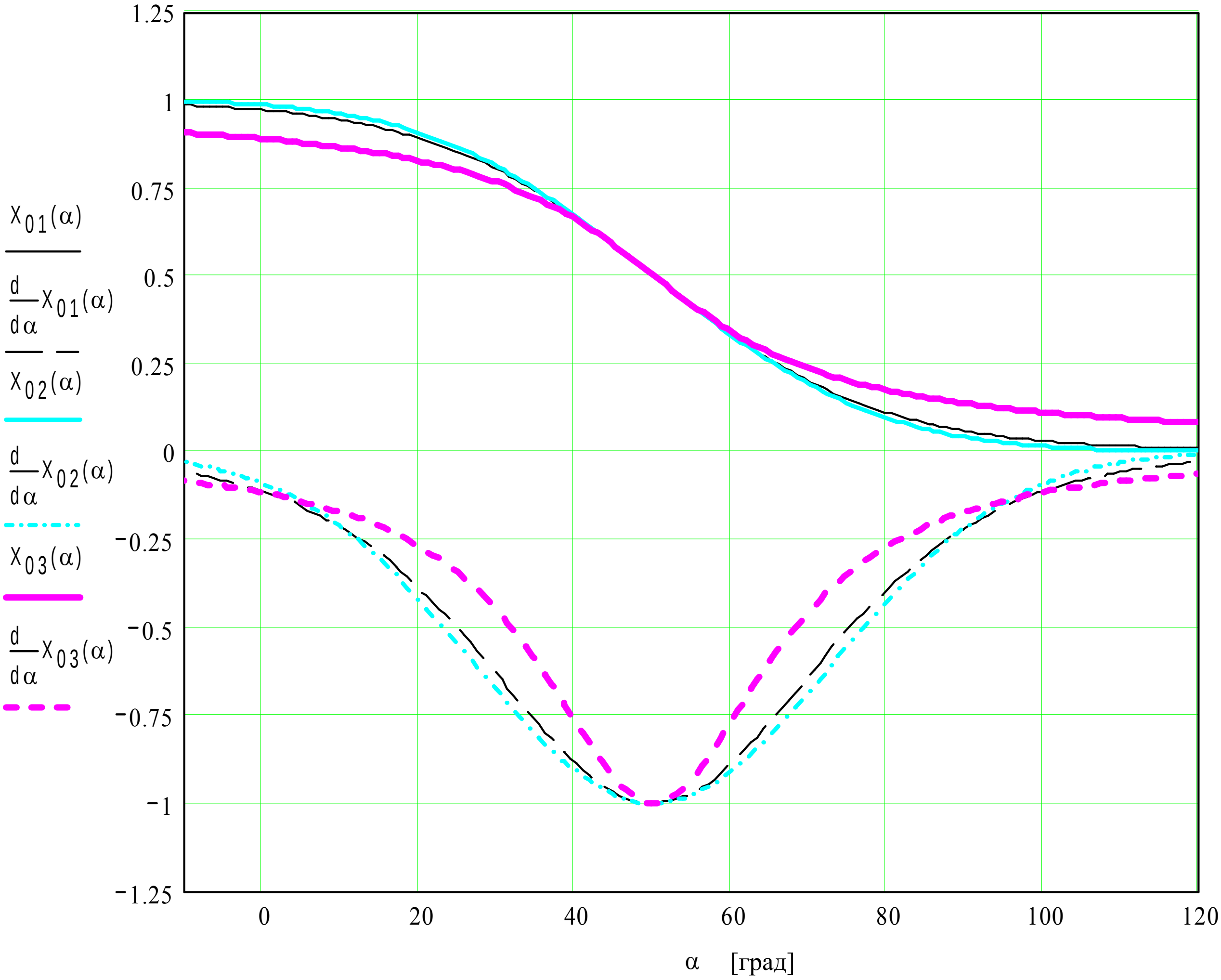

Рис. 1

Располагая выражением производной $\frac{dx_0}{d\alpha}$ и зная выражения частных производных $\frac{\partial C_y}{\partial x}$ и $\frac{\partial m_z}{\partial x}$, можно решить уравнение (10) и сравнить с экспериментальными значениями $K_c(\alpha)$ и $K_m(\alpha)$ (полученными, например, в [3]).

Проведём анализ погрешности приращения ξ из-за линеаризации уравнения (3).

Для получения уравнения (8) ранее была проведена линеаризация правой части уравнения (3), и за основу принято приближённое соотношение:

$$x_0(\alpha - \tau_2\dot{\alpha}) \cong x_0(\alpha) - \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} \cdot \tau_2\dot{\alpha} \ . \tag{25}$$

Справедливо равенство:

$$x_0(\alpha - \tau_2\dot{\alpha}) = x_0(\alpha) - \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} \cdot \tau_2\dot{\alpha} + \varepsilon \ , \tag{26}$$

где: ε – малая величина.

Соответственно уравнение (8) является приближённым. В более точном виде:

$$\tau_1\dot{\xi}_p + \xi_p = -(\tau_1 + \tau_2)\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha} \cdot \dot{\alpha} = -(\tau_1 + \tau_2)\frac{dx_0(\alpha)}{dt} \ , \tag{27}$$

где: ξ_p – расчётное значение отклонения ξ, которое отличается от истинного значения на величину $\Delta\xi$ – абсолютной погрешности линеаризации (ошибки в определении отклонения ξ, вызванной пренебрежением величиной ε):

$$\Delta\xi = \xi_p - \xi \ . \tag{28}$$

Проведём сравнение точного (нелинейного) и приближённого (линеаризованного) представления нестационарной составляющей, соответствующей структуре обтекания (на примере составляющей коэффициента нормальной силы). Рассмотрим аппроксимацию нелинейной функции $C_{y_H}(\alpha, x)$, входящей в (2) [1]

$$C_{y_H}(\alpha, x) = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\left(1 + \sqrt{x}\right)^2 . \tag{29}$$

Тогда в стационарном режиме (4) имеем

$$C_{y_H}(\alpha, x_0(\alpha)) = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\left(1 + \sqrt{x_0(\alpha)}\right)^2 . \tag{30}$$

Точное (нелинейное) выражение нестационарной составляющей коэффициента, соответствующей структуре обтекания из (29), (30), (14):

$$C_{y_{\text{с.о.н}}}(\alpha, x) = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0(\alpha)}}\right) \cdot \xi(t) = C_{y_\xi}(\alpha, \xi) \cdot \xi(t) \ , \tag{31}$$

где: $C_{y_\xi}(\alpha, \xi) = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\left(1 + \frac{2}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0(\alpha)}}\right)$, (32)

при малых ξ : $x \to x_0(\alpha)$ и

$$\lim_{\xi \to 0} C_{y_\xi}(\alpha, \xi) = \frac{\partial C_y}{\partial x} = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x_0(\alpha)}}\right) . \tag{33}$$

Таким образом, из (33) и (15) получаем приближённое (линеаризованное) выражение нестационарной составляющей, соответствующей структуре обтекания:

$$C_{y_{\text{с.о.л}}}(\alpha, x) = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x_0(\alpha)}}\right) \cdot \xi(t) . \tag{34}$$

Абсолютная погрешность нестационарной составляющей, соответствующей структуре обтекания, возникающая при её линеаризации:

$$\Delta C_{y_{с.о.}}(\alpha, x) = C_{y_{с.о.л}}(\alpha, x) - C_{y_{с.о.н}}(\alpha, x). \tag{35}$$

Пусть при периодическом изменении α функция $\xi(t)$ достигает максимума при $t = t_{1_{max}}$, функция $\Delta\xi(t)$ - при $t = t_{2_{max}}$, функция $C_{y_{с.о.н}}(t)$ - при $t = t_{3_{max}}$, функция $\Delta C_{y_{с.о.}}(t)$ - при $t = t_{4_{max}}$. Тогда можно определить относительную погрешность линеаризации $(\delta_{пер}\xi)$ [%] приращения ξ для периодического (отсюда индекс “пер”) изменения α:

$$\delta_{пер}\xi = \frac{100 \cdot \Delta\xi\left(t_{2_{max}}\right)}{\xi\left(t_{1_{max}}\right)} \; [\%], \tag{36}$$

а относительную погрешность нестационарной составляющей, соответствующей структуре обтекания $(\delta C_{y_{с.о.}})$ [%], возникающей при линеаризации этой составляющей для периодического изменения α:

$$\delta_{пер} C_{y_{с.о.}} = \frac{100 \cdot \Delta C_{y_{с.о.}}\left(t_{4_{max}}\right)}{C_{y_{с.о.н}}\left(t_{3_{max}}\right)} \; [\%]. \tag{37}$$

При принятой аналитической зависимости $x_0(\alpha)$ и для известного закона изменения угла атаки $\alpha(t)$, решения релаксационного уравнения (3) и дифференциального уравнения (27) можно получить с помощью ЭВМ. При этом последовательно решаем (3), (7), (27), (28), (35) выбирая $\alpha(t<0) = \alpha(t=0) = \alpha_0$, $x(t<0) = x(t=0) = x_0(\alpha(t=0))$, $\xi_p(t=0) = 0$, и получаем $x(t)$, $\xi(t)$, $\xi_p(t)$, $\Delta\xi(t)$, $\Delta C_{y_{с.о.}}(t)$. Рассмотрим решение с помощью персонального компьютера в программной среде “MathCAD” на примере появления синусоидальных колебаний угла атаки

$\alpha = \alpha_0 + \alpha_s \sin\omega t \; \left(\alpha_0 = 40°,\; \omega = 1\; \frac{1}{с}\right)$. Принимаем $x_0(\alpha) = x_{01}(\alpha)$. Проводим решение для $\alpha_s = 5°$.

После нахождения максимальных значений $\xi\left(t_{1_{max}}\right)$, $100 \cdot \Delta\xi\left(t_{2_{max}}\right)$, $C_{y_{с.о.н}}\left(t_{3_{max}}\right)$, $100 \cdot \Delta C_{y_{с.о.}}\left(t_{4_{max}}\right)$ находим значения относительных погрешностей линеаризации $\delta_{пер}\xi = 5{,}81\%$, $\delta_{пер} C_{y_{с.о.}} = 2{,}45\%$.

Значения $x(t)$, $\xi(t)$, $\xi_p(t)$, совместно с другими параметрами (в том числе $\frac{\alpha(t)}{\alpha_0}$, $100 \cdot \Delta\xi(t)$) приведены как функции t [с] и α [град] на графиках рис. 2 – 7. Значения $C_{y_{с.о.н}}(t)$, $C_{y_{с.о.л}}(t)$, $100 \cdot \Delta C_{y_{с.о.}}(t)$ приведены на графиках рис. 10, 11.

На рисунках 8, 9 приведены графики зависимостей $\xi(t)$, $\xi_p(t)$, $100 \cdot \Delta\xi(t)$, а на рисунках 12, 13 $C_{y_{с.о.н}}(t)$, $C_{y_{с.о.л}}(t)$, $100 \cdot \Delta C_{y_{с.о.}}(t)$ для амплитуды колебаний $\alpha_s = 10°$. При этом относительные погрешности линеаризации $\delta_{пер}\xi = 12{,}77\ \%$, $\delta_{пер}C_{y_{с.о.}} = 5{,}56\%$.

Из сравнения графиков рис. 6-9 и параметров уравнений при $\alpha_s = 5°$ и при $\alpha_s = 10°$ видно, что для $\alpha_s = 10°$ значения $\xi\left(t_{1_{max}}\right)$, $100 \cdot \Delta\xi\left(t_{2_{max}}\right)$ и $\delta_{пер}\xi$ соответственно больше, чем для $\alpha_s = 5°$.

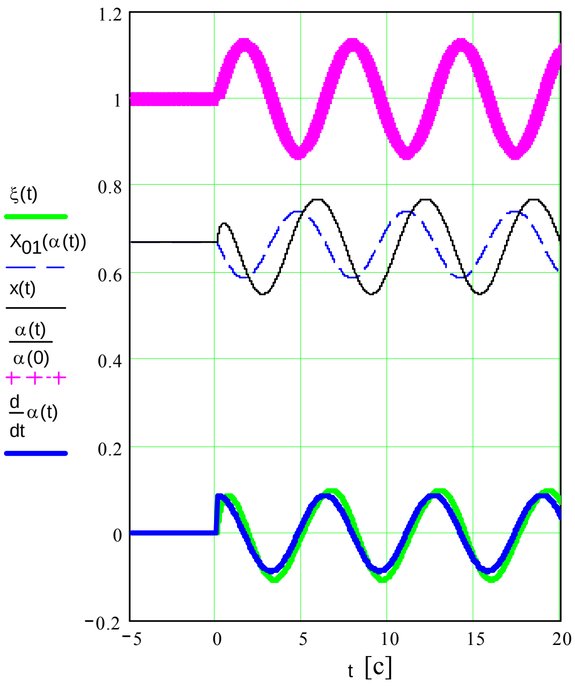

рис 2

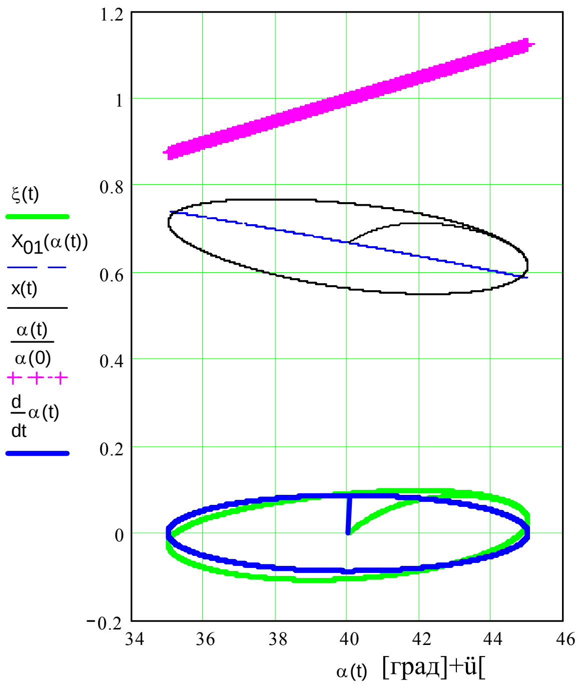

рис 3

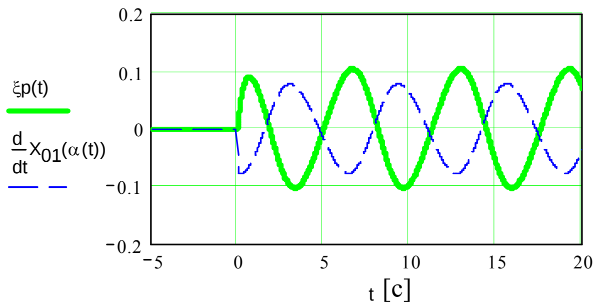

рис 4

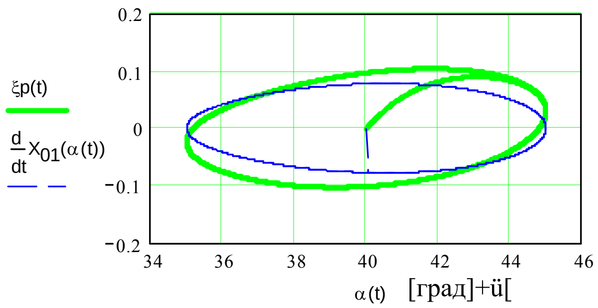

рис 5

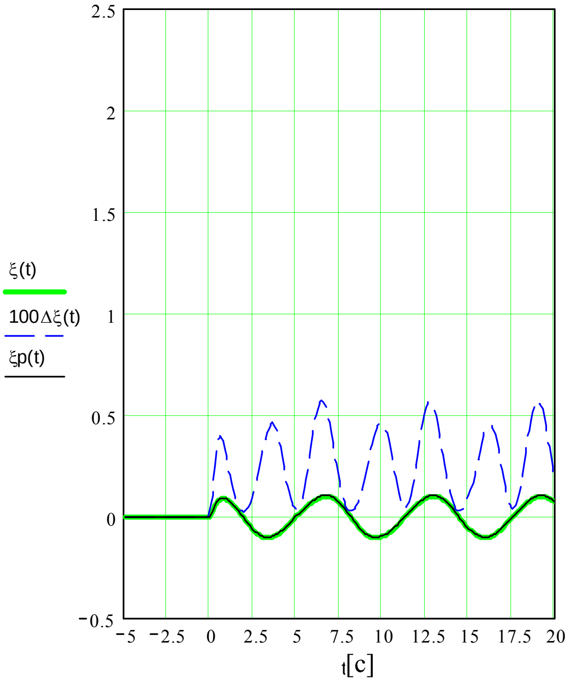

рис 6

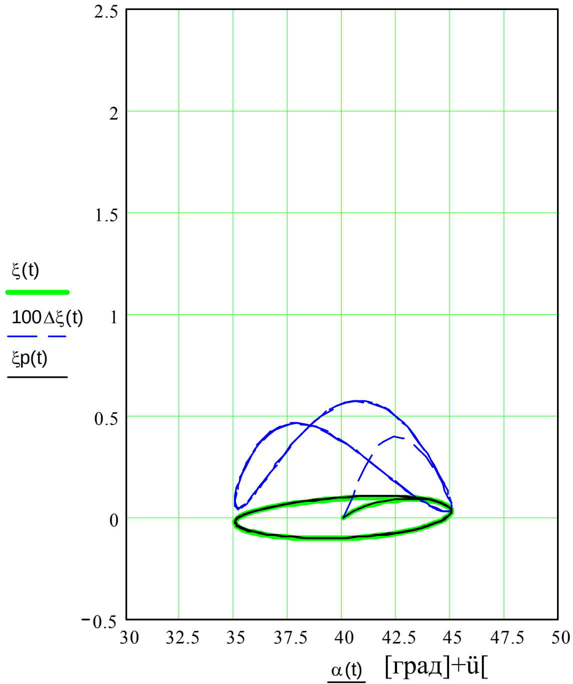

рис 7

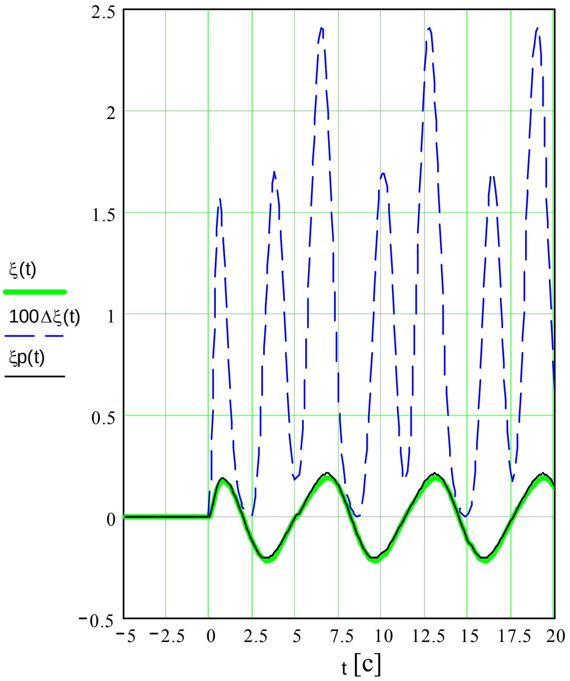

рис 8

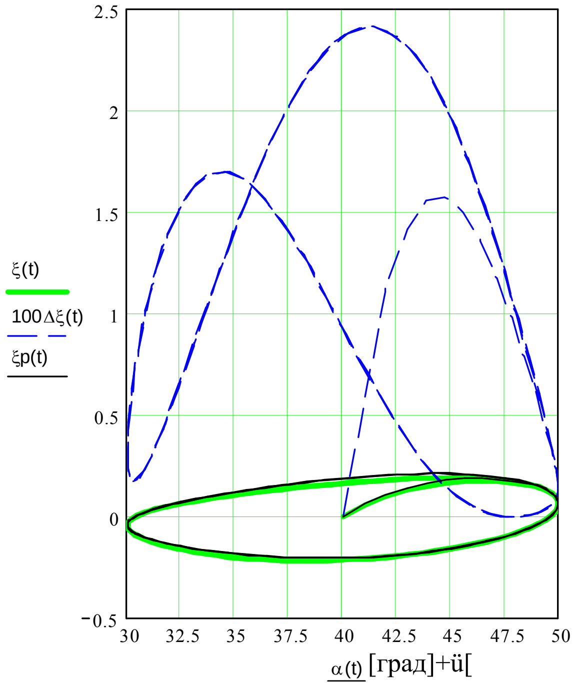

рис 9

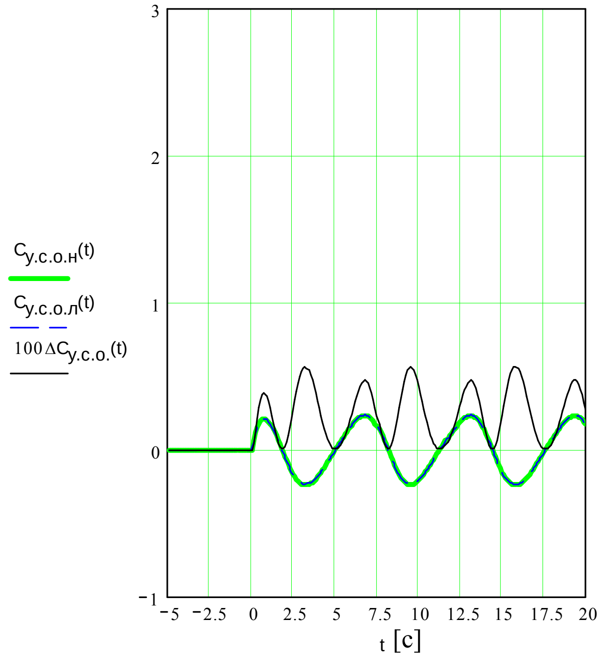

рис 10

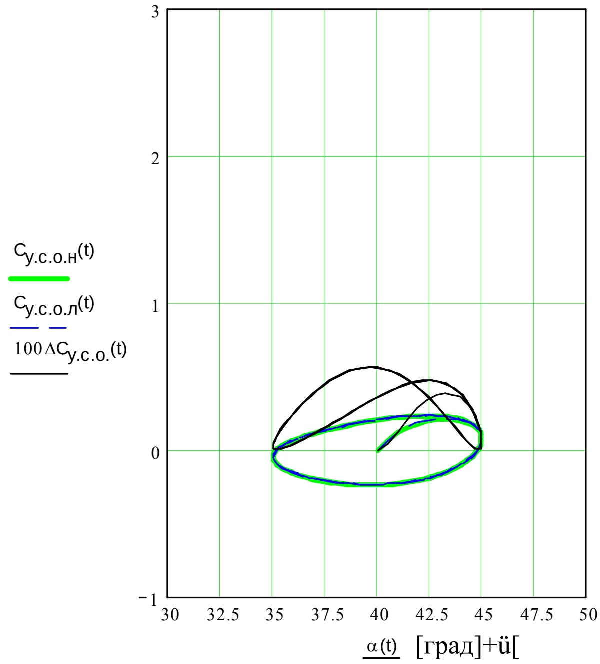

рис 11

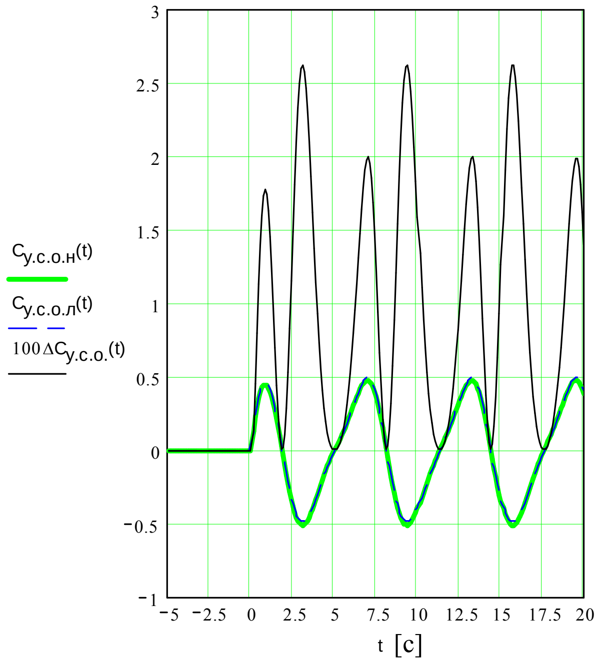

рис 12

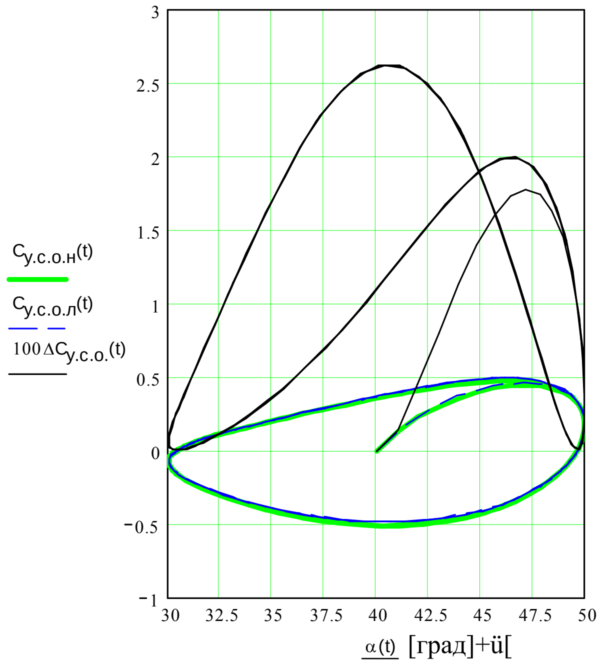

рис 13

Таким образом, при росте амплитуды (с сохранением частоты) колебаний угла атаки α, отклонение $\xi(t)$ увеличивается, математическая модель (8) отклоняется от линейной, и абсолютная и относительная погрешности линеаризации возрастают. Поэтому для повышения точности при получении ξ желательно вместо (8) использовать решения (3), (7).

Из сравнения графиков 10-13 и погрешностей при $\alpha_s = 5°$ и при $\alpha_s = 10°$ также видно, что значения $C_{y_{\text{с.о.н}}}\left(t_{3_{max}}\right)$, $100 \cdot \Delta C_{y_{\text{с.о.}}}\left(t_{4_{max}}\right)$ и $\delta_{\text{пер}} C_{y_{\text{с.о.}}}$ соответственно больше, чем для $\alpha_s = 5°$. Следовательно, при росте амплитуды колебаний зависимость нестационарной составляющей от ξ отклоняется от линейной, и абсолютная и относительная погрешности от линеаризации этой составляющей также возрастают.

Поэтому при нахождении $C_{y_{\text{с.о.}}}$ желательно использовать её нелинейное представление.

Заключение

Работа посвящена вопросам исследования и моделирования аэродинамических характеристик высокоманевренных самолётов в продольном движении на больших углах атаки. Известная математическая модель [1, 2] аэродинамических коэффициентов нормальной силы C_y и момента тангажа m_z содержит три уравнения, в том числе дифференциальное (релаксационное) уравнение для внутренней переменной состояния x, характеризующей местоположение отрыва потока по хорде крыла. При этом величина x, соответствующая положению точки отрыва потока в стационарных условиях x_0 зависит только от угла атаки α. Два уравнения включают составляющие, зависящие от кинематических параметров, и статические составляющие, зависящие от $x_0(\alpha)$. Функцию $x_0(\alpha)$ получают экспериментально или путём решения соответствующей задачи для вязкого воздушного потока. Модель этой зависимости опубликована в [8].

В данной работе с целью повышения точности моделирования предлагается новая математическая модель аэродинамических характеристик с введением точных (нелинейных) выражений составляющих $C_{y_{\text{с.о.}}}$, $m_{z_{\text{с.о.}}}$, соответствующих структуре обтекания. Эта модель является единой для точных (нелинейных) и приближённых (линеаризованных) выражений $C_{y_{\text{с.о.}}}$, $m_{z_{\text{с.о.}}}$. Предполагается, что статические (нелинейные) составляющие $C_{y_{\text{Н}}}(\alpha, x_0(\alpha))$, $m_{z_{\text{Н}}}(\alpha, x_0(\alpha))$ могут быть определены по данным испытаний в аэродинамической трубе, а значения вращательных производных $C_{y_*}^{\overline{\omega}_z}$, $m_{z_*}^{\overline{\omega}_z}$ уточняются. Предлагается два варианта аналитической зависимости $x_0(\alpha)$, даётся их анализ и сравнение с известным вариантом [8]. На основе принятой зависимости $x_0(\alpha)$ находится решение релаксационного уравнения с помощью программы “MathCAD”. Рассматриваются погрешности линеаризации отклонения ξ и нестационарной составляющей $C_{y_{с.о.}}$, соответствующей структуре обтекания, при возрастании амплитуды колебаний α.

Список литературы

1. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. /Под ред. Г. С. Бюшгенса.-М.: Наука, 1998. – 816 с.
2. Аэродинамика летательных аппаратов. /Под ред. Г. А. Колесникова. – М.: Машиностроение, 1993. – 544 с.
3. Гоман М. Г., Столяров Г. И., Тыртышников С. Л., Усольцев С. П., Храбров А.Н.. Описание продольных аэродинамических характеристик самолета на больших углах атаки с учетом динамических эффектов отрывного обтекания. -Препринт ЦАГИ, 1990, № 9. -56 с.
4. Klein V. & Noderer K. D.. Modeling of Aircraft Unsteady Aerodynamic Characteristics.
   Part 1: Postulated models. NASA. TM. 109120, May 1994, 24 p.
   Part 2: Parameters estimated from wind tunnel data, NASA.TM. 110161, April 1995, 41 p.
5. Поплавский Б. К., Леонов В. А., Ниязманд М. А. Критерии апериодической и колебательной устойчивости самолётов в продольном движении на закритических углах атаки. // Вестник МАИ. -1999, т. 6, №2. –с.52-69.
6. Блинов А. Г., Гутник В. Б. Особенности динамики самолёта Су-27 при выполнении фигуры высшего пилотажа "Кобра Пугачёва". //Техника Воздушного Флота. – 1990, № 2.
7. Захаров М. А. Математическое моделирование продольного движения самолёта Су-27 на больших углах атаки, с учётом отрывных обтеканий. / Захаров М. А, Леонов В. А. //Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации". X международный научно-технический семинар.: Алушта. 2001: Тез. докл. – Алушта, 2001. – с.240.
8. Moennich Wulf. SUMMARY REPORT MEETING No. 87 SAE AEROSPACE CONTROL AND GUIDANCE SYSTEMS COMMITTEE REGAL HARVEST HOUSE BOUILDER, COLORADO 14-16 MARCH, 2001. 4.1.4 DLR-Institute of Flight Research (German Aerospace Center) "Modeling Unsteady Aerodynamics". - p 7.

Захаров Михаил Александрович, аспирант кафедры динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (государственного технического университета).