

УДК 004.3+519.6+531.36

Тросовая буксировка объекта космического мусора с полостью, заполненной жидкостью

Асланов В.С.*, Юдинцев В.В.**

Самарский национальный исследовательский университет

имени академика С.П. Королева,

Московское шоссе, 34, Самара, 443086, Россия

**e-mail: aslanov_vs@mail.ru*

***e-mail: yudintsev@gmail.com*

Аннотация

Активная транспортировка объектов космического мусора при помощи космических буксиров на тросовой связи является одним из перспективных методов очистки околоземного пространства. При разработке подобных транспортных систем необходимо учитывать особенности объектов космического мусора, в частности, наличие упругих элементов конструкции, остатков топлива. В представленной статье рассматривается задача увода объекта космического мусора типа орбитальная ступень с остатками топлива. Исследуется влияние остатков топлива на безопасность процесса увода такого объекта. В статье получены уравнения движения в центральном гравитационном поле механической системы, состоящей из космического буксира, объекта космического мусора и троса. Найдены стационарные решения уравнений движения, построены линеаризованные

уравнения в окрестности устойчивых стационарных решений. Приведены результаты численного моделирования, показывающие близость аналитических решений линеаризованных уравнений и численных решений исходных уравнений движения. Полученные линеаризованные уравнения могут быть полезны для определения параметров транспортной системы, обеспечивающих безопасный увод космического мусора.

Ключевые слова: космический мусор, трос, космический буксир, полости с жидкостью, колебания.

Введение

В последние несколько лет были предложены различные способы удаления крупных объектов космического мусора с околоземных орбит [1-7]. Одним из перспективных способов является захват и последующая буксировка космического мусора на тросовой связи космическим буксиром [8-13]. При разработке и реализации способов увода объектов космического мусора необходимо учитывать особенности транспортируемых объектов. Существуют два типа объектов космического мусора – это отслужившие свой срок космические аппараты и орбитальные ступени ракет-носителей [14]. В отличие от космических аппаратов, орбитальные ступени более простые объекты для транспортировки, поскольку не имеют больших присоединённых упругих элементов, таких как антенны или

солнечные батареи [15, 16]. С другой стороны, орбитальные ступени могут содержать остатки топлива, которые влияют на движение космического мусора и транспортной системы в целом. Влияние жидкого топлива на космические аппараты рассматривается в работах [17-19].

Целью настоящей статьи является разработка простой математической модели процесса тросовой орбитальной транспортировки объекта космического мусора типа орбитальная ступень с учётом остатков топлива в баках. Статья состоит из введения и трёх частей. В разделе 1 выводятся нелинейные уравнения, описывающие движение рассматриваемой системы в центральном гравитационном поле. В разделе 2 рассматривается движение системы в окрестности устойчивого стационарного положения. Построены линеаризованные уравнения относительного движения. Результаты численного моделирования приведены в разделе 3, которые показывают, что полученные упрощённые уравнения дают хорошее приближение к точному решению.

1 Математическая модель

Объект космического мусора рассматривается как твёрдое тело, содержащее подвижную массу жидкости. В общем случае, моделирование движения остатков топлива в баке чрезвычайно сложная задача. Здесь будет использована простейшая модель, в которой колеблющаяся жидкость представлена в виде эквивалентной маятниковой системы [20, 21]. Эта модель может быть использована для исследования малых колебаний жидкости в баке [22, 23].

Предполагается, что космический буксир имеет систему управления угловым движением, которая поддерживает его требуемую ориентацию, что позволяет рассматривать буксир в виде материальной точки. Трос, соединяющий буксир с объектом космического мусора, считается невесомым и нерастяжимым. Для записи уравнений движения используется формализм Лагранжа.

1.1 Кинематика системы

Рассматривается плоское движение буксировочной системы в орбитальной системе координат Sx_0y_0 , относительно центра масс всей системы C (рисунок 1). Движение системы происходит под действием силы тяги буксира \mathbf{F} и силы притяжения Земли. Предполагается, что сила тяги \mathbf{F} направлена вдоль оси Sx_0 . Положение орбитальной подвижной системы координат относительно геоцентрической инерциальной системы координат OXY определяется аргументом широты u .

Положение космического мусора относительно орбитальной системы координат Sx_0y_0 определяется углом $\theta + \alpha$ и вектором \mathbf{R}_2 . Угол α определяет ориентацию троса, а угол θ – это угол между тросом и продольной осью космического мусора (рисунок 2). Длина троса – l_1 . Точка крепления троса относительно центра масс космического мусора определяется вектором \mathbf{p}_1 . Будем полагать, что точка закрепления троса лежит на продольной оси ступени $\mathbf{p}_1 = \{x_1, 0\}^T$

. Точка присоединения эквивалентного маятника определяется вектором $\mathbf{p}_3 = \{x_3, 0\}^T$. Длина эквивалентного маятника – l_3 . Угол отклонения маятника от продольной оси объекта космического мусора определяется углом φ (рисунок 2).

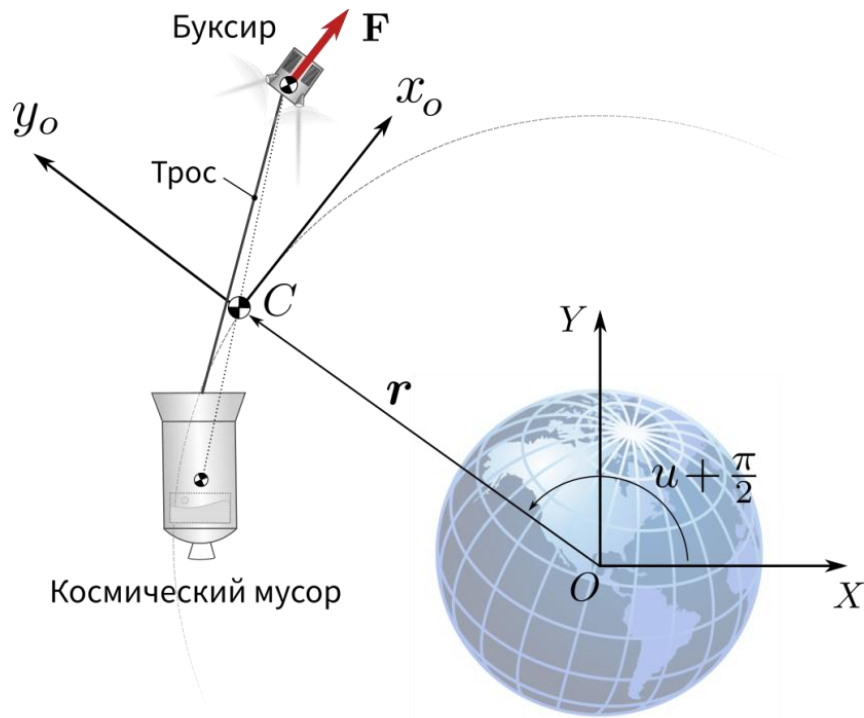


Рис. 1 - Орбитальная система координат

Вектор \mathbf{R}_1 , задающий положение буксира, определяется следующим образом:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}(\theta + \alpha) \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{A}(\alpha) \cdot \mathbf{e}_x l_1, \quad (1)$$

где $\mathbf{e}_x = [1, 0]^T$ – единичный вектор, $\mathbf{A}(\alpha)$ и $\mathbf{A}(\theta + \alpha)$ - матрицы поворота

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(\theta + \alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \alpha) & -\sin(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) & \cos(\theta + \alpha) \end{bmatrix}.$$

Положение маятника относительно системы координат $S_{x_o y_o}$ определяется вектором \mathbf{R}_3

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}(\theta + \alpha) \cdot (\rho_2 - \mathbf{A}(\varphi) \cdot \mathbf{e}_x l_3), \quad (2)$$

где

$$\mathbf{A}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

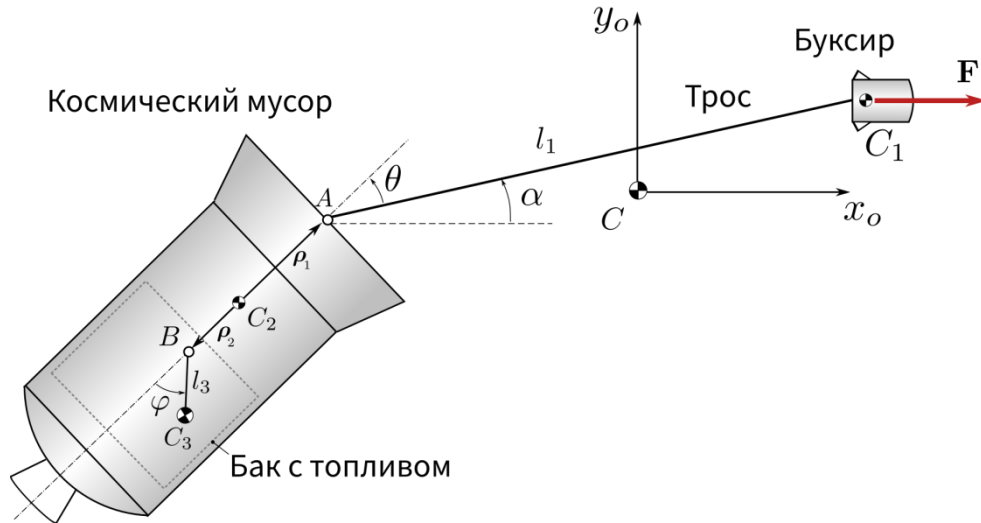


Рис. 2 - Космический мусор и космический буксир

Движение буксира, объекта космического мусора и топлива рассматривается относительно центра масс системы, поэтому справедливо следующее условие

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{R}_i m_i = 0, \quad (3)$$

где m_i - масса буксира ($i = 1$), мусора ($i = 2$) и остатков топлива ($i = 3$).

1.2 Кинетическая энергия системы и уравнения Лагранжа

Кинетическая энергия относительного движения всей системы определяется выражением:

$$2T = \sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{V}_i^2 + J_z (\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2, \quad (4)$$

где J_z – момент инерции объекта космического мусора, $\mathbf{V}_i = d\mathbf{R}_i / dt$ – относительная скорость тела i :

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{M} \left[\begin{array}{l} l_1 \dot{\alpha} (m_1 - M) s_\alpha - l_3 m_3 \omega_3 s_{\alpha+\theta+\varphi} + \omega_2 (x_1 (m_1 - M) + m_3 x_3) s_{\alpha+\theta} \\ l_1 \dot{\alpha} (M - m_1) c_\alpha + l_3 m_3 \omega_3 c_{\alpha+\theta+\varphi} + \omega_2 (x_1 (M - m_1) - m_3 x_3) c_{\alpha+\theta} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{V}_2 = \frac{1}{M} \left[\begin{array}{l} l_1 m_1 \dot{\alpha} s_\alpha - l_3 m_3 \omega_3 s_{\alpha+\theta+\varphi} + \omega_2 (m_1 x_1 + m_3 x_3) s_{\alpha+\theta} \\ -l_1 m_1 \dot{\alpha} c_\alpha + l_3 m_3 \omega_3 c_{\alpha+\theta+\varphi} - \omega_2 (m_1 x_1 + m_3 x_3) c_{\alpha+\theta} \end{array} \right],$$

$$\mathbf{V}_3 = \frac{1}{M} \left[\begin{array}{l} m_1 (l_1 \dot{\alpha} s_\alpha + x_1 \omega_2 s_{\alpha+\theta}) - (M - m_3) (x_3 \omega_2 s_{\alpha+\theta} - l_3 \omega_3 s_{\alpha+\theta+\varphi}) \\ -l_1 m_1 \dot{\alpha} c_\alpha - l_3 \omega_3 (M - m_3) c_{\alpha+\theta+\varphi} - \omega_2 c_{\alpha+\theta} (x_3 (m_3 - M) + m_1 x_1) \end{array} \right],$$

где

$$\omega_2 = \dot{\alpha} + \dot{\theta}, \quad \omega_3 = \omega_2 + \dot{\varphi}.$$

Буквы c и s обозначают косинус и синус аргумента, указанного в нижнем индексе.

Гравитационная сила \mathbf{G}_i , действующая на тело i , определяется выражением:

$$\mathbf{G}_i = -\frac{\mu m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i, \quad (5)$$

где μ – гравитационный параметр Земли, \mathbf{r}_i – радиус-вектор тела i относительно центра Земли

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{R}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

$\mathbf{r} = \{0, r\}^T$ – вектор центра масс всей системы. Вектор силы тяги буксира в орбитальной системе координат имеет вид

$$\mathbf{F} = \{F, 0\}^T.$$

Будем полагать, что $F = \text{const}$.

Орбитальная система координат Sx_0y_0 не является инерциальной системой координат, поэтому следует ввести дополнительные силы инерции

$$\Phi_i = -m_i(\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{R}_i) + \boldsymbol{\varepsilon}_o \times \mathbf{R}_i + 2\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{v}_i), \quad (7)$$

где \mathbf{a}_o - ускорение центра масс механической системы

$$\mathbf{a}_o = \begin{bmatrix} -r\ddot{v} - 2\dot{r}\dot{v} \\ \ddot{r} - r\dot{v}^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$\boldsymbol{\omega}_o, \boldsymbol{\varepsilon}_o$ - угловые скорости и ускорения в системе координат Sx_0y_0

$$\boldsymbol{\omega}_o = \{0, 0, \dot{v}\}^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_o = \{0, 0, \ddot{v}\}^T. \quad (9)$$

Для того, чтобы получить производные $\dot{r}, \dot{v}, \ddot{r}, \ddot{v}$ запишем уравнения движения для центра масс системы в оскулирующих переменных v, p, e, σ [24]:

$$\dot{v} = \sqrt{\mu(1 + e \cos v)}, \quad (10)$$

$$\dot{p} = -2 \frac{pF}{mv}, \quad (11)$$

$$\dot{e} = -2 \frac{e + \cos v}{mv} F, \quad (12)$$

$$\dot{\sigma} = -2 \frac{\cos v}{mve} F, \quad (13)$$

где $v = u - \sigma$ - угол истинной аномалии, p - фокальный параметр орбиты, e - эксцентриситет орбиты, σ - аргумент перицентра, v - орбитальная скорость:

$$v = \sqrt{\frac{\mu(1 + e^2 + 2e \cos v)}{p}}. \quad (14)$$

r – расстояние между центром масс системы и центром Земли:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}. \quad (15)$$

Производные \dot{r} , \dot{v} , \ddot{r} , \ddot{v} могут быть получены путём дифференцирования уравнений (13) и (15).

Объект космического мусора рассматривается как твёрдое тело, поэтому необходимо учитывать влияние гравитационного момента [25]

$$M_{2z} = \frac{3\mu}{2r_2^3} (J_y - J_x) \sin 2(\theta + \alpha), \quad (16)$$

где $J_x = J_z$ – поперечный момент инерции космического мусора. Космический буксир и жидкость считаются точечными массами, поэтому $M_{1z} = M_{3z} = 0$.

Обобщённые силы записываются в виде [24]

$$Q_k = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{G}_i + \mathbf{\Phi}_i) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{q}_k} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{q}_k} + M_{kz}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (17)$$

где q_k – обобщённая координата

$$q_1 = \theta, q_2 = \alpha, q_3 = \varphi. \quad (18)$$

Используя (4) и (17) можно построить уравнения Лагранжа для рассматриваемой механической системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (19)$$

1.3 Упрощённые уравнения

Полученные уравнения (19) могут быть проинтегрированы, но они очень громоздки и неудобны для анализа движения. Чтобы определить стационарные решения и затем изучить движение вблизи стационарной точки, запишем упрощённые уравнения при предположении, что орбита центра масс системы не изменяется ($r = \text{const}$) и длина троса мала по сравнению с радиусом орбиты. В силу этих допущений инерционные силы можно упростить и записать следующим образом

$$\Phi = \Phi_{wi} = -m[\mathbf{a}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{R}_i) + 2\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{v}_i], \quad (20)$$

где $\omega_o = \sqrt{\mu / r^3} = \text{const}$ - орбитальная угловая скорость, \mathbf{a}_o - ускорение центра масс

$$\mathbf{a}_o = -\omega_o^2 \mathbf{r}. \quad (21)$$

Второе слагаемое в (20) можно записать как

$$\boldsymbol{\omega}_o \times (\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{R}_i) = -\omega_o^2 \mathbf{R}_i,$$

тогда центробежная сила примет вид

$$F_{wi} = m\omega_o^2(\mathbf{r} + \mathbf{R}_i). \quad (22)$$

Для круговой орбиты

$$\omega_o^2 = \frac{\mu}{r^3}, \quad (23)$$

поэтому выражение (5) можно записать следующим образом

$$\mathbf{G}_i = -\frac{\mu m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i = -\omega_o^2 m_i \left[\frac{\mathbf{r}}{r_i} \right]^3 \mathbf{r}_i. \quad (24)$$

Выражение в квадратных скобках для $R_i \ll r$ заменим на приближенное выражение:

$$\left[\frac{\mathbf{r}}{r_i} \right]^3 \approx \left[1 + \frac{2y_i}{r} \right]^{-3/2} \approx 1 - 3 \frac{y_i}{r}.$$

Это упрощение позволяет записать гравитационные силы в виде:

$$\mathbf{G}_i \approx -\omega_o^2 m_i \left[1 - 3 \frac{y_i}{r} \right] \mathbf{r}_i, \quad (25)$$

тогда обобщённые силы могут переписаны следующим образом:

$$Q_k = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{q}_k} + \sum_{i=1}^3 m_i \left(-\frac{\mathbf{F}}{M} + 3\omega_o^2 \frac{y_i}{r} \mathbf{r} - 2\boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{v}_i \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}_i}{\partial \mathbf{q}_k} + Q_k^*, \quad k=1,2,3, \quad (26)$$

где

$$\boldsymbol{\omega}_o = \{0, 0, \omega_o\}^T, \quad \mathbf{r} = \{0, r, 0\},$$

$$Q_1^* = \frac{3\mu}{r^3} (J_z - J_x) \cos(\theta + \alpha) \sin(\theta + \alpha) - J_z \ddot{\nu}. \quad (27)$$

Новые обобщённые силы (26) позволяют записать упрощённые уравнения движения, которые будут использоваться для изучения движения системы в окрестности стационарной точки.

2 Движение системы вблизи стационарной точки

2.1 Стационарные решения

Рассматриваемая система "буксир – невесомый трос – мусор" может быть представлена в виде двух-массовой системы – гантели. В центральном гравитационном поле эта системы имеют две стационарные точки: неустойчивую – $\alpha_{01} = 0$ и устойчивую – $\alpha_{02} = \pi/2$ [25]. Направление силы тяги F сдвигает устойчивую стационарную точку к $\alpha_{02} < \pi/2$. Эта стационарная точка зависит от силы тяги буксира, длины троса, массы буксира и массы мусора.

Для определения стационарных решений уравнений приравняем производные в уравнениях движения к нулю

$$\dot{\theta} = \dot{\phi} = \dot{\alpha} = 0, \quad \ddot{\theta} = \ddot{\phi} = \ddot{\alpha} = 0. \quad (28)$$

В этом случае система уравнений (19) преобразуется в нелинейную систему уравнений для неизвестных углов $\theta_0, \alpha_0, \phi_0$.

Для упрощения поиска стационарных решений этой системы найдём начальное приближение для угла α_0 , для этого приравниваем Q_α (26) к нулю, а также $\theta = 0$ и $\phi = 0$. Тогда получим:

$$(a \cos \alpha - Fb) \sin \alpha = 0, \quad (29)$$

где a, b – коэффициенты, зависящие от параметров системы

$$a = 3\omega_0^2 \left[(x_1 + l_1)^2 M_1 m_1 + (x_3 - l_3)^2 M_3 m_3 + 2m_1 m_3 (l_3 - x_3)(l_1 + x_1) \right],$$

$$b = M_1 (x_1 + l_1) + m_3 (l_3 - x_3),$$

$$M = m_1 + m_2 + m_3, \quad M_i = M - m_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

На рисунке 3а показана обобщённая сила Q_α как функция α и отмечены две стационарные точки $\alpha_{01} = 0$ и $\alpha_{02} \approx 0.35$. Параметры системы представлены в таблице 1.

Из уравнения (29) следует, что система имеет две стационарные точки. Первая стационарная точка определяется условием $\sin \alpha = 0$, а вторая стационарная точка находится из следующего выражения

$$a \cos \alpha - Fb = 0, \quad (30)$$

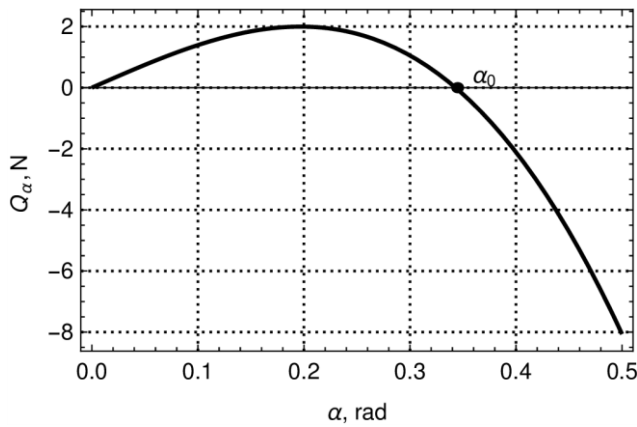
которое существует только, если $Fb/a \leq 1$.

Рисунок 3б показывает стационарное решение α_0 в зависимости от длины троса l_1 для $F = 0.3 N$ и параметров системы, которые представлены в таблице 1. Рисунок 3б иллюстрирует, что есть только одно стационарное решение для длины троса $l_1 < l_1^* \approx 400 m$

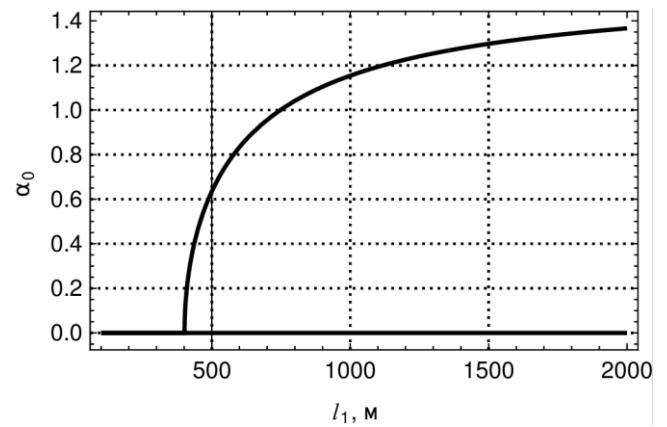
$$\alpha_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad (31)$$

и два стационарных решения при $l_1 > l_1^*$

$$\alpha_{01} = 0, \theta_{01} = 0 \text{ и } \alpha_{02} > 0, \theta_{02} > 0. \quad (32)$$



(a)



(б)

Рис. 3 - Обобщённая сила Q_α как функция θ и значение стационарной точки как функция длины троса: (а) $Q_\alpha(\alpha)$, $\varphi = 0$, $l_1 = 900$ м, (б) α_0 как функция l_1

Для уменьшения влияние силы натяжения троса на движение космического буксира следует стремиться к одному стационарному решению (31). В этом случае возмущающий момент силы натяжения троса \mathbf{N} , действующий на буксир, будет минимальным. Кроме того, движение с небольшим углом $\alpha \approx 0$ уменьшает риск разрыва троса из-за воздействия струи работающего реактивного двигателя буксира.

2.2 Линеаризованные уравнения

После определения стационарных решений можно построить линеаризованные уравнения движения в окрестности стационарной точки $\theta_0 = \alpha_0 = \varphi_0 = 0$. Перепишем кинетическую энергию системы как квадратичную форму с постоянными коэффициентами

$$T(q, \dot{q}) \approx T(q_0, \dot{q}), \quad (33)$$

где $q_0 = (\theta_0, \alpha_0, \varphi_0)$ - стационарная точка. В выражении для обобщённых сил введём замену переменных

$$q = q_0 + \hat{q},$$

где $\hat{q} = (\hat{\theta}, \hat{\alpha}, \hat{\varphi})$ - новые переменные, описывающие отклонения от стационарной точки q_0 . Разложим обобщённые силы в ряд по \hat{q} , оставляя только члены первого порядка \hat{q} , и используя новые выражения для кинетической энергии (33) и обобщённых сил, получаем уравнения в хорошо известной форме

$$\sum_{j=1}^3 (a_{ij} \ddot{q}_j + b_{ij} \dot{q}_j) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (34)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Коэффициенты матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} определяются следующими выражениями:

$$a_{11} = 2l_3 m_3 (m_1 x_1 - M_3 x_3) + m_1 x_1 (M_1 x_1 - 2m_3 x_3) + m_3 M_3 x_3^2 + J_z M + l_3^2 m_3 M_3, \quad (36)$$

$$a_{12} = a_{21} = l_3 m_3 [m_1 (2x_1 + l_1) - 2M_3 x_3 + l_3 M_3] - m_1 m_3 x_3 (2x_1 + l_1) + m_1 M_1 x_1 (x_1 + l_1) + m_3 M_3 x_3^2, \quad (37)$$

$$a_{13} = a_{31} = l_3 m_3 [m_1 x_1 + M_3 (l_3 - x_3)], \quad (38)$$

$$b_{11} = (x_1 (m_1 (6m_3 \omega_0^2 (x_3 - l_3) - F) + FM) - 3m_1 M_1 \omega_0^2 x_1^2 + m_3 (-Fx_3 - 3M_3 \omega_0^2 (l_3 - x_3)^2)) + Fl_3 m_3 - \frac{3(J_z - J_x) M \mu}{r^3}, \quad (39)$$

$$b_{12} = b_{21} - \frac{3\mu J_{21}}{r^3} = x_1(m_1(-3\omega_0^2(2m_3(l_3 - x_3) + l_1 M_1) - F) + FM) - 3m_1 M_1 \omega_0^2 x_1^2 + m_3(3\omega_0^2(x_3 - l_3)(M_3(l_3 - x_3) + l_1 m_1) - Fx_3) + Fl_3 m_3 - \frac{3(J_z - J_x)\mu M}{r^3}, \quad (40)$$

$$b_{13} = b_{31} = l_3 m_3 (F - 3\omega_0^2(m_1 x_1 + M_3(l_3 - x_3))), \quad (41)$$

$$a_{22} = -2l_1 m_1 (-M_1 x_1 + m_3 x_3 - l_3 m_3) + 2l_3 m_3 (m_1 x_1 - M_3 x_3) + m_1 x_1 (M_1 x_1 - 2m_3 x_3) + m_3 M_3 x_3^2 + l_3^2 m_3 M_3 + l_1^2 m_1 M_1, \quad (42)$$

$$a_{23} = a_{32} = l_3 m_3 [m_1(x_1 + l_1) + M_3(l_3 - x_3)], \quad (43)$$

$$b_{22} = l_3 m_3 (6\omega_0^2 (M_3 x_3 - m_1 (l_1 + x_1)) + F) + F(M_1 (x_1 + l_1) - m_3 x_3) - 3\omega_0^2 (m_1 M_1 (x_1 + l_1)^2 + m_3 M_3 x_3^2 - 2m_1 m_3 x_3 (x_1 + l_1)) - 3l_3^2 m_3 M_3 \omega_0^2, \quad (44)$$

$$b_{23} = b_{32} = l_3 m_3 \{F - 3\omega_0^2 [m_1 (x_1 + l_1) + M_3 (l_3 - x_3)]\}, \quad (45)$$

$$a_{33} = l_3^2 m_3 M_3, \quad (46)$$

$$b_{33} = l_3 m_3 (F - 3l_3 M_3 \omega_0^2). \quad (47)$$

Используя линейные уравнения (34), можно получить собственные частоты системы. Решения уравнений (34) имеют вид:

$$q_j = C_j \sin \lambda t, \quad j = 1, 2, 3. \quad (48)$$

Таблица 1 - Параметры космического буксира и космического мусора

Параметр	Значение	Параметр	Значение
m_1 , кг	200	m_2 , кг	3000
m_3 , кг	500	l_3 , м	1
x_3 , кг	-1	x_1 , м	5
$J_y = J_z$, кг·м ²	10000	J_x , кг·м ²	3000

Подстановка (48) в (34) даёт уравнение вида

$$\det(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}) = 0, \quad (49)$$

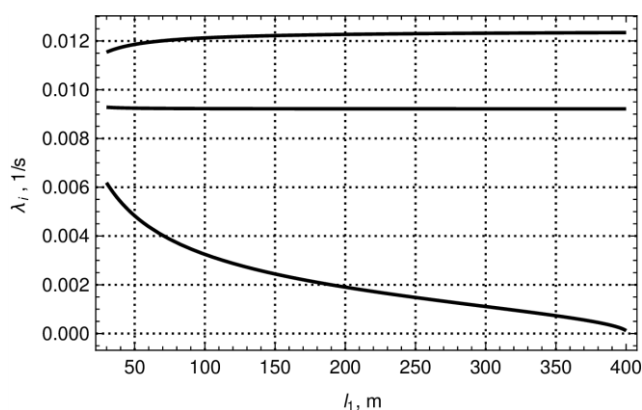
которое позволяет найти три частоты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. На рисунке 4 показаны частоты системы как функции длины троса (рисунок 4а) и как функции силы тяги (рисунок 4б).

3 Численный пример

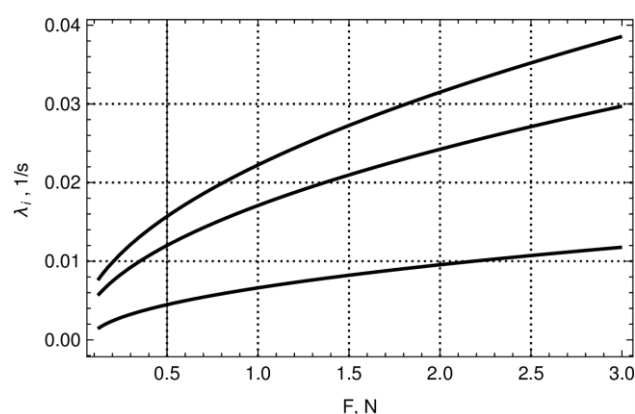
Сравним решения исходной нелинейной системы (19) с решениями линеаризованной системы (34) при следующих начальных условиях

$$\theta_0 = 0.1, \alpha_0 = 0.3, \varphi_0 = 0, \dot{\theta}_0 = \dot{\alpha}_0 = \dot{\varphi}_0 = 0. \quad (50)$$

Параметры системы приведены в таблице 1. Решения получены для двух расчётных случаев. Первый расчётный случай: $l_1 = 30\text{ м}$, $F = 2\text{ Н}$. Второй расчётный случай: $l_1 = 300\text{ м}$, $F = 2\text{ Н}$. Результаты моделирования показаны на рисунке 5. Сравнение результатов показывает хорошую точность решения линеаризованной модели.



(а)



(б)

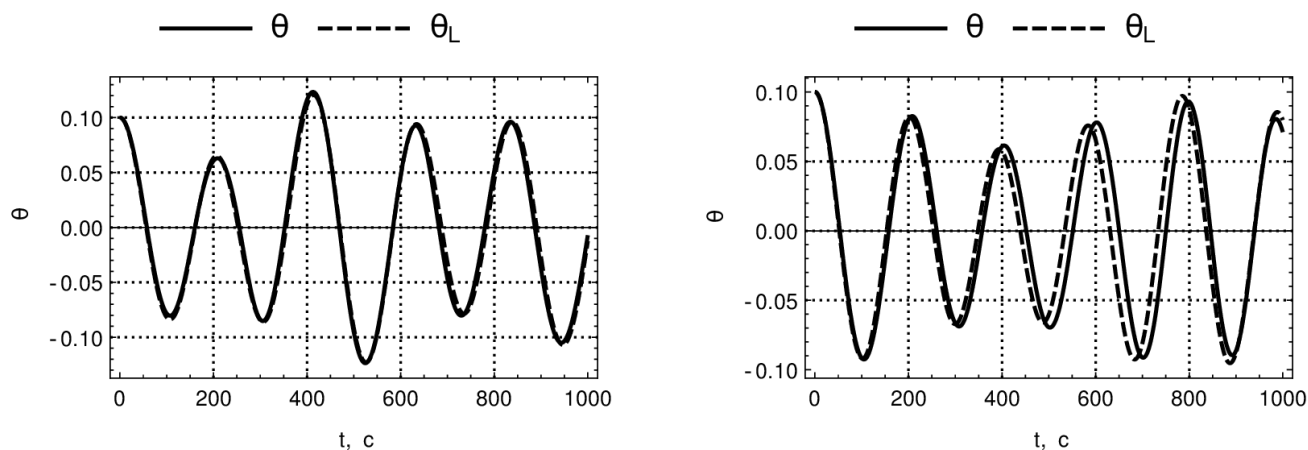
Рис.4 - Собственные частоты системы как функции длины троса l_1 для $F = 0.3$

N и как функции F для $l = 100\text{ м}$, $j=1,2,3$: (а) $\lambda_j(l_1)$, $j=1,2,3$, (б)

$$\lambda_j(F), j=1,2,3, l_1 = 100\text{ м}$$

Заключение

В статье получены уравнения движения космического мусора с остатками топлива при тросовой транспортировке. Найдены стационарные решения уравнений движения и выведены линеаризованные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами движения системы вблизи стационарной точки. Показано, что решения, полученные с помощью линеаризованной системы, хорошо согласуются с решениями исходной нелинейной системы уравнений. Предлагаемые упрощённые уравнения могут быть использованы для исследования движения транспортной системы увода космического мусора с остатками топлива.



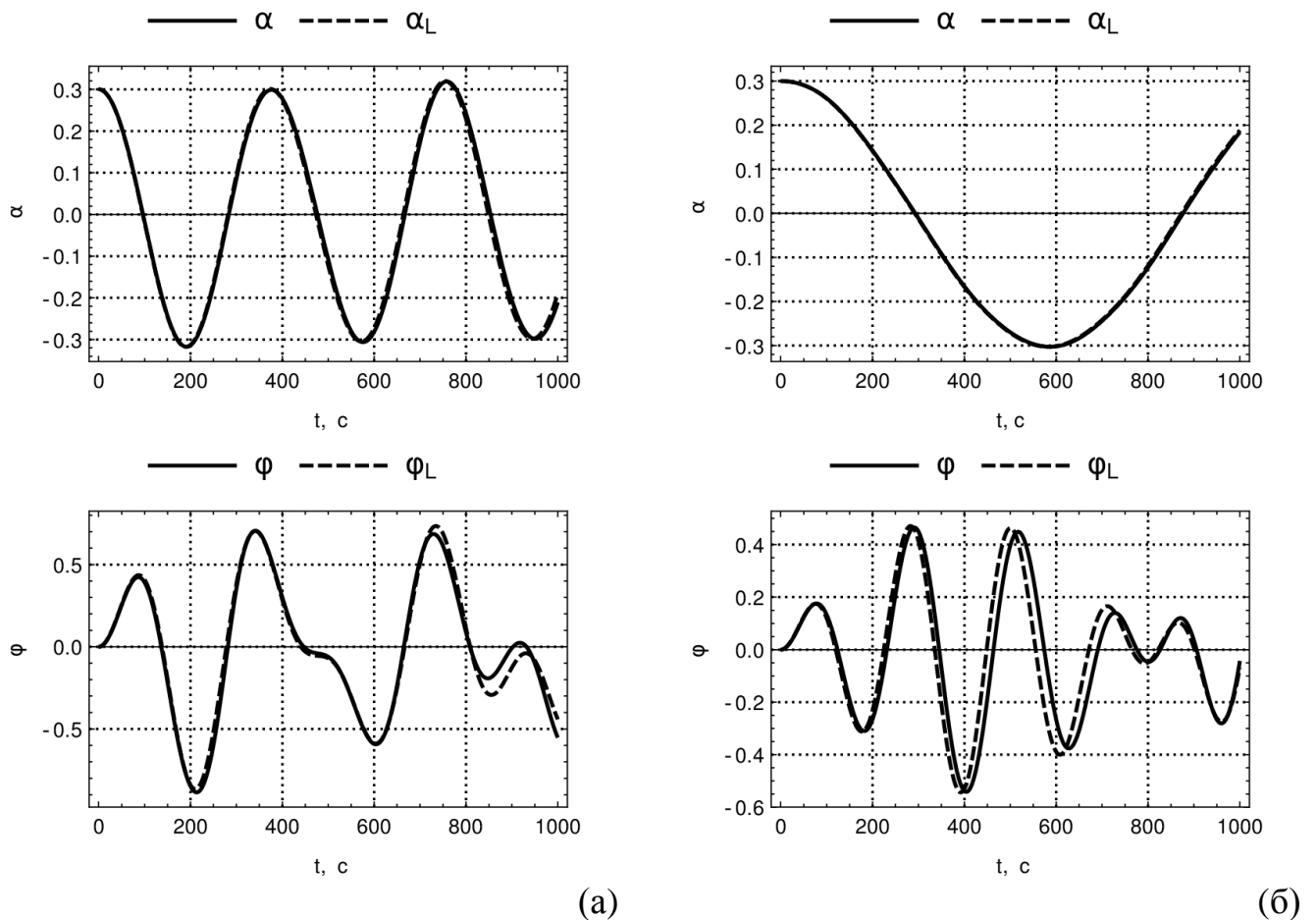


Рис.5 - Решения нелинейных θ, α, φ и линеаризованных уравнений $\theta_L, \alpha_L, \varphi_L$ для случаев $l_1 = 30\text{м}$ (случай 1) и $l_1 = 300\text{м}$ (случай 2)

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (РФФИ), проект №17-41-630274 -регион.

Библиографический список

1. Dafu X., Xianren K. Tether modeling study on electro-dynamic tether deorbiting system // Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2008, vol. 5, pp. 18.

2. Forward R.L., Hoyt R.P., Uphoff C.W. Terminator Tether: A spacecraft deorbit device // Journal of spacecraft and rockets, 2000, vol. 37, no. 2, pp. 187 - 196.
3. Kitamura S., Hayakawa Y., Kawamoto S. A reorbiter for large GEO debris objects using ion beam irradiation // Acta Astronautica, 2014, vol. 94, no. 2, pp.725 - 735.
4. Авдеев А.В., Метельников А.А. Бортовая лазерная установка для борьбы с космическим мусором // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=72840>
5. Ашурбейли И.Р., Лаговьер А.И., Игнатъев А.Б., Назаренко А.В. Возможности использования авиационной лазерной системы для борьбы с космическим мусором и поддержания орбит космического аппарата // Труды МАИ. 2011. № 43. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=24856>
6. Олейников И.И., Аксенов О.Ю., Павлов В.П. Стратегия расчёта вероятности безопасного порога сближения двух космических объектов // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т. 19. № 2. С. 29 – 34.
7. Авдеев А.В. К вопросу борьбы с космическим мусором с помощью лазерной космической установки на основе HF-НХЛ // Труды МАИ. 2012. № 61. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35496>
8. Jasper L.E.Z., Seubert C.R., Schaub H., Trushkyakov V., Yutkin E. Tethered Tug for Large Low Earth Orbit Debris Removal // In: AAS/AIAA Spaceflight Mechanics Meeting, January 29–February 2, Charleston, South Carolina, AAS 12-252 (2012).

9. Jasper L., Schaub H. Input shaped large thrust maneuver with a tethered debris object // Acta Astronautica. 2014. Vol. 96, pp. 128 - 137.
10. Асланов В.С., Алексеев А.В., Ледков А.С. Определение параметров оснащенной гарпуном тросовой системы для буксировки космического мусора // Труды МАИ. 2016. № 90. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=74644>
11. Асланов В.С., Пикалов Р.С. Безударное сближение космического мусора с буксиром при использовании тросовой системы // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=76750>
12. Купреев С.А. Метод формирования оптимальных режимов управляемого движения тросовых систем при решении практических задач // Труды МАИ. 2015. № 80. URL: <https://www.mai.ru/publications/index.php?ID=63053>
13. Купреев С.А. Условия существования предельных циклов у динамической системы движения связанных объектов на эллиптической орбите // Труды МАИ. 2016. № 88. URL: <https://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=69>
14. Bonnal C., Ruault J.-M., Desjean M.-C. Active debris removal: Recent progress and current trends // Acta Astronautica, 2013, vol. 85, pp. 51 - 60.
15. Aslanov V.S., Yuditsev V.V. Behaviour of tethered debris with flexible appendages // Acta Astronautica, 2014, vol. 104, no. 1, pp. 91 – 98.

16. Aslanov V.S., Yudintsev V.V. Dynamics, Analytical Solutions and Choice of Parameters for Towed Space Debris with Flexible Appendages // *Advances in Space Research*, 2014, vol. 55, no. 2, pp. 660 - 667.
17. Reyhanoglu M., Hervas J.R. Nonlinear dynamics and control of space vehicles with multiple fuel slosh modes // *Control Engineering Practice*, 2012, vol. 20, pp. 912 - 918.
18. Yue B.-Z. Study on the Chaotic Dynamics in Attitude Maneuver of Liquid-Filled Flexible Spacecraft // *AIAA Journal*, 2011, vol. 49, no. 10, pp. 2090 - 2099.
19. Hervas J.R., Reyhanoglu M. Thrust-vector control of a three-axis stabilized upper-stage rocket with fuel slosh dynamics // *Acta Astronautica*, 2014, vol. 98, no. 14, pp. 120 - 127.
20. Peterson L.D., Crawley E.F., Hansman R.J. Nonlinear fluid slosh coupled to the dynamics of a spacecraft // *AIAA Journal*, 1989, vol. 27, no. 9, pp. 1230 - 1240.
21. Reyhanoglu M. Modeling and control of space vehicles with fuel slosh dynamics // *Advances in Spacecraft Technologies*, 2010, vol. 3, pp. 549 - 562.
22. Abramson H.N. The dynamic behaviour of liquids in moving containers // *National Aeronautics and Space Administration*, Washington, DC, SP-106, 1966.
23. Ibrahim R. *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*. Cambridge University Press, 2005, 970 p.
24. Охоцимский Д.Е. Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения // *Космические исследования*. 1964. Т. 2. № 6. С. 817 - 842.

25. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. - М.: Наука, 1965. - 416 с.
26. Taylor J.R. Classical mechanics. University Science Books, 2005, 808 p.