

УДК 629.78

Проектирование элементов конструкции летательного аппарата с использованием критериев подобия

В. Е. Кичеев

Рассмотрена задача проектирования двух элементов конструкции, работающих при статическом нагружении. Выделены критерии подобия. Определены пределы применимости формул проектировочных расчётов.

Ключевые слова: проектирование, стержень, лонжерон, стенка лонжерона, критерий подобия

ВВЕДЕНИЕ

Традиционный подход к проектированию силовой конструкции, основанный на методе последовательных приближений, имеет существенные недостатки. Как правило, для нахождения оптимального решения приходится рассматривать несколько вариантов конструкции, что увеличивает сроки проектирования. Имеющиеся в литературе рекомендации по выбору конструктивно-силовой схемы, а также по выбору конструктивно-технологического решения носят декларативный характер, без указания границ их рационального использования. Поэтому конструктор вынужден использовать свой опыт и интуицию. Для смягчения этих недостатков предлагается для решения конструкторских задач использовать теорию подобия [1]. Эта теория ориентирована на решения задач моделирования. По нашему мнению, элементы теории подобия могут быть использованы при проектировании. Целью данной статьи является попытка привлечь внимание научных работников к проблеме разработки методов проектирования силовых конструкций с использованием критериев подобия. Ниже на простых примерах показано преимущество проектирования с использованием критериального подхода. По-видимому, могут быть разработаны методы проектирования агрегатов самолёта с использованием критериев подобия.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

L – длина стержня;

h – высота стенки лонжерона;

P – осевая сила;

Q – перерезывающая сила;

E – модуль упругости;

$K_p = \frac{P}{EL^2}$ – критерий подобия при продольном изгибе;

$K_Q = \frac{Q}{Eh^2}$ – критерий подобия при сдвиге;

η – запас прочности;

F – площадь поперечного сечения сжатого стержня;

$\bar{F} = \frac{F}{L^2}$ – относительная площадь поперечного сечения сжатого стержня;

i – радиус инерции;

$\lambda = \frac{L}{i}$ – гибкость стержня;

$[\lambda]$ – допускаемая гибкость;

$K_\Phi = \frac{i^2}{F}$ – коэффициент формы;

K – коэффициент, учитывающий закрепление кромок пластинки;

d – наружный диаметр трубчатого стержня;

$\bar{d} = \frac{d}{L}$ – относительный диаметр;

δ – толщина стенки трубчатого стержня;

$\bar{\delta} = \frac{\delta}{h}$ – относительная толщина;

σ, τ – действующие напряжения;

$\sigma_{кр}, \tau_{кр}$ – критические напряжения;

σ_B – временное сопротивление;

$\sigma_{пц}, \tau_{пц}$ – пределы пропорциональности при растяжении и сдвиге.

Рассмотрим задачу подбора размеров поперечного сечения сжатого трубчатого стержня из условия статической прочности при заданной расчетной нагрузке P , длине стержня L , модуле упругости материала E (Рис.1). Приняты следующие допущения и ограничения:

1. Критическое напряжение общей потери устойчивости меньше критического напряжения местной потери устойчивости.
2. Критическое напряжение общей потери устойчивости меньше предела пропорциональности материала стержня.
3. Стержень – прямолинейный, постоянного поперечного сечения.
4. Опоры стержня – шарнирные.

Рассмотрим первый вариант этой задачи, когда делается допущение о том, что поперечное сечение стержня может изменяться непрерывно с соблюдением геометрического подобия.

В этом случае аналогично [2] используем коэффициент формы, равный отношению квадрата радиуса инерции к площади поперечного сечения.

$$K_\Phi = \frac{i^2}{F} \quad (1)$$

Считаем, что коэффициент формы задан или выбран. Он зависит только от отношения наружного диаметра трубы d_k к толщине стенки δ . Из (1) имеем

$$i^2 = F k_\phi \quad (2)$$

На основании принятых допущений критическое напряжение общей потери устойчивости по формуле Эйлера для рассматриваемого случая (Рис.1) имеет вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E i^2}{L^2} \quad (3)$$

Подставим (2) в (3), получим

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E F k_\phi}{L^2} \quad (4)$$

Действующее напряжение определяется по известной формуле

$$\sigma = \frac{P}{\bar{F}} \quad (5)$$

Расчёт на прочность ведём по разрушающей нагрузке, поэтому условие прочности имеет следующий вид

$$\sigma < \sigma_{кр} \quad (6)$$

Для учёта ряда факторов, снижающих $\sigma_{кр}$, введём в расчёт заданный запас прочности

$$\eta = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma} \quad (7)$$

С учётом (7) условие прочности (6) представим в следующем виде

$$\sigma = \frac{\sigma_{кр}}{\eta} \quad (8)$$

Подставим (4), (5) в (8) и решим это уравнение относительно F .

$$F = \frac{L}{\pi} \sqrt{\frac{P \eta}{E k_\phi}} \quad (9)$$

В проектировочных расчётах удобно пользоваться относительными величинами. Введём понятие относительной площади поперечного сечения

$$\bar{F} = \frac{F}{L^2} \quad (10)$$

Подставим (9) в (10), после простых преобразований получим

$$\bar{F} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{P}{L^2 E} \frac{\eta}{K_{\phi}}} \quad (11)$$

Введём обозначение

$$K_P = \frac{P}{L^2 E} \quad (12)$$

Безразмерную величину K_P будем называть критерием подобия при продольном изгибе. Он учитывает все исходные данные: нагрузку P , характерный размер L , механическую характеристику материала E . Критерий подобия при продольном изгибе является частным случаем критерия подобия, приведенного в [1].

$$\frac{P}{EB^2},$$

где P – обобщенная сила;

B – характерный размер конструкции.

С учётом обозначения (12) формула (11) принимает вид

$$\bar{F} = \frac{1}{\pi} \sqrt{K_P \frac{\eta}{K_{\phi}}} \quad (13)$$

С учётом (10) и (13) переход к размерной площади поперечного сечения не вызывает затруднений

$$F = \bar{F} L^2 = \frac{L^2}{\pi} \sqrt{K_P \frac{\eta}{K_{\phi}}} \quad (14)$$

Получим приближённую формулу коэффициента формы K_{ϕ} . Для тонкостенной трубы из [3], стр. 76 имеем

$$i \approx 0,353d \quad (15)$$

Площадь поперечного сечения

$$F \approx \pi d \delta \quad (16)$$

Подставим (15) и (16) в (1)

$$K_{\phi} = \frac{(0,353)^2}{\pi} \left(\frac{d}{\delta} \right) \quad (17)$$

Из (14) с учётом (17) следует, что для получения минимума F надо выбирать сечение с максимально возможным отношением d/δ . При этом необходимо

учитывать технологические требования, а также возможность местной потери устойчивости.

Определим максимальную величину критерия подобия, при котором соблюдается условие применимости формулы Эйлера(3)

$$\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц} \quad (18)$$

Подставим(14) в (4), после простых преобразований получим

$$\sigma_{кр} = \pi E \sqrt{K_p \eta K_\phi} \quad (19)$$

Подставим (19) в (18) и решим это неравенство относительно критерия подобия. В результате получим

$$K_p \leq \frac{\sigma_{пц}^2}{\pi^2 E^2 \eta K_\phi} \quad (20)$$

При заданных исходных данных по этой формуле можно проверить правомочность использования формулы Эйлера.

Использование коэффициента формы (1) удобно в теоретических работах, например, при оптимизации по массе стержневых систем. При проектировочном расчёте отдельного сжатого стержня этот приём неудобен, так как не учитывается дискретность сортамента труб.

По нашему мнению, при инженерном подходе удобно выбирать толщину стенки трубы из нормалей. Из условия минимума массы желательно величину δ брать минимальной. Учитывая большую дискретность δ в нормалях труб, её выбор не вызывает затруднений.

Рассмотрим второй вариант проектировочного расчёта сжатого стержня, когда выбрана толщина δ трубы. Ставится задача определения наружного диаметра трубы d из условия прочности.

Получим приближённую формулу радиуса инерции поперечного сечения тонкостенной трубы. Используя известную формулу момента инерции, имеем

$$i^2 = \frac{I}{F} = \frac{\frac{\pi}{64} [d^4 - (d-2\delta)^4]}{\frac{\pi}{4} [d^2 - (d-2\delta)^2]} = \frac{1}{16} [d^2 + (d-2\delta)^2] \quad (21)$$

Введём понятие относительного радиуса инерции

$$\bar{i} = \frac{i}{d} \quad (22)$$

С учётом(21) формулу(22) представим в виде

$$\bar{i} = \frac{1}{4} \sqrt{1 + \left(1 - 2 \frac{\delta}{d}\right)^2} \quad (23)$$

Для наиболее употребительного диапазона отношения диаметра трубы к толщине стенки

$$25 \leq \frac{d}{\delta} \leq 35$$

относительный радиус инерции, вычисленный по формуле (23), меняется незначительно

$$0,34 \leq \bar{i} \leq 0,344$$

Принимаем среднее значение

$$\bar{i} = 0,342 \quad (24)$$

Из (22) с учётом (24) имеем

$$i = \bar{i} d = 0,342d \quad (25)$$

формула Эйлера (3) при подстановке в неё (25) принимает вид

$$\sigma_{кр} = (0,342\pi)^2 E \left(\frac{d}{L}\right)^2 = 1,15E \left(\frac{d}{L}\right)^2 \quad (26)$$

Для тонкостенной трубы площадь поперечного сечения с достаточной для проектировочного расчёта точностью можно принять равной

$$F = 3d\delta \quad (27)$$

Действующее напряжение (5) с учётом (27) принимает вид

$$\sigma = \frac{P}{3d\delta} \quad (28)$$

Подставим (26) и (28) в условие прочности (8) и решим это уравнение относительно d . В результате получим

$$d = \sqrt[3]{\frac{\eta PL^2}{3,45E\delta}} \quad (29)$$

В практике проектирования сжатых стержней существует рекомендация обеспечивать запас прочности не менее 1,2. Принимаем

$$\eta = 1,2 \quad (30)$$

Подставим (30) в (29)

$$d = \sqrt[3]{0,35 \frac{PL^2}{E\delta}}$$

Перейдём к относительному диаметру.

После простых преобразований получим

$$\bar{d} = \frac{d}{L} = \sqrt[3]{0.35K_P \frac{L}{\delta}} \quad (31)$$

Диаметр стержня выразим через его длину

$$d = L\bar{d} = L \left(\sqrt[3]{0.35K_P \frac{L}{\delta}} \right) \quad (32)$$

Представляет интерес зависимость гибкости стержня от критериев подобия. С учётом (25), (32) имеем

$$\lambda = \frac{L}{i} = \frac{1}{0,342 \left(\sqrt[3]{0.35K_P \frac{L}{\delta}} \right)} \quad (33)$$

С уменьшением критерия подобия гибкость возрастает. Аналогично тому, как принято в строительных конструкциях, введём ограничение на гибкость стержня

$$\lambda \leq [\lambda]$$

Определим граничное значение критерия подобия из условия

$$\lambda = [\lambda] \quad (34)$$

Подставим (33) в (34), откуда после простых преобразований получим

$$K_P = \frac{1}{0,014 \left(\frac{L}{\delta} \right) [\lambda]^3}$$

Определим максимальную величину критерия подобия, при котором соблюдается условие применимости формулы Эйлера. Подставим (32) в (26)

$$\sigma_{кр} = 1,15E \left[0,35K_P \frac{L}{\delta} \right]^{2/3} \quad (35)$$

Подставим (35) в условие применимости формулы Эйлера (18) откуда получим

$$K_P \leq \frac{2,32 \left(\frac{\sigma_{пц}}{E} \right)^{3/2}}{\left(\frac{L}{\delta} \right)} \quad (36)$$

Максимально допустимое значение критерия подобия зависит от механических характеристик материала и отношения L к δ . Если условие (36) не выполняется, то для критического напряжения общей потери устойчивости необходимо использовать другие формулы.

Проектирование с использованием критериев подобия позволяет найти границы принципиально различных методов проектировочных расчётов. В зависимости от величины критерия подобия можно выделить три области.

Область малых величин критерия подобия

$$K_p \leq \frac{1}{0,014 \left(\frac{L}{\delta}\right) [\lambda]^3}$$

В этой области поперечное сечение определяется не прочностью, а из условия ограничения гибкости стержня.

Область средних величин критерия подобия

$$\frac{1}{0,014 \left(\frac{L}{\delta}\right) [\lambda]^3} \leq K_p \leq \frac{2,32 \left(\frac{\sigma_{\text{пц}}}{E}\right)^{3/2}}{\left(\frac{L}{\delta}\right)}$$

Это область упругих деформаций.

Область больших величин критерия подобия

$$K_p \geq \frac{2,32 \left(\frac{\sigma_{\text{пц}}}{E}\right)^{3/2}}{\left(\frac{L}{\delta}\right)}$$

Это область упруго-пластических деформаций.

Рассмотрим задачу проектирования стенки лонжерона тонкостенной конструкции, состоящего из поясов произвольного поперечного сечения и стенки, соединённых однорядным заклёпочным швом (Рис.3)

Задача решается при следующих допущениях и ограничениях:

1. Касательные напряжения в стенке постоянны по высоте.
2. Высота стенки меньше шага стоек.
3. Потеря устойчивости стенки не допускается.

Условие прочности стенки имеет вид

$$\tau \leq \tau_{\text{кр}}$$

Введём в рассмотрение запас прочности

$$\eta = \frac{\tau_{\text{кр}}}{\tau}$$

Тогда условие прочности можно записать в следующем виде

$$\tau = \frac{\tau_{кр}}{\eta} \quad (37)$$

За высоту стенки h принимаем расстояние между заклёпочными швами. Тогда с учётом обозначений Рис.3 действующее касательное напряжение равно

$$\tau = \frac{Q}{h\delta} \quad (38)$$

Считаем, что шаг стоек известен. Критическое напряжение стенки имеет вид

$$\tau_{кр} = \frac{kE}{\left(\frac{h}{\delta}\right)^2} \quad (39)$$

Подставим (38), (39) в условие прочности (37) и решим это уравнение относительно искомой толщины стенки

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{Qh}{E} \cdot \frac{\eta}{k}}$$

Перейдём к относительной толщине стенки

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{h} = \sqrt[3]{\frac{Q}{h^2 E} \cdot \frac{\eta}{k}} \quad (40)$$

Обозначим

$$K_Q = \frac{Q}{h^2 E} \quad (41)$$

Величину K_Q назовём критерием подобия при сдвиге. Для стенок лонжеронов с одинаковыми критериями подобия и $\left(\frac{k}{\eta}\right)$ соблюдается геометрическое подобие поперечных сечений стенок.

С учётом принятого обозначения (41) формула (40) принимает вид

$$\bar{\delta} = \frac{\delta}{h} = \sqrt[3]{\frac{K_Q}{\left(\frac{k}{\eta}\right)}} \quad (42)$$

Определим максимальную величину $\bar{\delta}$ из условия применимости формулы критического напряжения (39). Это условие можно записать так

$$\tau_{кр} \leq \tau_{пц} \quad (43)$$

С учётом принятого обозначения (40) формула (39) принимает вид

$$\tau_{кр} = kE(\bar{\delta})^2 \quad (44)$$

Подставим (44) в (43), откуда получаем

$$\bar{\delta} \leq \sqrt{\frac{\tau_{пщ}}{kE}} \quad (45)$$

Если значение $\bar{\delta}$, вычисленное по формуле (42), больше правой части неравенства (45), то имеет смысл переходить к монолитной конструкции лонжерона.

Представляет интерес зависимость критического напряжения от критерия подобия.

Подставим (42) в (44), после простых преобразований получим

$$\tau_{кр} = E \left(\sqrt[3]{K_Q^2 k \eta^2} \right) \quad (46)$$

Сцелью иллюстрации влияния критерия подобия на критическое напряжение стенки с использованием формулы (46) построены графики, представленные на Рис. 4. При небольшой величине критерия подобия критическое напряжение мало, и имеет смысл рассмотреть вариант конструкции, в которой допускается потеря устойчивости стенки. При большой величине критерия подобия имеет смысл рассмотреть вариант монолитной конструкции лонжерона.

Определим максимальную величину критерия подобия K_Q , при котором выполняется условие (43), обеспечивающее достоверность формулы (39).

Подставим (46) в (43). Из этого неравенства получаем

$$K_Q \leq \sqrt{\left(\frac{\tau_{пщ}}{E}\right)^3 \frac{1}{k\eta^2}} \quad (47)$$

Если величина критерия подобия, вычисленного по формуле (41), не удовлетворяет условию (47), то имеем смысл рассмотреть вариант монолитной конструкции лонжерона.

Выделим три области критерия подобия, в которых используются различные методы проектировочных расчётов.

Область малых величин критерия подобия.

Как видно из (46), в этом случае критическое напряжение мало. С целью снижения массы стенки имеет смысл допускать потерю устойчивости стенки (балка Вагнера). Для этой области ориентировочно можно принять

$$K_Q \leq \frac{(0,4 \dots 0,6)}{10^5}$$

Область средних величин критерия подобия.

$$\frac{(0,4 \dots 0,6)}{10^5} \leq K_Q \leq \sqrt{\left(\frac{\tau_{\text{пц}}}{E}\right)^3 \frac{1}{\kappa \eta^2}}$$

Это область классической тонкостенной конструкции лонжерона, когда потеря устойчивости стенки не допускается.

Область больших величин критерия подобия.

$$K_Q \geq \sqrt{\left(\frac{\tau_{\text{пц}}}{E}\right)^3 \frac{1}{\kappa \eta^2}}$$

Это область упруго-пластических деформаций и рационального использования монолитной конструкции лонжерона.

В заключение отметим: критериальный подход к проектированию позволяет найти границы рационального использования того или иного конструктивно-технологического решения. Таким образом можно сократить время проектирования за счёт исключения из рассмотрения нерациональных вариантов конструкции.

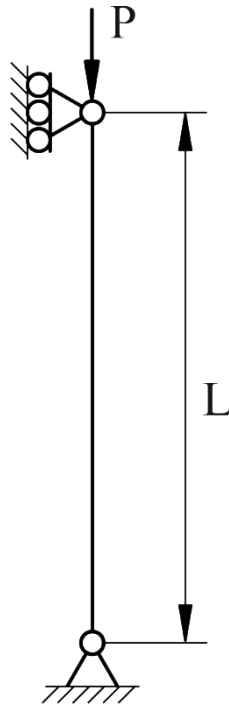


Рис. 1
Расчётная схема сжатого стержня

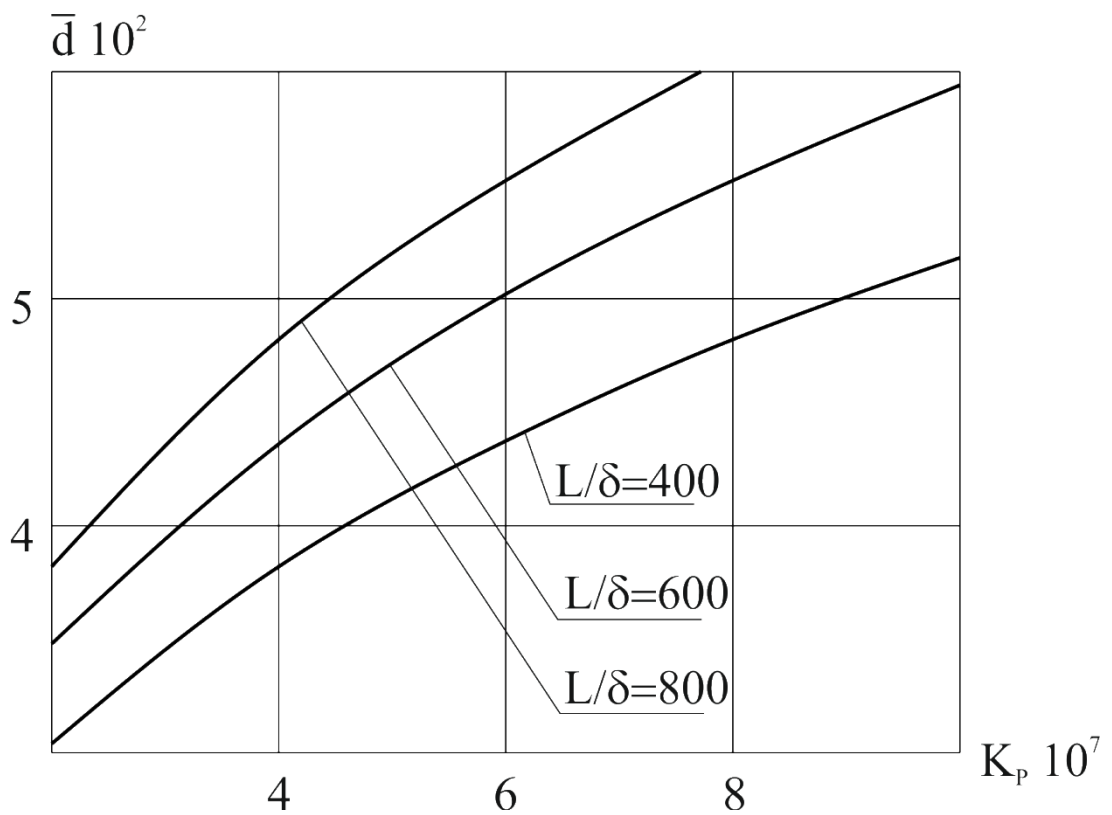


Рис. 2
Зависимость относительного диаметра \bar{d} от критерия подобия

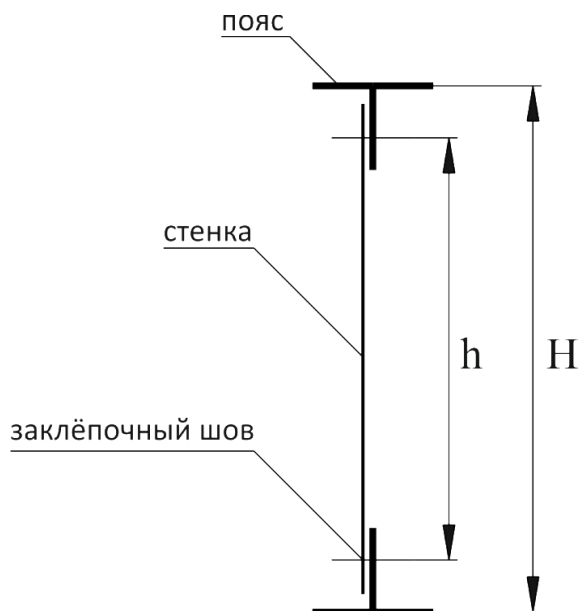


Рис. 3
Расчётная схема тонкостенной балки

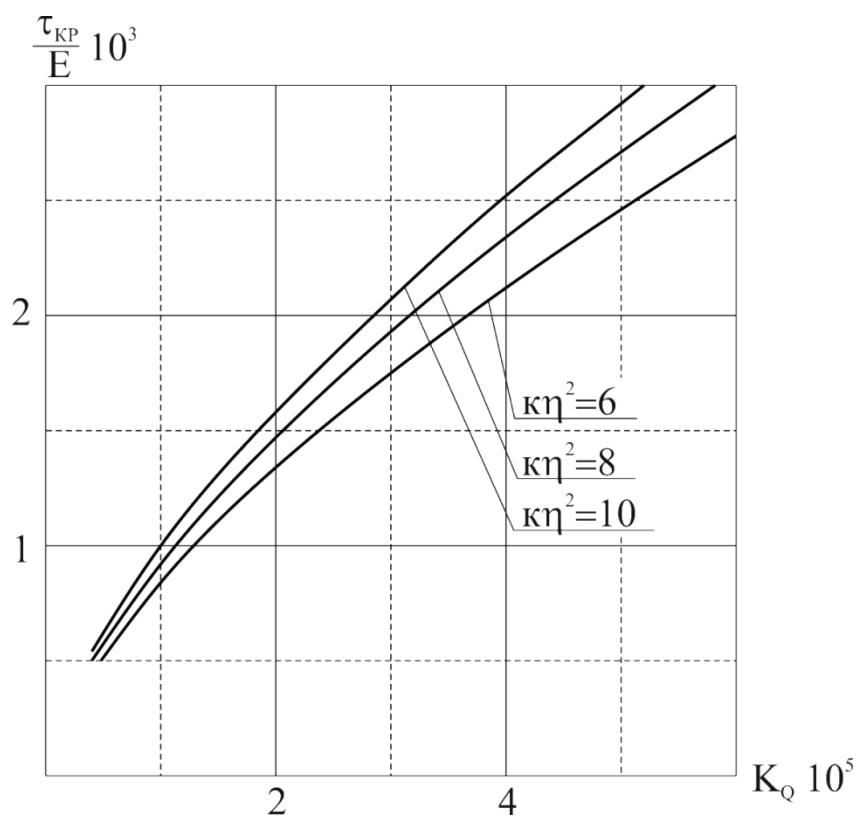


Рис. 4
Зависимость относительного критического напряжения стенки от критерия подобия

Список литературы

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: «Наука», 1987. – 430 с.
 2. Шэнли Ф.Р. Анализ веса и прочности самолётных конструкций. – М.: Оборонгиз, 1957. – 405с.
 3. Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я., Суздальцев Я. Я. Справочная книга по расчёту самолёта на прочность. - М.:Оборонгиз,1954. – 702 с.
 4. Хертель Г. Тонкостенные конструкции. – М.:Машиностроение, 1965. – 526 с.
-

Сведения об авторе

Кичеев Валентин Ефимович, старший научный сотрудник ОСКБЭС Московского авиационного института (государственного технического университета), к. т. н.,

Тел.:(499) 158-44-64 , 158-49-09.