

УДК 531.36: 534.1

Параметрическое управление плоскими движениями спутника-гантели

Безгласный С.П.^{1*}, Краснов М.В.^{2}, Мухаметзянова А.А.^{1***}**

¹*Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П.*

Королева, СГАУ, Московское шоссе 34, Самара, 443086, Россия

²*Государственный научно-производственный ракетно-космический центр*

«ЦСКБ-Прогресс», ул. Земеца, 18, Самара, 443009, Россия

**e-mail: bezglasnsp@rambler.ru*

***e-mail: maxasgard@mail.ru*

****e-mail: Alain.20@mail.ru*

Аннотация

Рассматривается плоское движение спутника-гантели на эллиптической орбите, моделируемого весомым стержнем с двумя закрепленными массами на его концах и с перемещающейся вдоль стержня четвертой массой. Управлением является непрерывный закон движения подвижной массы вдоль стержня по принципу качелей. Получены управляющие законы, переводящие спутник-гантель из одного устойчивого радиального положения равновесия в другое и стабилизирующие по отношению к плоским возмущениям двух диаметрально противоположных положений относительного равновесия спутника на круговой орбите. Решение получено в замкнутом виде на основе второго метода классической теории устойчивости с построением соответствующих функций Ляпунова.

Асимптотическая сходимость решений подтверждена результатами численного моделирования движения системы.

Ключевые слова: гантелеобразный спутник, подвижная масса, гравитационный момент, функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость.

Введение

Проблеме устойчивости относительных равновесий и различных движений спутника вокруг центра масс на кеплеровской орбите под действием гравитационного, аэродинамического и других моментов посвящены работы Белецкого В.В., Сарычева В.А., Маркеева А.П. и других авторов [1-10]. В предложенной работе исследуются задачи о гравитационной стабилизации положения относительного равновесия спутника-гантели на круговой орбите и его переориентации с помощью параметрического управления. Управление реализуется путем периодических перемещений точечной массы вдоль оси симметрии спутника по принципу действия качелей. Обычно качели моделируются одномассовым [11,12] или двухмассовым [13,14,15] маятником переменной длины и могут использоваться для решения прикладных задач. Так, в работе [16] принцип действия качелей применен для осуществления орбитального маневрирования центра масс спутника. В статье [17] двухмассовая модель качелей используется для решения задачи о гравитационной стабилизации и переориентации спутника на круговой орбите. В работе [18] обсуждаются возможности повышения орбиты спутника посредством раскачивания космической тросовой системы (космической пращи) по принципу качелей.

В настоящей статье исследуются управляемые плоские движения спутника-гантели с подвижной массой. Спутник-гантель представляет собой две точечные массы, соединенные тонким весоым однородным стержнем, вдоль которого может перемещаться четвертая точечная масса. Движение центра масс спутника-гантели на орбите происходит под действием сил центрального ньютоновского притяжения. Управляющим параметром является расстояние от общего центра масс двух концевых грузов и стержня до подвижного груза. Закон управления спутником-гантелей реализуется посредством непрерывного изменения этого расстояния, являющегося функцией фазового состояния системы. Непрерывность закона управления позволяет строить функции Ляпунова, обосновывающие асимптотическую устойчивость и неустойчивость по отношению к плоским возмущениям различных плоских движений спутника-гантели относительно его центра масс.

В первой части работы записано уравнение плоского движения спутника-гантели с подвижной массой вокруг общего центра масс на кеплеровской орбите произвольного эксцентриситета под действием гравитационного момента и на круговой орбите. Во второй части предложенным в [15] законом управления решена задача об управлении процессом «раскачки» спутника-гантели в окрестности его устойчивого положения равновесия и перевода его в диаметрально противоположное асимптотически устойчивое положение (переворот спутника на угол π). В третьей части работы решена задача о гравитационной стабилизации (успокоении плоских колебаний) после переворота в окрестности нового положения относительного равновесия спутника-гантели, когда он расположен вдоль местной

вертикали. Решение проведено аналитически путем построения соответствующих функций Ляпунова.

1. Уравнение маятникового движения спутника-гантели с подвижной массой.

Рассмотрим движения спутника-гантели относительно центра масс в центральном ньютоновском гравитационном поле с центром в точке O . Воспользуемся общепринятым предположением [2] о независимости движения центра масс спутника от его движения относительно центра масс. Рассматриваемая система (спутник-гантель) представляет собой весомый неупругий стержень массой m_3 , на концах которого закреплены грузы с точечной массой m_1 и m_2 . Вдоль стержня может перемещаться подвижная масса – точечный груз массы m_4 (рис.1). Общий центр масс грузов и стержня лежит в точке O_1 . Обозначим через l и d расстояния от точки O_1 до груза m_4 и до центра масс O_2 всего спутника соответственно. Для них будет выполняться соотношение

$$(m_1 + m_2 + m_3)d = m_4(l - d) \quad (1.1)$$

Орбитальную систему координат O_2XYZ выберем так, что ось O_2X направлена по орбитальной касательной, ось O_2Y перпендикулярна плоскости орбиты, ось O_2Z дополняет систему координат до правой тройки. Оси связанной со спутником системы координат O_1xyz совпадают с его главными центральными осями инерции. Ориентация системы координат O_1xyz относительно орбитальной

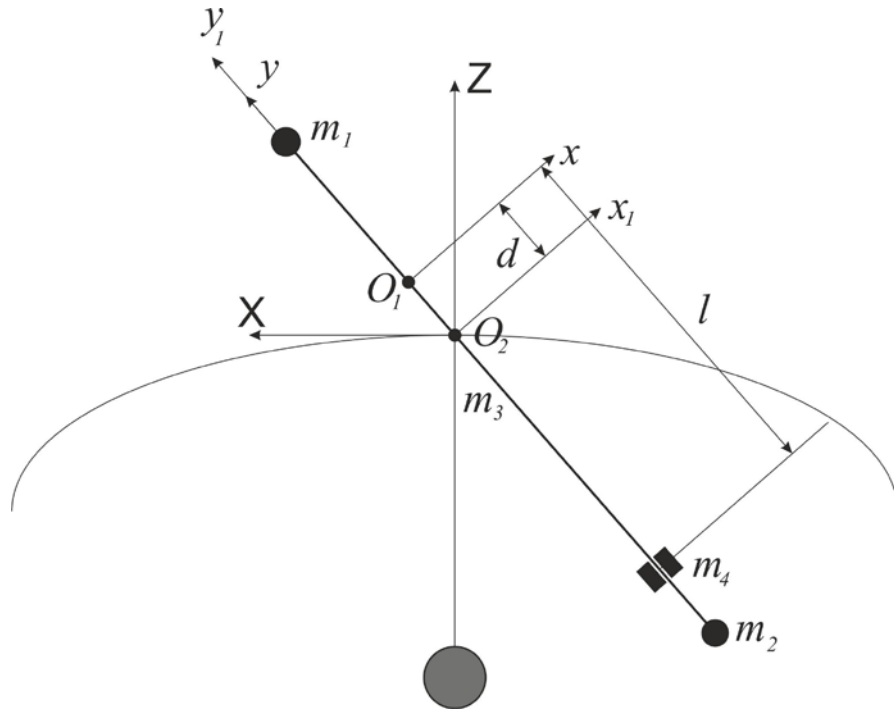


Рис. 1 – Схема спутника-гантели

задается при помощи углов Эйлера ψ , θ , φ . Обозначим главные центральные моменты инерции спутника-гантели без подвижной массы $B_1 = 0$,

$$A_1 = C_1 = \frac{L^2 m_3}{12} + L^2 \frac{4m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3}{4(m_1 + m_2 + m_3)}, \text{ где } L \text{ – длина стержня.}$$

Следуя [17], запишем уравнение плоского движения спутника-гантели с подвижной массой вокруг общего центра масс. Из соотношения (1.1) имеем:

$$d = \frac{m_4 l}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} \quad (1.2)$$

Моменты инерции A_2 , B_2 , C_2 спутника-гантели с подвижным грузом относительно осей, проходящих через точку O_2 и параллельных соответственно осям жестко связанной со стержнем системы координат $O_1 x_1 y_1 z_1$ в силу (1.2) определим равенствами:

$$B_2 \in 0, \quad A_2 = ml_2 = m_1 + \quad ^2, \quad = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}. \quad (1.3)$$

Известно [2], что существуют относительные плоские маятниковые движения спутника-гантели

$$\psi = \pi, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \quad r = \dot{\varphi} + \dot{\nu}, \quad p = q = 0$$

на эллиптической орбите под действием гравитационного момента

$$M_z = -3n^2 k_1^2 k_2^3 A_2 \sin \varphi \cos \varphi,$$

$$k_1 = (1 - e^2)^{\frac{3}{2}}, \quad k_2 = 1 + e \cos \nu$$

где p, q, r – компоненты угловой скорости вращения спутника-гантели, точка обозначает производную по времени, $n = \text{const} > 0$ – среднее движение центра масс спутника, ν – истинная аномалия, e – эксцентриситет орбиты, M_z – гравитационный момент относительно оси, проходящей через точку O_2 и перпендикулярной плоскости орбиты. Учитывая равенство (1.3), запишем кинетический момент системы в виде

$$K_z = C_2 r = (A_1 + ml^2)(\dot{\varphi} + \dot{\nu})$$

Тогда на основании теоремы об изменении кинетического момента получим уравнение плоских движений системы с подвижной массой:

$$(A + ml^2)(\ddot{\varphi} + \ddot{\nu}) + 2ml\dot{l}(\dot{\varphi} + \dot{\nu}) = -3n^2 k_1^2 k_2^3 A_2 \sin \varphi \cos \varphi \quad (1.4)$$

где $l = l(\varphi, \dot{\varphi})$.

Если считать истинную аномалию ν новой переменной с производной

$$\dot{\nu} = nk_1 k_2^2, \quad (1.5)$$

то первая и вторая производные для величины $\varphi = \varphi(t)$ в силу (1.5) будут иметь вид

$$\dot{\varphi} = \varphi' n k_1 k_2^2, \quad \ddot{\varphi} = n^2 k_1^2 k_2^3 [k_2 \varphi'' - 2e \sin \nu \varphi'], \quad (1.6)$$

где штрихом обозначена производная по ν . Учитывая справедливость равенств

$$\dot{l} = l' n k_1 k_2^2, \quad \ddot{\nu} = -2n^2 e k_1^2 k_2^3 \sin \nu \quad (1.7)$$

и соотношений (1.5) и (1.6), запишем уравнение плоских движений спутника-гантели с подвижной массой на кеплеровской орбите под действием гравитационного момента в виде:

$$k_2 \varphi'' + 2 \left(\frac{m l l'}{A_1 + m l^2} k_2 - e \sin \nu \right) \varphi' = -3 \sin \varphi \cos \varphi + 2e \sin \nu - \frac{2m l l'}{A_1 + m l^2} k_2 \quad (1.8)$$

При движении по круговой орбите ($e = 0, k_2 = 1$) уравнение (1.8) примет вид:

$$\varphi'' = -2 \frac{m l l'}{A_1 + m l^2} (\varphi' + 1) - 3 \sin \varphi \cos \varphi \quad (1.9)$$

Заметим, что уравнение (1.8) совпадает с соответствующим уравнением плоских движений динамически симметричного спутника на эллиптической орбите, полученным в работе [17], если в нем положить $B = 0$. Кроме того отметим, что, хотя в [17] уравнение плоских движений спутника было выведено в предположении малости подвижной массы по сравнению с массой самого спутника, на самом деле оно остается справедливым при любых значениях масс.

2. Уравнение управляемых движений спутника-гантели.

Применим принцип действия качелей (плоского маятника переменной длины) для решения задач об управлении движениями спутника-гантели. А именно, необходимо осуществить раскачку системы и перевод ее из окрестности положения

относительного равновесия $\varphi = \varphi' = 0$ в диаметрально противоположное $\varphi = \pi, \varphi' = 0$. Также покажем возможности гравитационной стабилизации по отношению к плоским возмущениям системы на круговой орбите в окрестностях этих положений равновесия. Будем считать, что управление суть расстояние от O_1 до подвижной точки m_4 :

$$l = l(\varphi, \varphi') \quad (2.1)$$

Сначала поставим и решим задачу об асимптотическом успокоении плоских колебаний спутника-гантели с помощью подвижной массы в окрестности положения относительного равновесия $\varphi = \varphi' = 0$. Решение проведем вторым методом классической теории устойчивости. Как и в [15], управление (2.1) выберем в виде:

$$l = l_0 + a\varphi' \sin \varphi \quad (2.2)$$

где $l_0 = \text{const} > 0$, $a = \text{const} > 0$. С учетом (2.2) и равенства

$$l' = a\varphi'' \sin \varphi + a\varphi'^2 \cos \varphi$$

перепишем уравнение (1.9)

$$\begin{aligned} \varphi''(A_1 + ml(l_0 + 3a\varphi' \sin \varphi + 2a \sin \varphi)) = \\ = -2mla \cos \varphi(\varphi' + 1)\varphi'^2 - 3(A_1 + ml^2) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) имеет нулевое решение $\varphi = \varphi' = 0$, соответствующее исследуемому положению относительного равновесия спутника-гантели. Оно является уравнением возмущенного движения в окрестности этого положения равновесия.

Выберем функцию Ляпунова:

$$V = \frac{A_1 + ml_0(l_0 + 3a\varphi' \sin \varphi + 4a \sin \varphi)}{2} \varphi'^2 + \frac{3}{4} \left(A_1 + ml_0 \left(l_0 + \frac{a}{2} \varphi' \sin \varphi \right) \right) \times \quad (2.4)$$

$$\times (1 - \cos 2\varphi) + p(1 - \cos 2\varphi)\varphi \approx \frac{A_1 + ml_0^2}{2} (\varphi'^2 + 3\varphi^2)$$

где коэффициент $p = \text{const} > 0$ определим позже. Функция $V(\varphi, \varphi')$ в окрестности положения относительного равновесия $\varphi = \varphi' = 0$ представима рядом, начинающимся с положительно определенной квадратичной формы. Согласно признаку знакоопределенности функций [19], функция (2.4) является положительно определенной. Вычислим полную производную этой функции $V = V(\varphi, \varphi')$ по времени в силу уравнения (2.3). Так как на круговой орбите $\dot{V} = n$, то

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & n \left[A_1 + ml_0(l_0 + 3a\varphi' \sin \varphi + 4a \sin \varphi) \right] \varphi' \varphi'' + \frac{3}{2} naml_0 \varphi'^2 \varphi'' \sin \varphi + \\ & + \frac{3}{8} naml_0 \sin \varphi (1 - \cos 2\varphi) \varphi'' + n \left\{ \frac{3}{2} aml_0 \varphi'^4 \cos \varphi + 2aml_0 \varphi'^3 \cos \varphi + \right. \\ & + \frac{3}{8} aml_0 \cos \varphi (1 - \cos 2\varphi) \varphi'^2 + \frac{3}{2} \left[A_1 + ml_0 \left(l_0 + \frac{a}{2} \varphi' \sin \varphi \right) \right] \varphi' \sin 2\varphi \left. \right\} + \\ & + p\varphi' (1 - \cos 2\varphi + 2\varphi \sin 2\varphi) \end{aligned}$$

В силу уравнения (2.3) эта производная с точностью до слагаемых четвертой степени по переменным φ, φ' имеет вид:

$$\frac{1}{n} \dot{V} = -\frac{9F}{4} \varphi^4 + \left[\frac{12F^2}{G} \varphi^3 - 6(F - p)\varphi^2 \right] \varphi' - \frac{21F}{4} \varphi^2 \varphi'^2 - \frac{4F^2}{G} \varphi \varphi'^3 - \frac{F}{2} \varphi'^4$$

где обозначено $F = mal_0 > 0$, $G = A_1 + ml_0^2 > 0$. Выберем коэффициент $p = F$, тогда производная \dot{V} будет являться однородной формой четвертой степени по переменным φ, φ' , и согласно критерию Сильвестра [19] при выполнении неравенства $G > \sqrt{6,4F}$ будет отрицательно определенной функцией. На основании

теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [19] положение относительного равновесия $\varphi = \varphi' = 0$ спутника-гантели на круговой орбите является асимптотически устойчивым. Функция (2.4) является возрастающей с ростом $|\varphi|$ для всех $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Следовательно, управление (2.2) будет гасить

плоские колебания спутника-гантели, начинающиеся не только в малой окрестности положения равновесия $\varphi = \varphi' = 0$, но и при начальных отклонениях $\varphi(t_0) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Для сколь угодно больших значений $\varphi(t_0)$ и скорости $\varphi'(t_0)$ в силу анализа энергии, проведенного в [12] для похожего (ступенчатого) закона управления подвижной массой, имеем убывание полной энергии по геометрической прогрессии, что приводит к уменьшению $\varphi'(t)$. Тем самым хотя тривиальное решение $\varphi = \varphi' = 0$ строго говоря и не является асимптотически устойчивым в целом, но физически при любых начальных отклонений и скоростях происходит затухание движений в окрестности нижнего положения равновесия гантели. Численное интегрирование уравнений движения подтверждают сделанные выводы.

На рис. 2 изображен фазовый портрет системы (2.3) с управлением (2.2), полученный численным интегрированием уравнения движения при следующих числовых значениях параметров системы: $m_1 = 400$ кг, $m_2 = 300$ кг, $m_3 = 100$ кг, $m_4 = 200$ кг, $L = 32$ м, $l_0 = 9$ м, $a = 5$ м·сек

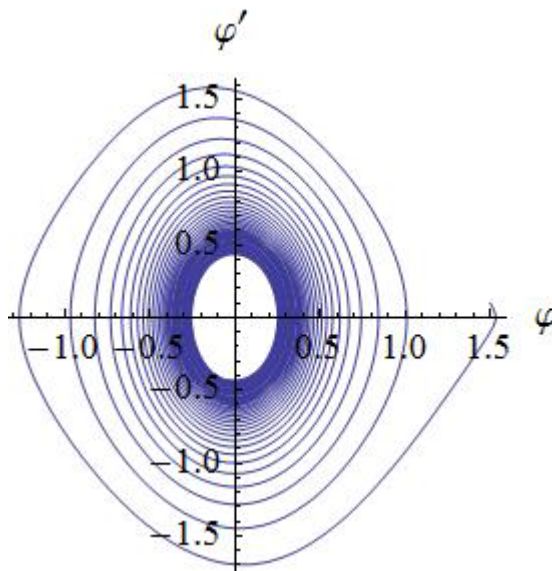


Рис. 2 Фазовый портрет.

и начальных данных: $\varphi(t_0) = 1,5 \text{ рад}$, $\dot{\varphi}(t_0) = 0,1 \text{ рад/сек}$. Интегрирование проведено на промежутке $\nu \in [0; 150] \text{ рад}$. Эти значения взяты в качестве иллюстративного примера, их выбор не опирается на параметры какого-либо конкретного объекта. Фазовая траектория отображает асимптотическое затухание амплитуды и скорости колебаний спутника-гантели вокруг нулевого положения равновесия, начинающихся с достаточно больших значений начальных отклонений. На рис. 3 показана зависимость расстояния l от угла отклонения φ , демонстрирующая ее асимптотическую сходимость к величине l_0 .

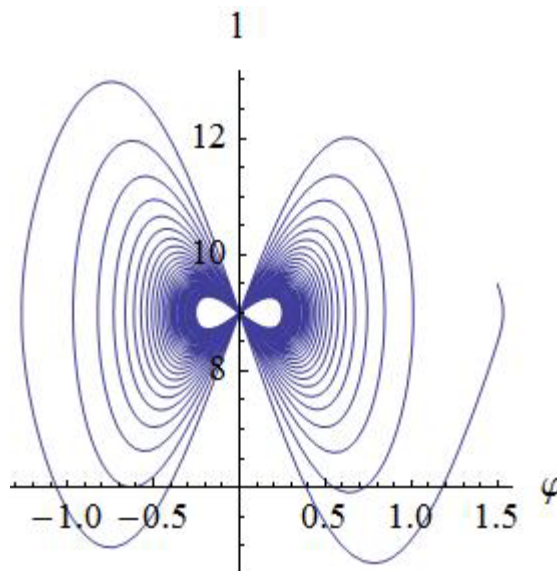


Рис. 3 – Зависимость $l(\varphi)$

3. Раскачка и разворот спутника-гантели.

Известно [2], что наряду с положением относительного равновесия на орбите, при котором спутник направлен по радиусу местной вертикали, система имеет и диаметрально противоположное положение равновесия. Применим закон управления вида (2.2) к реализации задач о раскачке спутника-гантели из произвольной окрестности относительного положения равновесия и его диаметральной переориентации. Будем считать, что в законе управления (2.2) параметр

$$a = \text{const} < 0 \quad (3.1)$$

Уравнение управляемого движения спутника-гантели сохранит свой вид (2.3). Функция $V(\varphi, \varphi')$ (2.4) в окрестности равновесия $\varphi = \varphi' = 0$ является положительно определенной. Для производной этой функции по времени в силу уравнения (2.3) с точностью до слагаемых четвертого порядка справедливо равенство:

$$\frac{1}{n|F|}\dot{V} = \varphi'^2 \left(\frac{1}{2}\varphi'^2 + \frac{15}{4}\varphi^2 + 4\frac{F}{G}\varphi\varphi' \right) + 3\varphi^2 \left(\frac{5}{2}\varphi'^2 + \frac{3}{4}\varphi^2 + 4\frac{F}{G}\varphi\varphi' \right) \quad (3.2)$$

где $F = mal_0 < 0$. Согласно критерию Сильвестра [19] при выполнении неравенства $G > 4\sqrt{\frac{2}{15}}|F|$ производная (3.2) будет отрицательно определенной функцией. На основании теоремы Четаева о неустойчивости [19] положение относительного равновесия $\varphi = \varphi' = 0$ спутника на круговой орбите является неустойчивым. Кроме того, в силу возрастания функции (2.4) с ростом $|\varphi|$ на множестве $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, любая траектория, начинающаяся в окрестности равновесия $\varphi = \varphi' = 0$, покинет это множество $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$. Тем самым управляющий закон (2.2) с отрицательным параметром a реализует процесс раскачки спутника-гантели относительно местной вертикали.

Покажем, что в дальнейшем после диаметрального разворота спутника управление (2.2) при отрицательных значениях параметра a стабилизирует этот спутник в окрестности противоположного положения равновесия $\varphi = \pi$, $\varphi' = 0$.

Введя отклонение $\varphi = \pi + x$, запишем уравнение возмущенного движения

$$x''(A_1 + ml(l_0 - 3ax' \sin x - 2a \sin x)) = 2mla \cos x(x' + 1)x'^2 - \frac{3}{2}(A_1 + ml^2)\sin 2x \quad (3.3)$$

Так как согласно условию (3.1) $a = \text{const} < 0$, то уравнение (3.3) с управлением (2.2) совпадает с уравнением (2.3) с $a = \text{const} > 0$, поэтому нулевое решение $x = x' = 0$ уравнения (3.3) согласно полученному результату п. 2 будет тоже асимптотически устойчивым.

Итак, управление (2.2) при условии (3.1) реализует асимптотически устойчивую диаметрально переориентацию спутника-гантели. Раскачавшись в окрестности положения относительного равновесия, спутник переворачивается на угол π в плоскости орбиты и совершает затухающие колебания в окрестности его противоположного положения относительного равновесия на орбите.

Этот процесс на рис. 4–5 наглядно иллюстрируют графики численных расчетов. Интегрирование проведено при $a = -5$ м·сек и начальных данных: $\varphi(t_0) = 0.4$ рад, $\dot{\varphi}(t_0) = 0.1$ рад/сек на промежутке $\nu \in [0; 200]$ рад. Остальные параметры системы те же, что и были раньше в пункте 2. На фазовом портрете (рис. 4) поведение величины угла φ сначала отображает процесс раскачки спутника вокруг нулевого положения равновесия $\varphi = \varphi' = 0$. После разворота мы видим асимптотическое приближение к новому положению равновесия $\varphi = \pi$, $\varphi' = 0$. На рис. 5 показано поведение расстояния l в зависимости от угла отклонения φ . Сначала при раскачке спутника-гантели периодически нарастают отклонения длины l относительно величины l_0 в окрестности равновесия $\varphi = 0$, а после переворота происходит ее асимптотическая сходимость к l_0 в противоположном положении $\varphi = \pi$. Переворот спутника-гантели осуществляется против часовой стрелки.

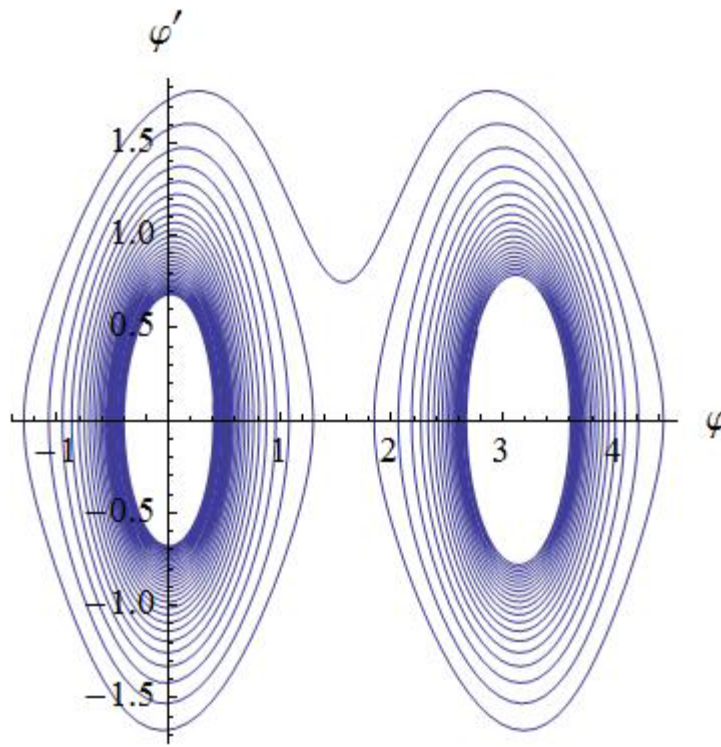


Рис. 4 – Фазовый портрет.

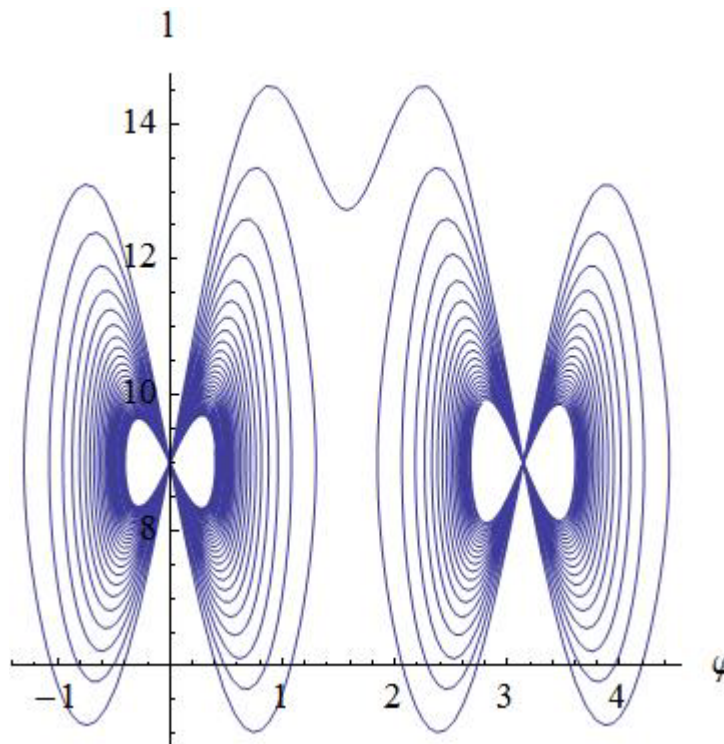


Рис. 5 – Зависимость $l(\varphi)$.

Численные исследования показали, что направление разворота спутника-гантели зависит от начальных условий движения и от параметра a . Более того, зависимость направления разворота спутника-гантели от параметра a позволяет изменением величины этого параметра управлять переходным процессом (реализовывать желаемое направление переворота и ограничивать величину наибольшего отклонения l подвижного груза в процессе переориентации) при одних и тех же начальных условиях.

Заметим, что использованный в работе управляющий закон (2.2) вообще говоря не предполагает ограниченности расстояния $l = l(\varphi, \varphi')$ от O_1 до подвижной точки m_4 . С ростом величины φ' растет значение l , теоретически предоставляя возможность подвижной массе m_4 передвигаться вдоль стержня за его пределы, что является нецелесообразным и крайне затруднительным с точки зрения практической реализации. Поэтому вместо закона (2.2) можно использовать подобные ограниченные законы, например, следующий:

$$l = \begin{cases} l_0 + a\varphi' \sin \varphi, & \text{при } -b \leq a\varphi' \leq b \text{ и } \varphi \leq \theta; \\ l_0 + b \operatorname{sign}(\sin \varphi) \cdot \operatorname{sign}(\varphi'), & \text{при } a\varphi' > b \text{ и } \varphi < -b \operatorname{sign}(\varphi'), \\ l_0 + b \operatorname{sign}(\sin \varphi) \cdot \operatorname{sign}(\varphi'), & \text{при } a\varphi' < -b \text{ и } \varphi > b \end{cases}$$

который был предложен в работе [20] и предполагает ограниченность относительного перемещения подвижной массы m_4 вдоль стержня выбираемой величиной b в обе стороны от значения l_0 при любых значениях переменных φ, φ' .

Заключение. В работе решена задача о параметрическом управлении плоскими маятниковыми движениями спутника-гантели на круговой орбите. Выведено уравнение управляемых плоских движений относительно центра масс спутника-гантели с подвижной массой на эллиптической орбите. Решены задача гравитационной стабилизации относительно плоских возмущений относительного равновесия спутника-гантели на круговой орбите и задача о диаметральной переориентации спутника-гантели с помощью управления подвижной массой под действием гравитационного момента. Для предложенного управления построены функции Ляпунова, необходимые для строгого доказательства асимптотической устойчивости и неустойчивости исследованных движений.

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России № 9.540.2014/К.

Библиографический список

1. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // Прикладная математика и механика. 1963. Т.27. Вып. 3. С. 474 – 483.
2. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.: Изд. МГУ, 1975. - 308 с.
3. Sarychev V.A., Mirer S.A. Relative Equilibria of a Satellite Subjected to Gravitational and Aerodynamic Torgues// Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2000. V. 76. № 1. P. 55-68.

4. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских вращений спутника на круговой орбите // Известия РАН. Механика твердого тела. 2006. № 4. С. 63 – 85.
5. Холостова О.В. Об устойчивости плоских колебаний спутника на круговой орбите // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 2. С. 27 – 42.
6. Дорошин А.В. Эволюция прецессионного движения неуравновешенных гироскопов переменного состава // Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 3. С. 385 – 398.
7. Любимов В.В. Об особенностях в возмущенном вращательном движении спутника с сильным магнитом на борту // Известия. ВУЗов. Авиационная техника. 2009. № 2. С. 29–31.
8. Безгласный С.П., Мысина О.А. О реализации одноосной и трехосной ориентации системы двух тел // Вестник Самарского государственного университета. 2011. № 83. С. 80-90.
9. Безгласный С.П. Худякова М.А. Построение и стабилизация программных относительных движений спутника // Общероссийский научно-технический журнал «Полёт». 2012. № 12. С. 17-21.
10. Безгласный С.П. Активная ориентация гироскопа с переменными моментами инерции // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. Вып. 6. С. 766-777.
11. Стрижак Т.Г. Методы исследования динамических систем типа «маятник». - Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
12. Магнус К. Колебания. - М.: Мир, 1982. 304 с.

13. Акуленко Л.Д. Параметрическое управление колебаниями и вращениями физического маятника (качели) // Прикладная математика и механика. 1993. Т.57. Вып. 2. С. 82-91.
14. Лавровский Э.К., Формальский А.М. Оптимальное управление раскачиванием качелей // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 92-101.
15. Асланов В.С., Безгласный С.П. Устойчивость и неустойчивость управляемых движений двухмассового маятника переменной длины // Известия РАН. Механика твердого тела. 2012. № 3. С. 33–46.
16. Antonio Fernando Bertachini de Almeida Prado, Gislaine de Felipe An analytical study of the powered swing-by to perform orbital maneuvers // Advances in Space Research. 2007. V. 40. P. 102–112.
17. Асланов В.С., Безгласный С.П. Гравитационная стабилизация спутника с помощью подвижной массы // Прикладная математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 4. С. 563–573.
18. Безгласный С.П., Пиякина Е.Е. Параметрическое управление маневрированием космической тросовой системы // Космические исследования. 2015. Т. 53. Вып. 4. С. 353-359.
19. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. 530 с.
20. Безгласный С.П., Пиякина Е.Е., Талипова А.А. Ограниченное управление движениями двухмассового маятника // Автоматизация процессов управления. 2013. № 4 (34). С. 35-41.