

УДК 531.36

Математическое и компьютерное моделирование продольной динамики планетохода с упругой подвеской

Красинский А.Я.^{1*}, Ильина А.Н.^{2}, Красинская Э.М.^{3*},
Рукавишникова А.С.^{4***}**

¹*Московский государственный университет пищевых производств, МГУПП,
Волоколамское шоссе, 11, Москва, 125080;Россия.*

²*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

³*Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
2-я Бауманская улица, 5, стр. 1, Москва, 105005,Россия.*

⁴*Московский физико-технический институт, МФТИ,
Институтский пер., 9, Долгопрудный, Московская область, 141701, Россия*

*e-mail: krasinsk@mail.ru

**e-mail: happyday@list.ru

***e-mail: nasty.ruka@mail.ru

Аннотация

В статье решается задача стабилизации продольного движения планетохода – однозвенного мобильного манипулятора на четырех радиально деформируемых колесах. Подвижное звено манипулятора должно удерживать на постоянной высоте от поверхности рабочий инструмент для обеспечения съемки или сканирования местности. Управляющим воздействием является дополнительное напряжение на якоре двигателей постоянного тока. Для данной модели с использованием избыточных координат и уравнений в форме М.Ф. Шульгина построена

математическая модель, учитывающая сложную нелинейную геометрическую связь. На основе ранее разработанного метода с помощью комплекса программ, написанного в системе MATLAB, найдены возможные значения параметров стационарного движения и линейное управление, стабилизирующее систему до асимптотической устойчивости по всем переменным. Построены графики переходных процессов. Продемонстрирована практическая реализуемость метода решения задач устойчивости и стабилизации голономных систем со сложными нелинейными связями.

Ключевые слова: геометрические связи, избыточные координаты, уравнения М.Ф. Шульгина, стабилизация, стационарное движение, манипулятор, планетоход.

Введение

Одно из принципиальных затруднений при построении математических моделей манипуляторов обусловлено необходимостью учета сложных нелинейных геометрических связей. В этом случае координаты, описывающие состояние системы, не являются независимыми, что делает невозможным использование уравнений Лагранжа второго рода. Применение уравнений Лагранжа с множителями связей приводит к увеличению размерности задачи. Альтернативный способ заключается в использовании свободных от множителей связей уравнений в форме М.Ф. Шульгина [1]. Такой подход позволяет получать строгие нелинейные математические модели голономных систем с избыточными координатами с учетом

полных уравнений геометрических связей, что особенно важно при решении задач устойчивости и стабилизации [2-5].

В данной работе для планетохода – однозвенного мобильного манипулятора с геометрической связью и радиально деформируемыми колесами (рис. 1) – решена задача стабилизации стационарного продольного движения, при котором рабочий инструмент за счет исполнительного привода удерживается на заданной высоте от поверхности качения. Управляющим воздействием является дополнительное напряжение на якоре приводного двигателя. Решение получено применением основанного на использовании векторно-матричных уравнений в форме М.Ф. Шульгина, методов нелинейной теории устойчивости [6-8] и линейно-квадратичной стабилизации [7, 9] алгоритма [10, 11]. Для численного моделирования разработан комплекс программ в системе MATLAB.

Постановка задачи

В реальных условиях работы планетоходов используются колеса, в которых внешняя поверхность колеса, взаимодействующая с поверхностью качения (периферия колеса) деформируется незначительно, а ось вращения колеса за счет упругого подвеса перемещается внутри этой периферии. В случае достаточно малых скоростей продольного движения основным видом перемещений оси будут вертикальные. Кроме того, условия работы таких устройств приводят к необходимости применения электроприводов в исполнительных устройствах. Исходя из этого, в данной работе в качестве модели планетохода рассматривается

мехатронная система (рис.1), состоящая из кузова массы M , установленного на четырёх радиально деформируемых колёсах, и подвижного звена OD .

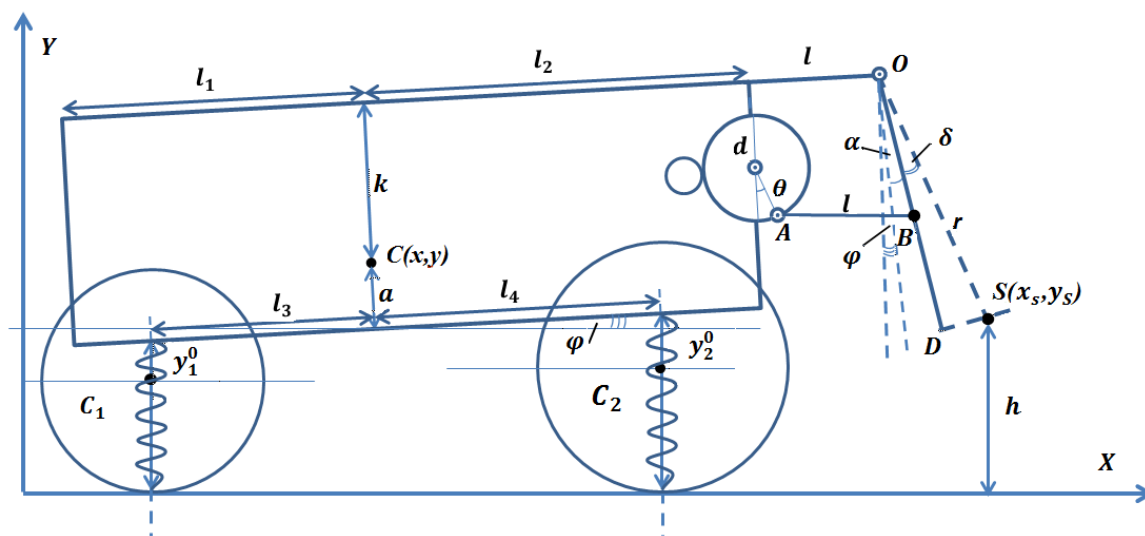


Рис. 1. Схема манипулятора

К нижнему концу звена прикреплён рабочий инструмент, который при дальнейшем рассмотрении будет учитываться как материальная точка S массы m . Предполагается, что манипулятор может совершать только продольное движение, причем кузов может наклоняться на некоторый угол φ от горизонтали. Требуется поддерживать заданную постоянную скорость продольного движения при удержании рабочего инструмента (напр., видеокамеры или сканера) на заданной высоте h .

Положение звена манипулятора (угол α отклонения от кузова) регулируется поворотом колеса редуктора двигателя, соединенного с подвижным звеном нерастяжимым стержнем AB постоянной длины l . В точках O , A и B находятся плоские шарниры. Таким образом, угол α наклона звена OD относительно кузова зависит от угла θ поворота приводного колеса (нелинейная геометрическая связь).

Управление данной моделью предлагается осуществлять с помощью двух приводов. Задачей первого является обеспечение постоянной продольной скорости всего объекта. Вторым должен стабилизировать заданную высоту h рабочего инструмента. В качестве управляющих воздействий применяется дополнительное напряжение на якорных обмотках коллекторных двигателей постоянного тока с независимым возбуждением. Информацию о состоянии системы считаем полной.

При построении математической модели делаются следующие допущения:

- 1) Кузов манипулятора рассматривается как твёрдое тело, обладающее массой M и моментом инерции J_c ;
- 2) Массы приводного рычага AB и звена OD манипулятора пренебрегаем, а рабочий инструмент (сканер) моделируется материальной точкой массы m ;
- 3) Колёса моделируются пружинами жесткостей C_1 и C_2 . В недеформированном состоянии длины пружин обозначим y_1^0 и y_2^0 соответственно;

Стабилизация заданной скорости продольного движения центра масс обеспечивается созданием момента со стороны двигателя первого привода, компенсирующего силу сопротивления на заданной скорости продольного движения. Его действие учитывается компенсирующей силой P (с учетом противо-ЭДС P может рассматриваться как зависящая от скорости сила специальной структуры [12]). Определение соответствующего напряжения на приводном двигателе не представляет принципиальных затруднений и здесь, для простоты модели, не рассматривается.

Требуется доказать возможность стабилизация стационарного движения

манипулятора при выбранном способе управления и определить стабилизирующее высоту рабочего инструмента управляющее воздействие *и* как линейную функцию фазовых координат.

Метод исследования

Предлагаемый подход к исследованию стационарных движений голономных систем состоит из нескольких шагов. Сначала строится математическая модель с использованием уравнений в форме М.Ф. Шульгина [1,2]. Нелинейная математическая модель должна включать в себя динамику конкретных исполнительных устройств. В зависимости от задачи возможно использование различных типов переменных (Лагранжа, Рауса) [10-13].

Далее определяются параметры, при которых в системе реализуется заданное стационарное движение. Составляются уравнения возмущенного движения, в них выделяется первое приближение и приводится к нормальному виду.

Затем проводится анализ структуры уравнений движения. Как известно [3], характеристическое уравнение первого приближения для систем с геометрическими связями необходимо имеет нулевые корни в числе, не меньшем числа геометрических связей, т.е. устойчивость их движений возможна только в критических случаях. На данном этапе проводится выделение критических переменных и сведение системы к специальному виду теории критических случаев [6-8] проведением линейной замены по зависимым координатам.

В приведенной к специальному виду полной нелинейной системе уравнений возмущенного движения, включающей уравнение продифференцированной

геометрической связи, выделяется линейная управляемая подсистема.

После проверки управляемости [7] подсистемы, из решения для управляемой подсистемы линейно-квадратичных задач стабилизации [7, 9, 15] находится линейное стабилизирующее управление.

В заключение в полной нелинейной системе, замкнутой найденным линейным управлением, проводится анализ устойчивости.

Замечание 1. Необходимо отметить, что, в отличие от неголономных систем, необходимо учитывать, что начальные возмущения не произвольны, а связаны исходными, не дифференцированными уравнениями геометрических связей.

Математическая модель

Введем неподвижную декартову систему координат с началом в некоторой точке O на поверхности качения. Ось Oy направим по вертикали вверх, а ось Ox горизонтально по поверхности качения в сторону движения вправо. Геометрическую конфигурацию исследуемой системы будем описывать следующими параметрами: центр масс кузова $C(x, y)$, φ – угол поворота кузова, отсчитываемый от горизонтали, α – угол наклона звена OD , отсчитываемый как показано на рис. 1, θ – угол поворота колеса редуктора электродвигателя.

Как уже отмечалось выше, на систему наложена геометрическая связь, так как угол α зависит от угла θ поворота колеса редуктора электродвигателя. Из условия $AB=l$ имеем [4] нелинейное уравнение геометрической связи:

$$(L(\cos \alpha - 1) + d(1 - \cos \theta))^2 + (L \sin \alpha + l - d \sin \theta)^2 = l^2, \quad (1)$$

где $L=OB$, d – радиус колеса. В качестве избыточной координаты можно принять как α , так и θ . Здесь более удобен второй вариант.

Продифференцировав (1) по времени, получим уравнение кинематических связей, из которых выразим скорость изменения зависимой координаты:

$$\dot{\theta} = B(\alpha, \theta) \cdot \dot{\alpha}, \quad B(\alpha, \theta) = \frac{L(d \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \alpha + l \cos \alpha)}{d(L \sin(\alpha - \theta) + (L - d) \sin \theta + l \cos \theta)} \quad (2)$$

Для кинетической и потенциальной энергий имеем:

$$T = T_{\text{кузов}} + T_S + T_n,$$

$$T_{\text{кузов}} = \frac{M}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J_C}{2} \dot{\varphi}^2; \quad T_n = \frac{J_\theta}{2} (\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2; \quad T_S = \frac{m}{2} (\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2) =$$

$$= \frac{m}{2} ((\dot{x} - \tau_1(\alpha, \varphi)\dot{\varphi} + r \cos(\alpha + \delta + \varphi)\dot{\alpha})^2 + (\dot{y} - \tau_2(\alpha, \varphi)\dot{\varphi} + r \sin(\alpha + \delta + \varphi)\dot{\alpha})^2);$$

$$\tau_1(\alpha, \varphi) = k \cos \varphi + (l + l_2) \sin \varphi - r \cos(\alpha + \delta + \varphi);$$

$$\tau_2(\alpha, \varphi) = k \sin \varphi - (l + l_2) \cos \varphi - r \sin(\alpha + \delta + \varphi).$$

$$\Pi = \Pi_{\text{кузов}} + \Pi_S + \Pi_1 + \Pi_2,$$

$$\Pi_{\text{кузов}} = Mgy, \quad \Pi_S = mg(y + \tau_1(\alpha, \varphi)), \quad \Pi_i = C_i \frac{(y - a \cos \varphi - (-1)^i l_{i+2} \sin \varphi - y_i^0)^2}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Динамику коллекторного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением будем описывать [14] вторым законом Кирхгофа:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + k_3 \frac{d\theta}{dt} = k_1 e_v, \quad e_b = k_3 \frac{d\theta}{dt}, \quad (3)$$

где e_v – напряжение на выходе усилителя, подающего питание на якорную обмотку двигателя, e_b – напряжение противо-ЭДС, k_l – коэффициент преобразователя

питания, k_3 – постоянная двигателя, L_a – индуктивность обмотки якоря, R_a – его сопротивление, i_a – ток в цепи якоря.

Используем (2) для исключения $\dot{\theta}$ из выражения кинетической энергии. С учетом действующих на систему сил, общий вид уравнения движения в форме М.Ф. Шульгина запишутся в виде

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L^*}{\partial y} = -b_0 \dot{y}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L^*}{\partial \alpha} = B(\alpha, \theta) \left(-b_0 B(\alpha, \theta) \dot{\alpha} + k_2 i_a + \frac{\partial L^*}{\partial \theta} \right); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L^*}{\partial x} = P - b_2 \dot{x}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L^*}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $L^* = T^* - \Pi$, звездочкой обозначено выражение после исключения зависимой скорости, b_0, b_1, b_2 – постоянные.

Замечание 2. Как видно из выражения для функции L^* , координата x является циклической.

С учетом обозначений

$$\tau_3(\alpha) = k^2 + (l + l_2)^2 - r^2 - 2r\tau_4(\alpha); \quad \tau_5(\alpha) = k \sin(\alpha + \delta) + (l + l_2) \cos(\alpha + \delta);$$

$$\tau_4(\alpha) = k \cos(\alpha + \delta) - (l + l_2) \sin(\alpha + \delta) - r;$$

$$y_i = y_i(\alpha, \varphi) = y - a \cos \varphi - (-1)^i l_{i+2} \sin \varphi; \quad i = 1, 2,$$

система (4) в рассматриваемой задаче будет иметь вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
(M + m)\ddot{x} - m\tau_1(\alpha, \varphi)\ddot{\varphi} + mr \cos(\alpha + \delta + \varphi)\ddot{\alpha} - 2mrsin(\alpha + \delta + \varphi)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + \\
+ m\tau_2(\alpha, \varphi)\dot{\varphi}^2 - mrsin(\alpha + \delta + \varphi)\dot{\alpha}^2 = P - b_2\dot{x}; \\
(M + m)\ddot{y} + mrsin(\alpha + \delta + \varphi)\ddot{\alpha} - m\tau_2(\alpha, \varphi)\ddot{\varphi} - m\tau_1(\alpha, \varphi)\dot{\varphi}^2 + \\
+ 2mr\cos(\alpha + \delta + \varphi)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + mr \cos(\alpha + \delta + \varphi)\dot{\alpha}^2 + (M + m)g + \\
+ C_1(y_1(y, \varphi) - y_1^0) + C_2(y_2(y, \varphi) - y_2^0) = -b_0\dot{y}; \\
mr \cos(\alpha + \delta + \varphi)\ddot{x} + mrsin(\alpha + \delta + \varphi)\ddot{y} + (mr^2 + J_\theta B^2)\ddot{\alpha} + \\
+ (J_\theta B - mr\tau_4(\alpha))\ddot{\varphi} + J_\theta B \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + 2 \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right) \dot{\alpha}^2 + J_\theta B \frac{\partial B}{\partial \theta} \dot{\alpha}\dot{\varphi} - \\
- mr\tau_5(\alpha)\dot{\varphi}^2 + mgr \sin(\alpha + \delta + \varphi) = B(-b_1 B \dot{\alpha} + k_2 i_a); \\
- m\tau_1(\alpha, \varphi)\ddot{x} - m\tau_2(\alpha, \varphi)\ddot{y} + (J_\theta B - mr\tau_4(\alpha))\ddot{\alpha} + 2mr\tau_5(\alpha)\dot{\alpha}\dot{\varphi} + \\
+ (m\tau_3(\alpha) + J_\theta + J_C)\ddot{\varphi} + \left(mr\tau_5(\alpha) + J_\theta \left(\frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \theta} B \right) \right) \dot{\alpha}^2 - mg\tau_2(\alpha, \varphi) + \\
+ C_1(y_1(y, \varphi) - y_1^0)(a \sin \varphi + l_3 \cos \varphi) + C_2(y_2(y, \varphi) - y_2^0)(a \sin \varphi + l_4 \cos \varphi) = 0.
\end{array} \right. \quad (5)$$

Для получения полной математической модели, к системе (4) надо добавить уравнение кинематических связей (2) и уравнение динамики двигателя (3).

Определение параметров стационарного движения

Как видно из выражения для функции L^* , координата x является циклической и в рассматриваемой задаче существует стационарное движение

$$y = y_0, \quad \alpha = \alpha_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad i_a = i_a^0, \quad \theta = \theta_0, \quad \dot{x} = v, \quad (6)$$

параметры которого определяются из соотношений

$$\begin{cases} P - b_2 v = 0; \\ (M + m)g + C_1(y_1(y_0, \varphi_0) - y_1^0) + C_2(y_2(y_0, \varphi_0) - y_2^0) = 0; \\ mgr \sin(\alpha_0 + \delta + \varphi_0) = B(\alpha_0, \theta_0) k_2 i_a^0; \\ -mg\tau_2(\alpha_0, \varphi_0) + C_1(y_1(y_0, \varphi_0) - y_1^0)(a \sin \varphi_0 + l_3 \cos \varphi_0) + \\ + C_2(y_2(y_0, \varphi_0) - y_2^0)(a \sin \varphi_0 + l_4 \cos \varphi_0) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

полученных подстановкой (6) в (5). Для однозначного определения должны быть учтены уравнение геометрической связи (1), и выражение для заданной высоты h_0 рабочего инструмента:

$$h_0 = y_0 + k \cos \varphi_0 + (l_2 + l) \sin \varphi_0 - r \cos(\alpha_0 + \delta + \varphi_0). \quad (8)$$

Таким образом, имеем систему из шести нелинейных уравнений относительно шести неизвестных. Для численного решения этой системы возникает вопрос об определении области их изменения, в которой существует единственное решение и выборе начального приближения.

Очевидно, что область изменения параметров определяется не только аналитическими уравнениями, но и геометрией планетохода. Сразу отметим, что геометрическая связь накладывает жесткие ограничения на изменение угла α (и θ , соответственно) (рис.2): $\alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}$, где

$$\alpha_{\min} = -\delta, \quad \alpha_{\max} = \arccos\left(\frac{L^2 - d(L + l)}{L\sqrt{(L - d)^2 + l^2}}\right) + \arcsin\left(\frac{L - d}{\sqrt{(L - d)^2 + l^2}}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Замечание 3. Максимальный угол α_{\max} , как видно из рис. 2., определяется геометрической связью. Минимальный угол α_{\min} выбран из условия минимальности расстояния от горизонтальной поверхности (поверхности земли) до рабочего инструмента в предположении, что $\varphi=0$.

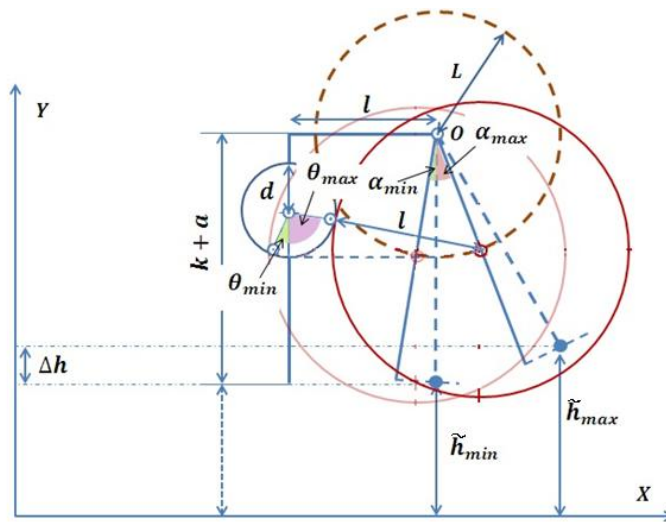


Рис. 2. Схема подвижной части манипулятора

Замечание 4. Реально возможные предельные значения h_{\min} и h_{\max} несколько отличаются от показанных на рис. 2. \tilde{h}_{\min} и \tilde{h}_{\max} , так как при движении рабочего инструмента кузов манипулятора может наклоняться. Эти величины могут быть уточнены с помощью уравнений (7).

Из второго и четвертого уравнений системы (7), а также уравнения (8) можно построить графики зависимостей $\varphi = \varphi(\alpha)$ и $y = y(\varphi)$.

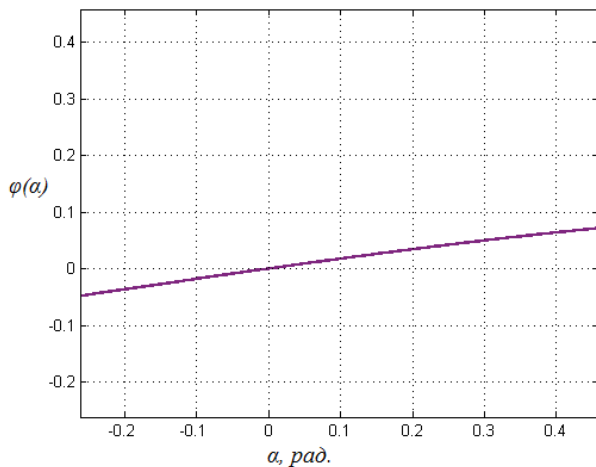


Рис. 3. Зависимость $\varphi = \varphi(\alpha)$

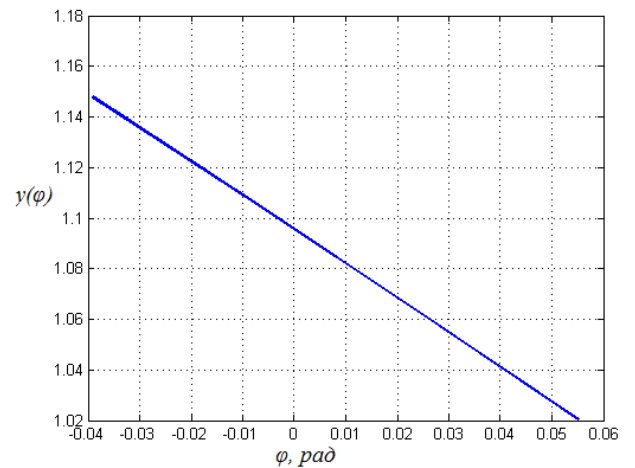


Рис. 4. Зависимость $y = y(\varphi)$.

Наконец, зафиксировав некоторое $\tilde{h}_{\min} \leq h \leq \tilde{h}_{\max}$ и выразив из уравнения (8) y как функцию h , α и φ , можно графически найти значения углов α и φ , соответствующие заданной высоте h , что показывает, что на рассматриваемом интервале система будет иметь единственное решение.

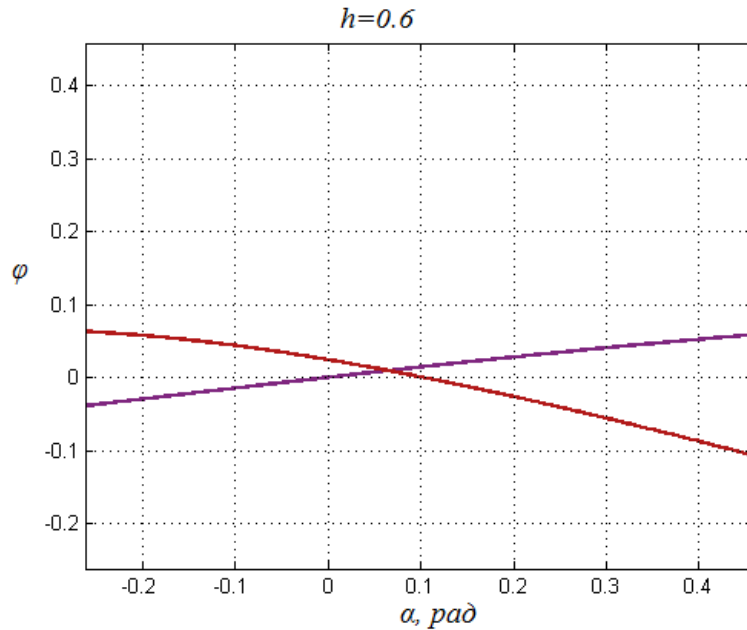


Рис. 5. Значения углов α и φ при фиксированном параметре h

Численные значения параметров, при которых строились графики, приведены в таблице 1.

Таблица 1. Физические параметры планетохода			
$M=100$ кг;	$l_3 = 1.40$ м;	$d=0.30$ м;	$y_0^1 = 0.60$ м
$m=60$ кг;	$l_4 = 1.60$ м;	$L=0.63$ м;	$y_0^2 = 0.50$ м
$g=9.81$ м/сек ²	$l_2 = 2$ м;	$r=1.60$ м;	$C_1 = 5.5470e + 05$ Н/м
$a=0.50$ м;	$l=1$ м;	$\delta = \pi / 12$ рад	$C_2 = 9.8293e + 03$ Н/м
$k=1$ м;			

В результате расчета при фиксированной высоте $h = 0.60$, $0.50 = h_{\min} \leq h \leq h_{\max} = 0.79$, были получены параметры стационарного движения:

$$y_0 = 1.0830, \alpha_0 = 0.0646, \varphi_0 = 0.0093, \theta_0 = 0.1359.$$

Решение задачи стабилизации

Введем возмущения:

$$y = y_0 + x_1, \dot{y} = x_2, \alpha = \alpha_0 + x_3, \dot{\alpha} = x_4, \dot{x} = x_5,$$

$$\varphi = \varphi_0 + x_6, \dot{\varphi} = x_7, i_a = i_a^0 + x_8, \theta = \theta_0 + x_9, e_v = e_v^0 + u.$$

В уравнениях возмущенного движения выделим первое приближение и приведем уравнения к нормальному виду:

$$\dot{x} = Ax + Su + X^{(2)}, \quad (9)$$

где $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9)$ – фазовый вектор, A, S – числовые матрицы вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & 0 & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ 0 & 0 & 0 & a_{84} & 0 & 0 & 0 & a_{88} & a_{89} \\ 0 & 0 & 0 & a_{94} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s = \frac{k_1}{L_a}.$$

Верхний индекс ⁽²⁾ означает порядок младших членов в разложении.

Выделим переменную, соответствующую нулевому корню характеристического уравнения. Последнее уравнение системы (10) имеет вид

$$\dot{x}_9 = B(\alpha_0, \theta_0)x_4 + X_\theta^{(2)}(x), \quad (10)$$

С помощью линейной замены [3]

$$x_9 = B(\alpha_0, \theta_0)x_3 + z, \quad (11)$$

уравнение (11) преобразуется к виду

$$\dot{z} = \tilde{X}_\theta^{(2)}(x_3, z)$$

и система (9) приводится к специальному виду Ляпунова теории критических случаев [6-8]. Далее, согласно [10], выделим управляемую подсистему, не содержащую критическую переменную z

$$\dot{w} = Mw + Nu, \quad w' = (x_1, \dots, x_8), \quad (12)$$

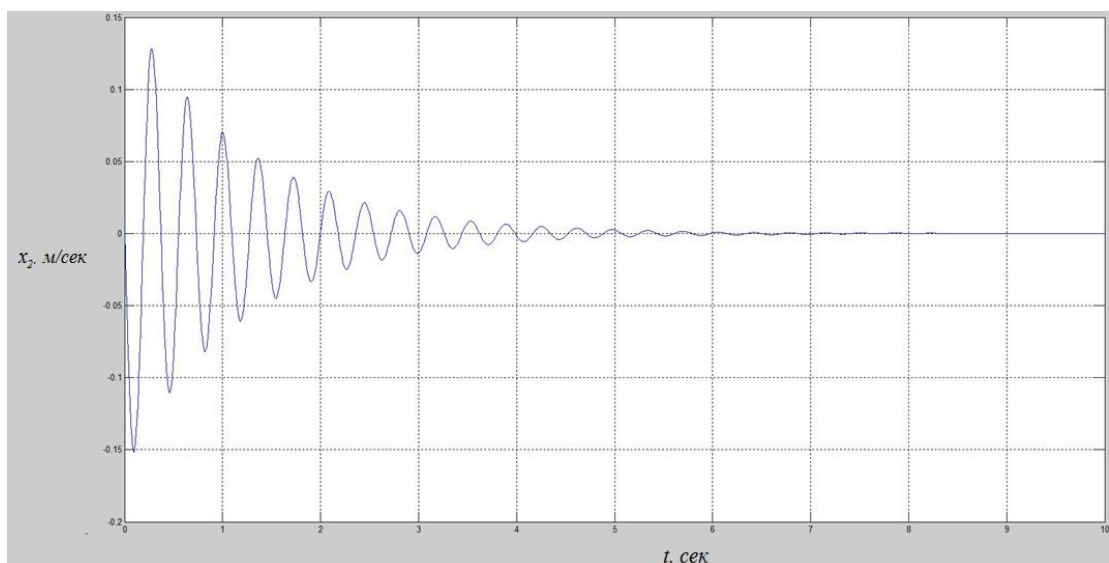
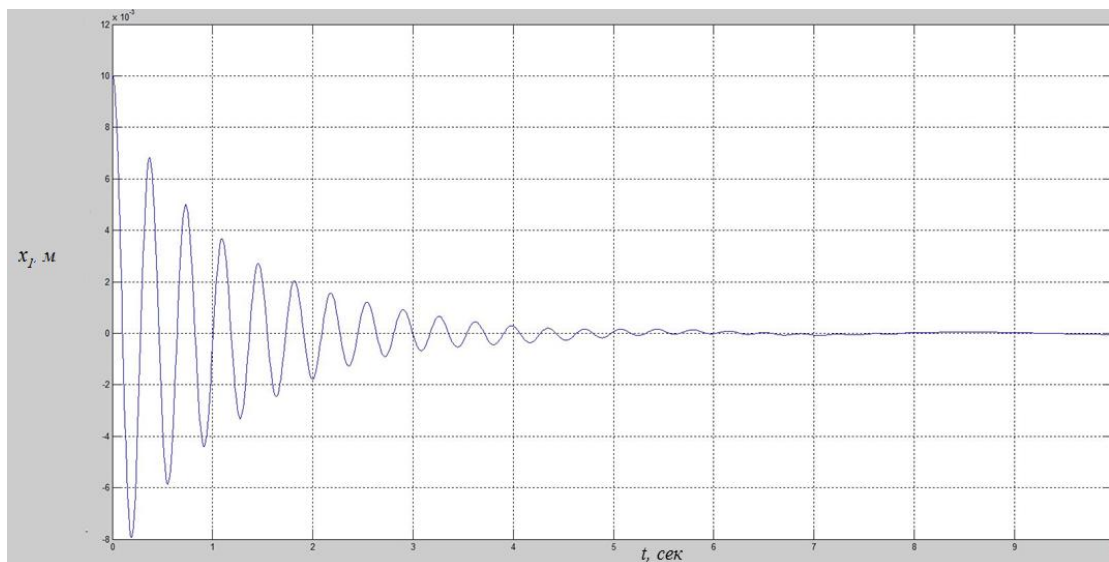
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \tilde{a}_{23} & a_{24} & a_{25} & 0 & a_{27} & a_{28} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & \tilde{a}_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 & a_{47} & a_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & \tilde{a}_{53} & a_{54} & a_{55} & 0 & a_{57} & a_{58} \\ a_{71} & a_{72} & \tilde{a}_{73} & a_{74} & a_{75} & 0 & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & 0 & a_{84} & 0 & 0 & 0 & a_{88} \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ s \end{pmatrix}.$$

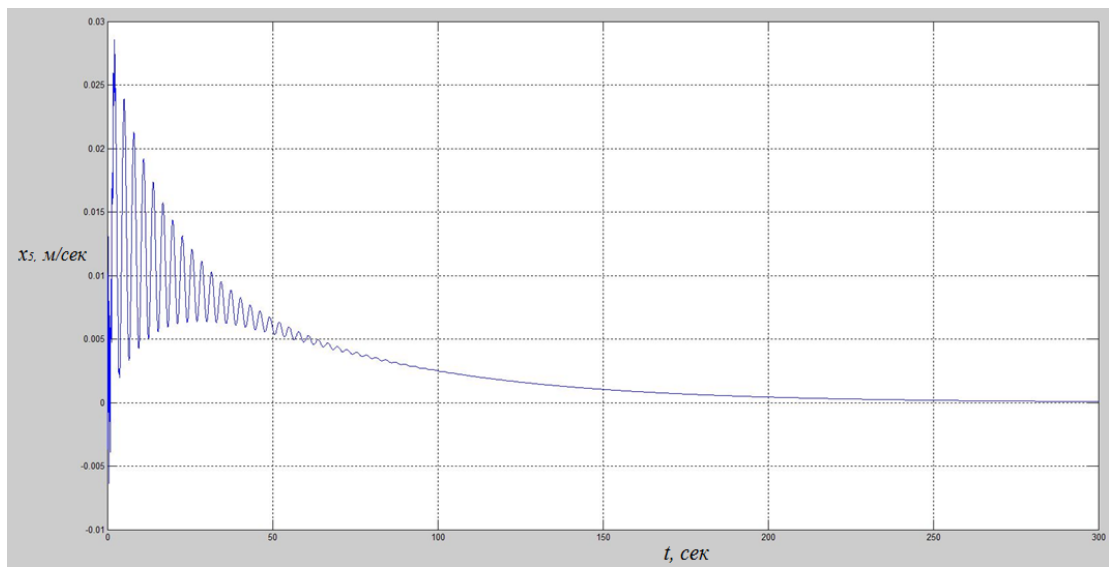
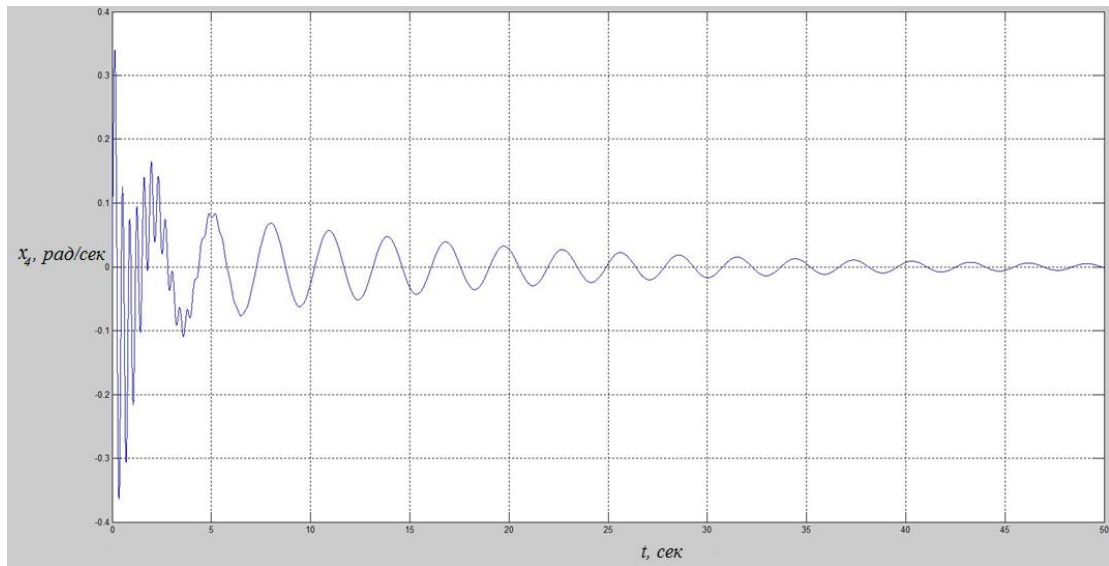
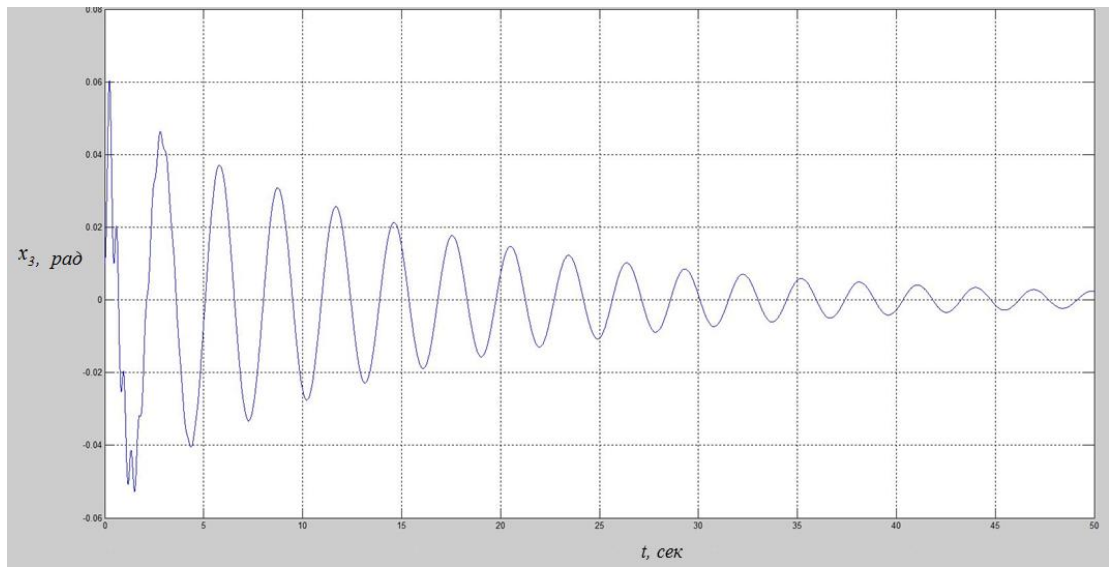
Замечание 5. Обратим внимание, что замена (11) приводит к изменению некоторых коэффициентов матрицы системы. В нашем случае это будут коэффициенты, соответствующие фазовой переменной x_3 . Измененные коэффициенты обозначены \tilde{a}_{ij} .

Далее необходимо проверить выполняемость критерия управляемости для системы (12). В нашем случае оно имеет вид

$$\text{rank}(N \ MN \ M^2 N \ \dots \ M^7 N) = 8.$$

Для однозначного определения коэффициентов линейного управления применяется метод Н.Н. Красовского [7, 9] решения линейно-квадратичной задачи стабилизации для подсистемы (12). Численное решение использует процедуру Репина-Третьякова [15]. Ниже приведены графики переходных процессов при найденном управлении.





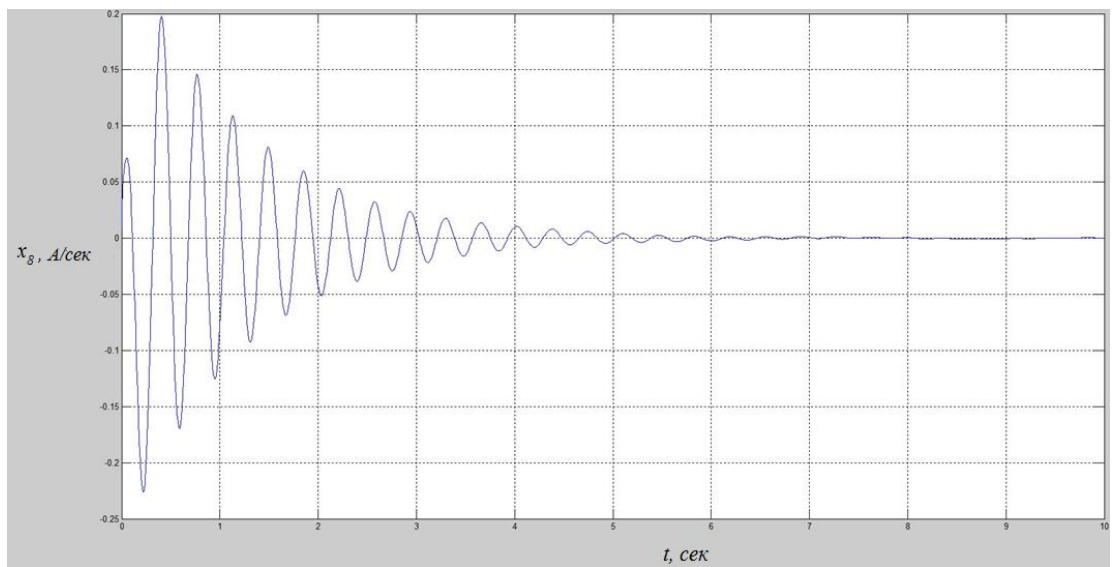
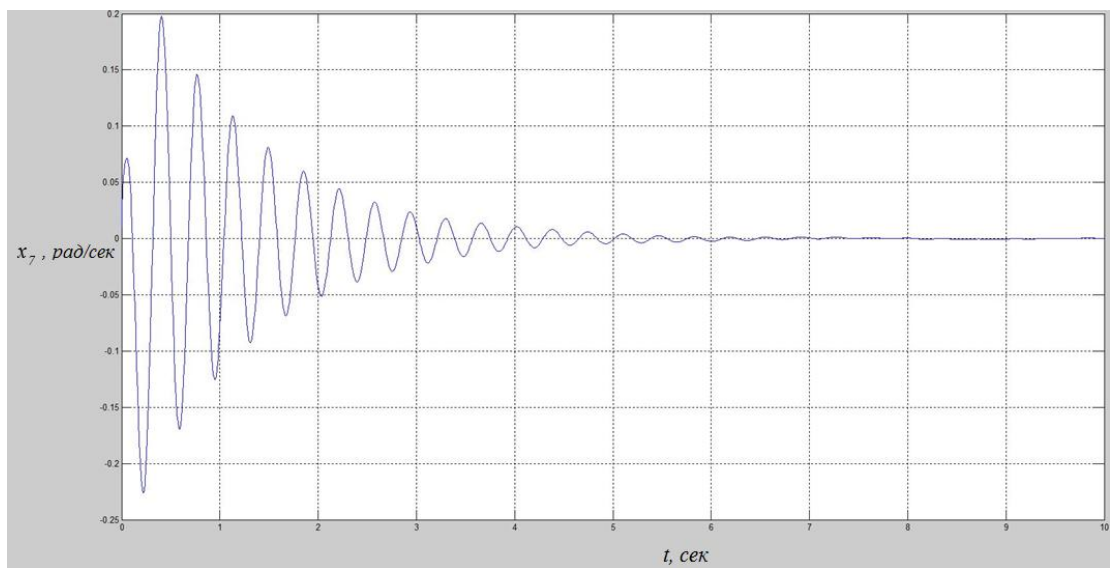
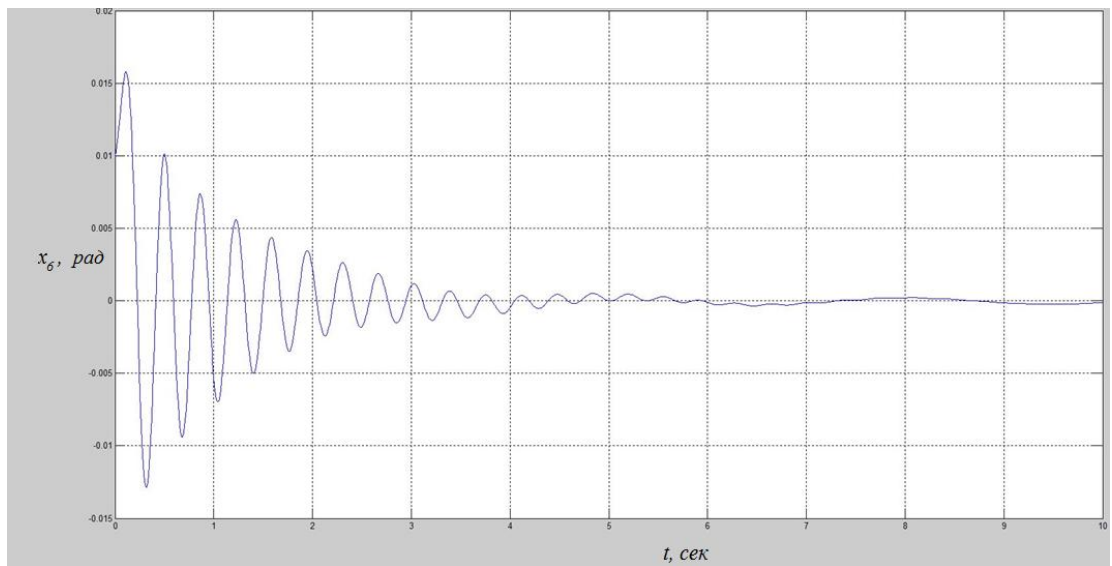


Рис. 6. Графики переходных процессов

Заключение и выводы

Таким образом, на основе уравнений движения в форме М.Ф. Шульгина, построена аккуратная математическая модель мобильного однозвенного манипулятора (планетохода) с радиально деформируемыми колесами с учетом нелинейной геометрической связи. С помощью специально разработанного комплекса программ в системе MATLAB определены возможные параметры стационарного движения планетохода; доказана управляемость системы предложенным способом (дополнительным напряжением на якорной обмотке приводного двигателя постоянного тока); найдены коэффициенты стабилизирующего воздействия, как линейной функции от фазовых координат системы; приведенные графики переходных процессов, показывающие асимптотическую устойчивость по всем переменным.

Полученные результаты полностью соответствуют ранее доказанным теоремам о стабилизации [10-11] установившихся движений механических систем с избыточными координатами. Рассмотренный пример демонстрирует возможность применения методики, разработанной в [10-11] для решения задачи стабилизации стационарных движений голономных систем со сложными нелинейными связями. В данной работе информация о состоянии системы предполагалась полностью известной, однако используемый подход обладает значительными преимуществами и при моделировании и стабилизации систем с неполной информацией о состоянии [16].

Библиографический список

1. Шульгин М.Ф. О некоторых дифференциальных уравнениях аналитической динамики и их интегрировании // Научные труды САГУ. 1958. вып. 144. С. 183.
2. Красинская Э.М., Красинский А.Я., Обносов К.Б. О развитии научных методов школы М.Ф. Шульгина в применении к задачам устойчивости и стабилизации равновесий мехатронных систем с избыточными координатами // Сборник статей. Теоретическая механика. Москва, МГУ, 2012. вып.28. С. 169-184.
3. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об устойчивости и стабилизации равновесия механических систем с избыточными координатами // Наука и образование. 2013. № 3. С. 347-376.
4. Красинский А.Я., Красинская Э.М., Ильина А.Н. О моделировании динамики мехатронных систем с геометрическими связями как систем с избыточными координатами // Материалы 8-й Всероссийской мультиконференции по проблемам управления. Дивноморское, Геленджик, Россия, 28 сентября – 3 октября 2015. Т.2. С. 37-39.
5. Красинский А.Я., Красинская Э.М. О допустимости линеаризации уравнений геометрических связей в задачах устойчивости и стабилизации равновесий // Сборник статей. Теоретическая механика. Москва, МГУ, 2015. Вып. 29. С.54 – 65.
6. Ляпунов А.М. Собрание сочинений. - М–Ленинград: Изд-во АН СССР, 1956. Т.2. –481 с.
7. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.

8. Каменков Г.В. Устойчивость и колебания нелинейных систем. – М.: Наука, 1972. Т.2. – 215 с.
9. Гальперин Е.А., Красовский Н.Н. О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем // Прикладная математика и механика. 1963. Т. 27. Вып. 6. С 988-1004.
10. Красинская Э.М., Красинский А.Я. Об одном методе исследования устойчивости и стабилизации установившихся движений механических систем с избыточными координатами // Материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления ВСПУ-2014, Москва, 1–19 июня 2014. С. 1766-1778.
11. Красинский А.Я., Красинская Э.М. Об одном методе стабилизации установившихся движений с нулевыми корнями в замкнутой системе // Автоматика и телемеханика. 2016. №8. С. 85-100.
12. Румянцев В.В. Об устойчивости стационарных движений спутников. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 156 с.
13. Клоков А.С., Самсонов В.А. О стабилизируемости тривиальных установившихся движений гироскопически связанных систем с псевдоциклическими координатами // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. № 2. С. 199-202.
14. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. –480 с.

15. Репин Ю.М., Третьяков В.Е. Решение задачи об аналитическом конструировании регуляторов на электронных моделирующих устройствах // Автоматика и телемеханика. 1963. Т. 24. № 6. С. 738-743.

16. Каюмова Д.Р. О стабилизации движения робота с деформируемыми колесами при неполной информации о состоянии // Труды МАИ. 2012. №53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29487>