

УДК 519.676 + 621.391

Анализ систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры на примере системы стабилизации малого искусственного спутника¹

Т.А. Аверина, К.А. Рыбаков

Аннотация

Рассматривается задача анализа нелинейных систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры системы и два метода ее решения: метод статистического моделирования и спектральный метод. Разработанные методы и алгоритмы применяются к задаче анализа системы стабилизации малого спутника.

Ключевые слова:

система управления ансамблем траекторий; система со случайной структурой; метод статистического моделирования; спектральный метод; стабилизация

Введение

В работе рассматривается задача анализа системы стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, с учетом возможного отказа управляющего устройства.

Вопросы, связанные с актуальностью разработки и применения малых искусственных спутников стандарта CubeSat (нано-спутников и пико-спутников), достаточно подробно освещены в работах [1–3]. В качестве примеров можно привести международную систему Disaster Monitoring Constellation, позволяющую производить мониторинг катастроф по всему миру; норвежский спутник nCube, отслеживающий перемещение кораблей по территориаль-

¹ Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (темы № 09-01-00798, № 08-01-00334).

ным водам Норвегии; проект AAUSAT, предназначенный для получения детальных изображений Земли; спутник UWE-1 (Вюрцбургский университет), позволяющий анализировать использование технологий TCP/IP для телеметрических и телекомандных данных с учетом проблем задержек и помех; японский проект XI, созданный для демонстрации и тестирования систем спутниковой платформы с использованием готовых элементов, включая проверку аппаратуры спутника в условиях реального орбитального полета.

Учет возможных отказов управляющего устройства (например, срывов стабилизации) в случайные моменты времени приводит к необходимости использования моделей систем со случайной структурой [4].

Отметим, что в настоящей работе задача рассматривается в достаточно общей постановке, а именно как задача анализа многомерных нелинейных систем управления ансамблем траекторий [5] с учетом случайного изменения структуры системы. Для решения этой задачи применяются два подхода: метод статистического моделирования [6, 7], основанный на моделировании траекторий системы управления, и спектральный метод [8], в основе которого лежит переход к детерминированной задаче нахождения плотности вероятности вектора состояния как наиболее полной характеристики. Оба метода позволяют оценивать любые вероятностные характеристики выходных процессов, в том числе и плотность вероятности. Аналогичный подход был использован авторами при анализе стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами [9].

Постановка задачи анализа нелинейных систем управления ансамблем траекторий

Пусть $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$ – смешанный процесс, где $s(t)$ – дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, S\}$, S – число структур системы, а $\mathbf{y}(t)$ – n -мерный непрерывный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} = f^{(l)}(t, \mathbf{y}(t)), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0 \in \Omega \subset R^n, \quad (1)$$

где $t \in [t_0, T]$; $f^{(l)}(t, \mathbf{y}): [t_0, T] \times R^n \rightarrow R^n$ – вектор-функция размера n ; l – номер структуры системы ($l = 1, 2, \dots, S$); множество Ω ограничено.

Вероятность перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяет следующему условию [4]:

$$\begin{aligned} P(s(t + \Delta t) = r \mid s(t) = l, \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) &= v_{lr}(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), \\ P(s(t + \Delta t) = l \mid s(t) = l, \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) &= 1 - v_{ll}(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), \\ s(t_0) = s_0, \quad l, r = 1, 2, \dots, S, \quad l \neq r, \end{aligned} \quad (2)$$

где функция $\nu_{lr}(t, \mathbf{y}) : [t_0, T] \times R^n \rightarrow [0, +\infty)$ называется *интенсивностью* перехода,

$\nu_{ll}(t, \mathbf{y}) = \sum_{r=1 \neq l}^S \nu_{lr}(t, \mathbf{y})$. Данное условие обеспечивает при любом фиксированном $\mathbf{y} \in R^n$ отсут-

ствие нескольких переключений процесса $s(t)$ за малый интервал времени Δt . Предполагается, что в моменты переключения траектории процесса $\mathbf{y}(t)$ остаются непрерывными, т.е. рассматривается случай точного восстановления реализаций [4, 10].

Система, описываемая соотношениями (1) и (2), является частным случаем стохастической мультиструктурной системы с распределенными переходами (при отсутствии случайных возмущений, действующих на объект управления).

Следуя [4, 9] процесс $s(t)$ будем называть *процессом смены структуры*, $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$ – *процессом со случайной структурой*, а систему, описываемую уравнениями (1) и (2), – *системой управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры*. Кроме того, при фиксированном $t \in T$ будем называть $\mathbf{y}(t)$ *вектором состояния*, а $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$ – *расширенным вектором состояния*.

Наиболее полной вероятностной характеристикой расширенного вектора состояния является упорядоченная совокупность *ненормированных плотностей распределения* $p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) : [t_0, T] \times R^n \rightarrow [0, +\infty)$ вектора состояния ($l = 1, 2, \dots, S$), удовлетворяющих условию

$$\sum_{l=1}^S \int_{R^n} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1, \quad t \in [t_0, T]. \quad (3)$$

Начальное состояние $[\mathbf{y}_0, s_0]^T$ описывается заданными ненормированными плотностями распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$ или начальной плотностью $p_0(\mathbf{y})$ и вероятностями $P_0^{(l)} = P(s(t_0) = l)$ того, что структура системы имеет номер l , при этом $p_0^{*(l)}(\mathbf{y}) = P_0^{(l)} p_0(\mathbf{y})$; $l = 1, 2, \dots, S$.

Известно [4], что ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (при нулевой матрице диффузии):

$$\frac{\partial p^{*(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[f_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \right] - \nu_{ll}(t, \mathbf{y}) p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) + \sum_{r=1 \neq l}^S \nu_{rl}(t, \mathbf{y}) p^{*(r)}(t, \mathbf{y}), \quad (4)$$

$$p^{*(l)}(t_0, \mathbf{y}) = p_0^{*(l)}(\mathbf{y}), \quad l = 1, 2, \dots, S.$$

Вероятность того, что в момент времени t структура системы имеет номер l , т.е. $s(t) = l$, задается выражением

$$P^{(l)}(t) = \int_{R^n} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad l = 1, 2, \dots, S,$$

а плотность вероятности $p^{(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния при условии $s(t) = l$ связана с $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ следующим соотношением:

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) = P^{(l)}(t) p^{(l)}(t, \mathbf{y}), \quad l = 1, 2, \dots, S.$$

Безусловная плотность вероятности $p(t, \mathbf{y})$ вектора состояния определяется в виде

$$p(t, \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^S p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \quad \text{или} \quad p(t, \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^S P^{(l)}(t) p^{(l)}(t, \mathbf{y}).$$

Таким образом, задача анализа систем управления ансамблем траекторий (1), (2) состоит в нахождении ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния по заданным функциям $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$, интенсивностям $\nu_{lr}(t, \mathbf{y})$ и ненормированным плотностям распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$; $l, r = 1, 2, \dots, S$.

Наряду с нахождением функций $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ можно рассматривать задачу нахождения маргинальных плотностей вероятности и моментных характеристик вектора состояния (в том числе взвешенных и условных), а также задачу определения вероятностных характеристик времени перехода из одной структуры в другую [4, 7, 10].

Анализ систем управления ансамблем траекторий методом статистического моделирования

Опишем статистический алгоритм [6, 11, 12] решения задачи анализа систем управления ансамблем траекторий.

Статистический алгоритм должен в себя включать: численное решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) (1), а также моделирование моментов смены структуры и номера новой структуры. В рассматриваемом случае распределение моментов смены структуры определяется интенсивностями переходов (2). Так как интенсивности переходов зависят от вектора состояния, то моделирование моментов смены структуры будет осуществляться по «методу максимального сечения» [13]. Применение этого метода требует выполнения условий $\nu_{li}(t, \mathbf{y}) \leq \bar{\nu}_{li} = \text{const}$, $i = 1, \dots, S$, $i \neq l$, на всем интервале интегрирования $[t_0, T]$.

Алгоритм моделирования траекторий процесса $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$:

0) $k := 0$; моделируем $[\mathbf{y}_k, s_k]^T$ в момент t_k согласно заданному $[\mathbf{y}_0, s_0]^T$;

- 1) $l := s_k$; моделируем возможный момент выхода из l -й структуры $t_{k+1} = t_k + \tau$, где τ – случайная величина с плотностью $p(x) = \bar{v}_l \exp(-\bar{v}_l x)$, $\bar{v}_l = \sum_{i=1 \neq l}^S \bar{v}_{li}$ (по формуле $\tau = -\frac{\ln \alpha}{\bar{v}_l}$, α – равномерно распределенная случайная величина на интервале (0,1)); если $t_{k+1} > T$, то $t_{k+1} := T$;
- 2) моделируем номер r (возможный номер новой структуры) с вероятностью $p_r = \frac{\bar{v}_{lr}}{\bar{v}_l}$, $r \neq l, r = 1, \dots, S$;
- 3) решаем уравнение (1) для l -й структуры на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ численным методом с шагом h и находим \mathbf{y}_{k+1} – вектор состояния системы в момент t_{k+1} , при этом шаг должен быть согласован с интенсивностью перехода, например, $h \leq \frac{0.1}{\bar{v}_l}$;
- 4) $k := k + 1$;
- 5) проверяем условие смены структуры: если $\alpha_1 \leq \frac{v_{lr}(t_k, \mathbf{y}_k)}{\bar{v}_{lr}}$ (α_1 – равномерно распределенная случайная величина на (0,1)), то переходим к п. 6; иначе переходим к п. 7;
- 6) меняем номер структуры на r -й: $s_k := r$;
- 7) если $t_k < T$, то переходим к п. 1, иначе процесс моделирования завершается.

Заметим, что пункт 5 в алгоритме будет отсутствовать, если интенсивности переходов постоянны, так как проверяемое условие будет всегда истинно.

Выбор численного метода решения конкретной системы ОДУ и шага интегрирования h определяются видом этой системы и требуемой точностью вычисления вероятностных характеристик выходных процессов. Для различных структур могут использоваться разные численные методы с различными шагами интегрирования.

Существует много численных методов решения задачи Коши для систем ОДУ. Например, можно использовать *обобщенный одностадийный метод типа Розенброка* [14]:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \left[E - \frac{h}{2} \frac{\partial f^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} f^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k) h, \quad (5)$$

где через E обозначена единичная матрица размеров $n \times n$, $\frac{\partial f^{(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}}$ – матрица Якоби, или

метод Эйлера:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + f^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k)h. \quad (6)$$

Метод (5) является А-устойчивым и имеет второй порядок сходимости для автономных систем ОДУ [14]. Метод Эйлера (6) имеет первый порядок сходимости для произвольных систем ОДУ.

Условная оптимизация статистического алгоритма, для более общего случая систем с распределенными переходами, была проведена в работе [9]. В частности, было доказано, что если численный метод решения имеет p -й порядок сходимости, то при вычислении функционалов от решения условно оптимальным является число испытаний, вычисленное по формуле $N = O(h^{-2p})$ и погрешность вычисления функционалов имеет порядок $O(N^{-1/2})$, где N – объем выборки, h – шаг интегрирования. А при вычислении гистограммы условно оптимальным является число испытаний, вычисленное по формуле $N = O(h^{-3p})$ при $n_g = O(N^{1/3})$, где n_g – число шагов при построении гистограммы. Погрешность вычисления гистограммы в норме пространства $L_2(R)$ имеет порядок $O(N^{-1/3})$. Также в [9] приведены соотношения для вычисления вероятностных характеристик выходных процессов (моментов первого и второго порядков, гистограммы маргинальных плотностей вероятности).

Спектральный метод анализа систем управления ансамблем траекторий

Искомые ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния системы (1), (2) удовлетворяют системе уравнений (4). Опишем спектральный метод [8] решения этих уравнений.

Пусть $\{e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y})\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $L_2([t_0, T] \times R^n)$, причем функции $e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y})$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2([t_0, T])$ и $L_2(R^n)$ соответственно, т.е. $e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y}) = q_{i_0}(t) \chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})$; $i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$

Спектральной характеристикой функции $z(t, \mathbf{y})$ называется $(n+1)$ -мерная бесконечная матрица $Z(n+1, 0)$ (см. [8, 10]), элементы которой представляют собой коэффициенты разложения этой функции в ряд по функциям базисной системы $\{e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y})\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$, т.е.

$$z_{i_0 i_1 \dots i_n} = \int_{t_0}^T \int_{R^n} e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y}) z(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} dt, \quad i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Аналогично, *спектральной характеристикой функции* $z(\mathbf{y})$ называется n -мерная бесконечная матрица $Z(n,0)$ с элементами

$$z_{i_1 \dots i_n} = \int_{R^n} \chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y}) z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Спектральной характеристикой линейного оператора A , определенного на пространстве функций аргументов t и \mathbf{y} , называется $2(n+1)$ -мерная бесконечная матрица $A(n+1, n+1)$, элементы которой определяются соотношением

$$a_{i_0 i_1 \dots i_n j_0 j_1 \dots j_n} = \int_{t_0}^T \int_{R^n} e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y}) A e_{j_0 j_1 \dots j_n}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} dt, \quad i_0, i_1, \dots, i_n, j_0, j_1, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Обозначим через $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$ и $\Phi_0^{*(l)}(n,0)$ спектральные характеристики функций $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ и $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$ соответственно, $l = 1, 2, \dots, S$. Кроме того, пусть $P(n+1, n+1)$ и $P_i(n+1, n+1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial y_i}$, а $F_i^{(l)}(n+1, n+1)$ и $V_r(n+1, n+1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i^{(l)}(t, \mathbf{y})$ и $v_r(t, \mathbf{y})$ соответственно; $i, j = 1, 2, \dots, n$; $l, r = 1, 2, \dots, S$; $l \neq r$; $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^\infty$ при $t = t_0$.

Как показано в [10], в предположении существования обобщенного решения системы уравнений (4) спектральные характеристики $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$ удовлетворяют системе уравнений, которые являются частным случаем уравнений *обобщенных характеристических функций* [9, 10]:

$$\begin{aligned} & P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(l)}(n+1,0) - q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{*(l)}(n,0) = \\ & = - \sum_{i=1}^n P_i(n+1, n+1) \cdot F_i^{(l)}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(l)}(n+1,0) - \\ & - V_l(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(l)}(n+1,0) + \sum_{r=1 \neq l}^S V_r(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(r)}(n+1,0), \end{aligned} \quad (10)$$

где $P(n+1, n+1) = P(n+1, n+1) + (q(1,0;t_0) \cdot [q(1,0;t_0)]^T) \otimes E(n, n)$, $E(n, n)$ – $2n$ -мерная единичная матрица, \otimes – знак тензорного умножения многомерных матриц,

$$V_l(n+1, n+1) = \sum_{r=1 \neq l}^S V_r(n+1, n+1); \quad l = 1, 2, \dots, S.$$

Уравнения вида (10) образуют систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются элементы $\phi_{i_0 i_1 \dots i_n}^{*(l)}$ матриц $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$, т.е. ко-

эффиценты разложения искоемых ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ в ряд по функциям базисной системы $\{e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y})\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$. Таким образом, после решения (10) ненормированные плотности распределения вектора состояния могут быть представлены в виде

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \phi_{i_0 i_1 \dots i_n}^{*(l)} e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y}), \quad (t, \mathbf{y}) \in [t_0, T] \times R^n, \quad l = 1, 2, \dots, S.$$

При практических расчетах для нахождения приближенного решения задачи анализа все спектральные характеристики усекаются, тогда функции $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ представляются следующим образом:

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \phi_{i_0 i_1 \dots i_n}^{*(l)} e_{i_0 i_1 \dots i_n}(t, \mathbf{y}),$$

при этом в выражениях (7)–(9) достаточно положить $i_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1, \dots, i_n = 0, 1, \dots, L_n - 1$ (величины L_0, \dots, L_n называются *порядками усечения спектральных характеристик*), т.е. (10) будет представлять собой систему $L \cdot S$ линейных алгебраических уравнений с $L \cdot S$ неизвестными, где $L = L_0 \dots L_n$, решение которой может быть получено известными методами.

По найденным спектральным характеристикам $\Phi^{*(l)}(n+1, 0)$ могут быть определены вероятности $P^{(l)}(t)$, маргинальные плотности вероятности и моментные характеристики вектора состояния с использованием свойств *спектральных характеристик линейных функционалов* [10], при этом для определения маргинальных плотностей вероятности спектральным методом требуется, чтобы функции базисной системы $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ порождались всевозможными произведениями функций базисных систем $\{\chi_{i_1}^1(y_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{\chi_{i_n}^n(y_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(R)$, т.е. $\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y}) = \chi_{i_1}^1(y_1) \dots \chi_{i_n}^n(y_n)$; $i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$

В качестве базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать, например, полиномы Лежандра, косинусоиды, функции Уолша и Хаара, а в качестве базисных систем $\{\chi_{i_1}^1(y_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{\chi_{i_n}^n(y_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ – функции Эрмита.

Алгоритмы нахождения вероятностей $P^{(l)}(t)$, маргинальных плотностей вероятности и моментных характеристик вектора состояния спектральным методом по известным спектральным характеристикам ненормированных плотностей распределения вектора состояния,

а также алгоритмы вычисления спектральных характеристик операторов дифференцирования и умножения относительно различных базисных систем приведены в [10].

Расчет задачи анализа системы стабилизации

Возмущенное движение спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, в плоскости орбиты описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = q(\tau), \quad \frac{dq(\tau)}{d\tau} = -3\Omega^2 \beta \sin \theta(\tau) \cos \theta(\tau) + Lv(\tau),$$

где θ – угол отклонения оси спутника по отношению к радиус-вектору центра масс, q – угловая скорость вращения вокруг центра масс, Ω – угловая скорость обращения спутника по круговой орбите, L и β – константы, зависящие от конструкции спутника, v – управление [15].

В [2] показано, что при малых колебаниях спутника с учетом возможного отказа управляющего устройства его движение приближенно описывается уравнениями

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = y_2(t), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = -y_1(t) + (2-k)u(t), \quad k=1,2,$$

где $\tau = \alpha t$, $\theta = \gamma y_1$ и $q = \delta y_2$, а числа α , γ и δ выбраны таким образом, что

$$\frac{\alpha\delta}{\gamma} = 1, \quad \frac{3\Omega^2\beta\alpha\gamma}{\delta} = 1, \quad \frac{\alpha L}{\delta} = 1, \quad t \in [0,1].$$

Случай $k=1$ соответствует режиму нормального функционирования, а случай $k=2$ – режиму отказа, т.е. срыву стабилизации.

Будем предполагать, что начальные условия $y_{10} = y_1(0)$ и $y_{20} = y_2(0)$ принадлежат некоторому ограниченному множеству $\Omega \subset R^2$, характеризующему неопределенность задания начальных данных, и описываются заданной плотностью распределения $p_0(y_1, y_2)$. При отсутствии априорной информации о законе распределения величин y_{10} и y_{20} можно положить

$$p_0(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{\text{mes}\Omega}, & (y_1, y_2) \in \Omega, \\ 0, & (y_1, y_2) \notin \Omega. \end{cases}$$

В случайные моменты времени возможен отказ управляющего устройства с последующим восстановлением режима нормального функционирования. Интенсивности отказа и восстановления в общем случае зависят от времени и задаются функциями $\lambda_{12}(t)$ и $\lambda_{21}(t)$ соответственно [4]. В начальный момент времени система функционирует нормально с вероят-

ностью $P_0^{(1)} < 1$. Таким образом, параметр k принимает значения дискретного случайного процесса $s(t)$ с двумя состояниями.

Задача анализа системы стабилизации заключается в нахождении ненормированных плотностей распределения $p^{*(1)}(t, y_1, y_2)$ и $p^{*(2)}(t, y_1, y_2)$ вектора состояния $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^T$ по заданным характеристикам: начальной плотности $p_0(y_1, y_2)$, вероятности $P_0^{(1)}$ нормального функционирования системы в начальный момент времени, интенсивностям $\lambda_{12}(t)$ и $\lambda_{21}(t)$.

Ненормированные плотности распределения удовлетворяют следующей системе обобщенных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{*(1)}(t, y_1, y_2)}{\partial t} &= -y_2 \frac{\partial p^{*(1)}(t, y_1, y_2)}{\partial y_1} - \frac{\partial((-y_1 + u(t))p^{*(1)}(t, y_1, y_2))}{\partial y_2} - \\ &\quad - \lambda_{12}(t)p^{*(1)}(t, y_1, y_2) + \lambda_{21}(t)p^{*(2)}(t, y_1, y_2), \\ \frac{\partial p^{*(2)}(t, y_1, y_2)}{\partial t} &= -y_2 \frac{\partial p^{*(2)}(t, y_1, y_2)}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial p^{*(2)}(t, y_1, y_2)}{\partial y_2} - \\ &\quad - \lambda_{21}(t)p^{*(2)}(t, y_1, y_2) + \lambda_{12}(t)p^{*(1)}(t, y_1, y_2), \\ p^{(1)}(0, y_1, y_2) &= P_0^{(1)}p_0(y_1, y_2), \quad p^{(2)}(0, y_1, y_2) = (1 - P_0^{(1)})p_0(y_1, y_2). \end{aligned}$$

В качестве конкретного численного примера рассмотрим задачу нахождения вероятностей $P^{(k)}(t)$ работы системы в режимах нормального функционирования и срыва стабилизации, маргинальных плотностей вероятности $p_i(t, y_i)$, математических ожиданий $m_i(t)$ и вторых начальных моментов $\Psi_i(t)$ координат вектора состояния:

$$\begin{aligned} P^{(k)}(t) &= \int_{R^2} p^{*(k)}(t, y_1, y_2) dy_1 dy_2, \quad k = 1, 2; \\ p_1(t, y_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, y_1, y_2) dy_2, \quad p_2(t, y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(t, y_1, y_2) dy_1; \\ m_i(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_i p_i(t, y_i) dy_i, \quad \Psi_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y_i^2 p_i(t, y_i) dy_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $p(t, y_1, y_2) = p^{*(1)}(t, y_1, y_2) + p^{*(2)}(t, y_1, y_2)$ – плотность вероятности вектора состояния.

Пусть y_{10} и y_{20} являются независимыми случайными величинами, имеющими усеченное нормальное распределение с параметрами $m_{10} = -0.3$, $D_{10} = 1$ и $m_{20} = 0.1$, $D_{20} = 1$ соответственно, т.е.

$$p_0(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\gamma} \exp\left(-\frac{(y_1+0.3)^2 + (y_2-0.1)^2}{2}\right), & (y_1, y_2) \in \Omega, \\ 0, & (y_1, y_2) \notin \Omega, \end{cases}$$

где

$$\gamma = \int_{\Omega} \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(y_1+0.3)^2 + (y_2-0.1)^2}{2}\right) dy_1 dy_2, \quad \Omega = [-4, 4] \times [-4, 4].$$

Управляющее воздействие задано соотношением

$$u(t) = -0.2(1 - \operatorname{tg} 1 - 2 \operatorname{tg}^2 1) \cos t - 0.2(3 + 3 \operatorname{tg} 1 + 2 \operatorname{tg}^2 1) \sin t.$$

Оно в среднем обеспечивает минимальный расход энергии, а также стабилизацию спутника в момент времени $t = 1$, т.е. математические ожидания величин $y_1(1)$ и $y_2(1)$ должны быть малы. Интенсивности отказа и восстановления заданы функциями $\lambda_{12}(t) = 0.2$ и $\lambda_{21}(t) = 0.1$, соответственно. В начальный момент времени система функционирует нормально с вероятностью $P_0^{(1)} = 0.95$.

Воспользуемся приведенными выше алгоритмами приближенного решения задачи анализа систем управления ансамблем траекторий.

При решении задачи методом статистического моделирования использовался обобщенный одностадийный метод типа Розенброка [14] с шагом $h = 0.01$; число моделируемых траекторий $N = 10^6$; для построения гистограммы отрезок $[-4, 4]$ изменения координат вектора состояния равномерно разбивался на 100 частей. Оценки функционалов от решения и гистограммы вычислялись одновременно.

Погрешность вычисления функционалов от решения составляет $O(h) = O(0.01)$ (для получения такой точности достаточно было брать $N = 10^4$).

Выбранные параметры задачи ($N = 10^6$, $h = 10^{-2}$, $n_g = 100$) являются оптимальными параметрами для получения наилучшей оценки гистограммы при выбранном шаге $h = 10^{-2}$ и гарантируют погрешность вычисления гистограммы в норме пространства $L_2(R)$ порядка $O(0.01)$. Дальнейшее уменьшение шага гистограммы или шага численного метода точность вычисления гистограммы не увеличивает. Дополнительные расчеты проводились при $h = 10^{-2}$ и $n_g = 500$, а также при $h = 10^{-3}$ и $n_g = 500$. Погрешность гистограммы не уменьшается, хотя время вычислений увеличилось (при $h = 10^{-3}$ в 10 раз).

При получении искомых характеристик спектральным методом в качестве базисной системы для представления функций времени были выбраны полиномы Лежандра (порядок

усечения $L_0 = 8$), а в качестве базисных систем для представления функций координат вектора состояния – функции Эрмита (порядки усечения $L_1 = L_2 = 12$) [8, 10, 16]. Дальнейшее небольшое увеличение порядков усечения спектральных характеристик ($L_1 = L_2 = 16$) практически не отражается на точности решения.

Результаты расчетов представлены на рис. 1–3 (тонкой линией показаны характеристики, полученные методом статистического моделирования, а толстой – характеристики, полученные спектральным методом).

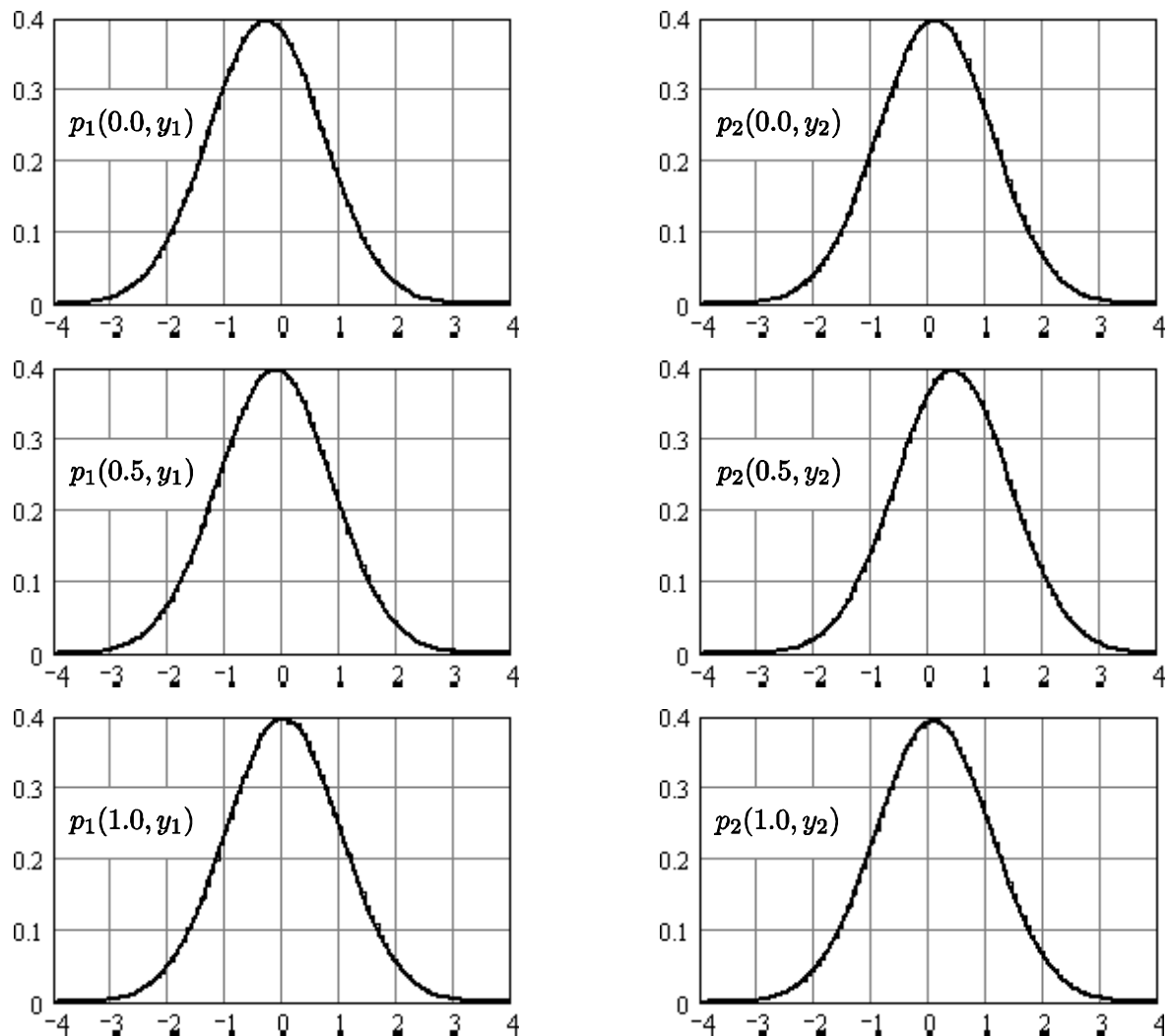


Рис. 1. Сечения маргинальных плотностей вероятности в различные моменты времени

Графики демонстрируют практически полное совпадение численных решений для маргинальных плотностей вероятности и математических ожиданий координат вектора состояния и небольшие расхождения для вторых начальных моментов, полученных обоими методами. Эти расхождения обусловлены тем, что искомые ненормированные плотности распределения аппроксимируются функциями, представляющими собой произведение плотно-

сти нормального распределения по y_1, y_2 и полинома переменных t, y_1, y_2 , максимальный порядок которого определяется усечениями спектральных характеристик, при этом неизбежны колебания плотности вблизи нуля, а равенство в соотношении (3) (в условии нормировки) оказывается лишь приближенным. Это в первую очередь отражается на точности вычисления моментов вектора состояния (особенно моментов высокого порядка) при небольших порядках усечения спектральных характеристик.

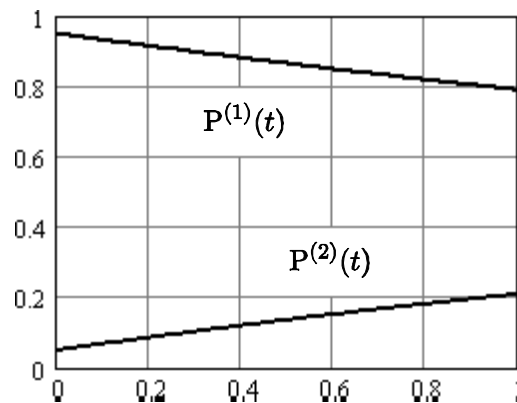


Рис. 2. Вероятности режимов работы системы стабилизации

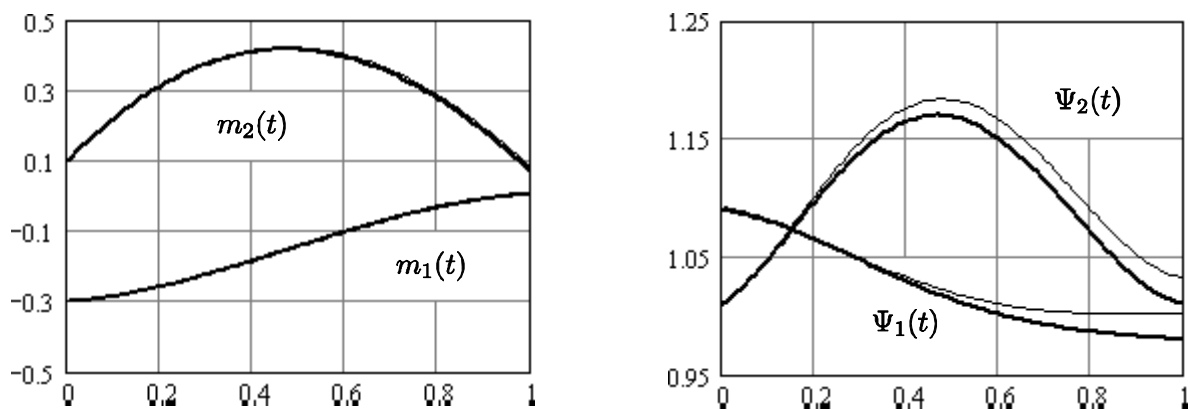


Рис. 3. Математические ожидания и вторые начальные моменты координат вектора состояния

Заключение

Из проведенных численных экспериментов видно, что при сопоставимом времени счета оба метода обеспечивают достаточную для приложений точность анализа систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры. Точность оценок, полученных методом статистического моделирования, зависит от шага интегрирования h и числа моделируемых траекторий N . Точность оценок, полученных спектральным методом, зависит от выбора базисных систем и порядков усечения L_0, \dots, L_n .

Погрешность метода статистического моделирования можно оценить, не пользуясь точным решением. Поэтому погрешность спектрального метода можно контролировать с помощью метода статистического моделирования.

Библиографический список

1. Матросов В.М., Веретенников В.Г. О научно-образовательной программе разработки университетских пико-спутников Земли; о их стабилизации и устойчивости при возмущениях // Авиация и космонавтика – 2004. III Межд. конф., Москва. 2004: Тез. докл. – М.: МАИ, 2004.
2. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л., Юдин М.А. Синтез алгоритмов оптимального управления малым искусственным спутником с учетом возможного отказа управляющего устройства // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвуз. сб. науч. тр. – М.: МИРЭА, 2006. – С. 98–103.
3. Khrustalev M.M., Romyantsev D.S. Synthesis of optimal control strategy by damping a vibration of Earth flexible satellite with a gravity-gradient stabilization with information constraints // Report on 58-th International Astronautical Congress. – Hyderabad, 2007.
4. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993.
5. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008.
6. Аверина Т.А. Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // Сиб. журн. вычисл. математики. – 2002, т. 5, № 1. – С. 1–10.
7. Averina T.A. Algorithm for statistical simulation of two types of random-structure systems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2001, vol. 16, no 6. – P. 467–482.
8. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
9. Averina T.A., Rybakov K.A. Comparison of a statistical simulation method and a spectral method for analysis of stochastic multistructure systems with distributed transitions // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2007, vol. 22, no 5. – P. 431–448.
10. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
11. Averina T.A. Algorithm of statistical simulation of dynamic systems with distributed change of structure // Monte Carlo Methods and Appl. – 2004, vol. 10, no 3–4. – P. 221–226.

12. Аверина Т.А. Статистическое моделирование динамических систем с разделением времени с автономным управлением // Вестник НГУ, Серия: матем., механика, информ. – 2004, т. 4, № 2. – С. 3–23.
13. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. – М.: Наука, 1982.
14. Artemiev S.S., Averina T.A. Numerical Analysis Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. – Utrecht: VSP, 1997.
15. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1977.
16. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2010, № 39. – <http://www.mai.ru> (16.08.10).

Сведения об авторах

Аверина Татьяна Александровна; доцент Новосибирского государственного университета; ИВМ и МГ СО РАН; к.ф.-м.н.; e-mail: ata@osmf.sccc.ru

Рыбаков Константин Александрович; доцент Московского авиационного института (государственного технического университета); к.ф.-м.н.

МАИ, Волоколамское ш., 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993;

e-mail: rkoffice@mail.ru