

Научная статья

УДК 629.785

URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=180658>

## ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗОНАНСНЫХ ОРБИТ СОЛНЕЧНЫХ ПАРУСОВ ВБЛИЗИ ТОЧКИ L2 В СИСТЕМЕ ЗЕМЛЯ–ЛУНА

Вэйцзе Юй<sup>1</sup>, Ольга Леонардовна Старинова<sup>2</sup> ✉

<sup>1, 2</sup> Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва  
(Самарский университет),

Самара, Россия

<sup>1</sup> [yussau@foxmail.com](mailto:yussau@foxmail.com)

<sup>2</sup> [solleo@mail.ru](mailto:solleo@mail.ru) ✉

**Аннотация.** В рамках будущих проектов по исследованию и освоению Луны, спутники-ретрансляторы для связи между Землей и Луной, особенно обратной стороной и полярными регионами Луны, где планируют построить постоянные базы, вызывают значительный интерес. Резонансные орбиты, сформированные с применением солнечных парусов, имеют регулируемые формы и положения орбит при фиксированных периодах обращения и могут лучше соответствовать требованиям для размещения определенных спутников-ретрансляторов по сравнению с естественными периодическими орбитами. В данной статье разработана методика определения резонансных орбит около точки либрации L2 в системе Земля-Луна на основе круговой ограниченной модели динамики трех тел с использованием метода множественной стрельбы. Кроме того, рассмотрены изменение резонансных орбит под влиянием изменений начального положения Солнца, величины номинального ускорения от светового давления и углов установки солнечного паруса. В результате исследования получены новые типы периодических орбит для размещения спутников-ретрансляторов в системе Земля-Луна и зависимости изменения резонансных орбит от проектных параметров и параметров управления космических аппаратов с солнечным парусом.

**Ключевые слова:** резонансная орбита, солнечный парус, точка либрации L2, система Земля-Луна, метод множественной стрельбы, начальное положение Солнца, величина номинального ускорения от светового давления, углы установки солнечного паруса

**Финансирование:** исследование проведено при финансовой поддержке Китайского Стипендиального Совета

**Для цитирования:** Юй В., Старинова О.Л. Характеристики резонансных орбит солнечных парусов вблизи точки L2 в системе Земля-Луна // Вестник Московского авиационного института. 2024. Т. 31. № 2. С. 155–163. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=180658>

Original article

## RESONANT ORBITS CHARACTERISTICS OF SOLAR SAILS NEAR THE L2 POINT IN THE EARTH–MOON SYSTEM

Weijie Yu<sup>1</sup>, Olga Leonardovna Starinova<sup>2</sup> ✉

<sup>1, 2</sup> Samara National Research University named after academician S.P. Korolev (Samara University),  
Samara, Russia

<sup>1</sup> [yussau@foxmail.com](mailto:yussau@foxmail.com)

<sup>2</sup> [solleo@mail.ru](mailto:solleo@mail.ru) ✉

© Юй В., Старинова О.Л., 2024

### Abstract

As part of future lunar exploration and development projects, relay satellites for communication between the Earth and the Moon, especially the far side and polar regions of the Moon, where permanent bases are planned to be built, are attracting significant interest. This work is devoted to studying the characteristics of resonant orbits of solar sails near the L2 point in the Earth-Moon system, which are considered as potential trajectories for Earth-Moon relay satellites. A method is formulated in this article to ascertain resonant orbits near the L2 point, employing the multiple shooting method to solve a two-point boundary value problem with the goal of closing the spacecraft's trajectory to form a periodic orbit. Those resonant orbits formed based on Lyapunov orbits as initial approximations in two-point boundary value problems are called Lyapunov conformal orbits, and orbits formed based on halo orbits are called halo conformal orbits. An exploration is also executed on how resonant orbits vary concerning solar sail control variables, encompassing the initial position of the Sun, the magnitude of the nominal acceleration from light pressure and the installation angles of the solar sails. In result, such conclusions were obtained: 1. the influence of the initial position of the Sun divides the resonant orbits into different groups with different configurations; 2. the influence of the magnitude of the nominal acceleration determines the displacement of resonant orbits relative to natural periodic orbits, and Lyapunov conformal orbits have different changing trends of displacement compared with halo conformal orbits; 3. the influence of the installation angles of the solar sails mainly determines the displacement of the resonant orbits relative to natural periodic orbits in the out-of-plane direction, and for all orbits the maximum displacements obtain extreme values at  $\pm 35,26^\circ$ .

As a result of the research, the types and number of periodic orbits for placing Earth-Moon relay satellites were expanded, and dependencies for changes in resonant orbits were obtained. It should be noted that, in contrast to the orbits of traditional spacecrafts, the positions of spacecrafts with solar sails in resonant orbits are time dependent. Therefore, orbital phasing turns out to be an important component in the mission of insertion into a resonant orbit and requires additional research.

**Keywords:** resonant orbit, solar sail, L2 libration point, Earth-Moon system, multiple shooting method, initial position of the Sun, nominal acceleration magnitude, solar sail installation angles

**Funding:** The study was accomplished with the financial support of the Chinese Scholarship Council

**For citation:** Yu W., Starinova O.L. Resonant Orbits Characteristics of Solar Sails Near the L2 Point in the Earth-Moon System. *Aerospace MAI Journal*, 2024, vol. 31, no. 2, pp. 155-163. URL: <https://vestnikmai.ru/publications.php?ID=180658>

---

### Введение

В недалеком будущем освоение и использование Луны станет главной задачей космических исследований. Особенный интерес для освоения вызывают обратная сторона Луны и полярные области Луны. Благодаря постоянному затенению, обратная сторона Луны может обеспечить среду без электромагнитных помех от Земли, которая очень полезна для исследований дальнего космоса в радиодиапазоне [1]. Область вблизи южного полюса из-за концентрированного распределения водяного льда может быть использована для создания постоянных баз [2]. При этом требуется создание спутниковых систем для обеспечения непрерывной связи между Землей и Луной. Обычно такие спутники выводятся на естественные периодические орбиты (например, орбиты Ляпунова и гало-орбиты [3–7]) вблизи точки L2. Китайский спутник-ретранслятор «Цюэцяо-1», запущенный в июне 2018 г., является первым космическим аппаратом (КА), успешно работающим в качестве спутника связи на гало-орбите вблизи точки L2 в системе Земля-Луна [8–10]. Количество типов естественных периодических орбит ограничено, и в рамках одного типа орбиты

каждому периоду обращения соответствует единственная орбита. Однако для определенных миссий требуется одновременно выполнять требования и по периоду, и по форме, и по положению орбиты. Давление солнечного света может быть использовано для формирования искусственных периодических орбит, форма и положение которых могут быть изменены при постоянном периоде путем выбора различных комбинаций управляющих переменных. Кроме того, давление солнечного света может быть использовано для поддержания орбиты, что снижает расход топлива и увеличивает время функционирования КА на выбранной орбите.

Солнечные паруса (СП) представляют собой инновационную технологию создания управляющего воздействия в космосе. Они генерируют тягу за счет светового давления [11]. Ключевым преимуществом СП является отсутствие расхода топлива, что теоретически позволяет обеспечить бесконечно большой удельный импульс. В большинстве исследований СП используются для межпланетных перелетов в Солнечной системе [12–16]. Однако они также подходят для формирования искусственных орбит, требующих

продолжительного или даже постоянного воздействия управляющего ускорения, неприемлемых для традиционных КА из-за значительного непрерывного расхода топлива. Gong S. и Li J. исследовали гелиоцентрические эллиптические цилиндрические орбиты СП [17], на которых СП удерживается за счет постоянного угла установки относительно направления солнечного света. Это позволяет световому давлению поднимать орбиты на высоты, превышающие радиус планеты (для Земли, Меркурия и Марса). КА с СП, движущиеся по таким орбитам, всегда находятся над полярным районом планеты, что позволяет осуществлять непрерывное наблюдение за полярными районами. Bookless J. и McInnes C. исследовали метод формирования искусственных точек Лагранжа в системе Солнце–Земля, созданных путем смещения естественных точек либрации за счет давления солнечного света на СП [18]. Изменение параметров СП и законов управления позволяют получать разнообразные искусственные точки Лагранжа, что впоследствии позволяет формировать орбиты в соответствии с конкретными требованиями. Формирование искусственных орбит с помощью СП в системе Земля–Луна затруднено, так как положение Солнца относительно Земли и Луны постоянно изменяется. Это затрудняет координацию изменения направления давления солнечного света с изменением орбитального положения, что, в свою очередь, затрудняет соблюдение требований периодичности орбиты. Резонансные периодические орбиты исследовали СП McInnes C. и др. [19]. Они использовали естественные периодические орбиты Ляпунова и гало-орбиты в качестве начальных приближений и использовали метод коллокации для решения многоточечной краевой задачи о полете КА с СП по замкнутой орбите. В данной работе на основе их методики авторы предлагают новую методику формирования резонансных орбит СП вблизи точки L2 в системе Земля–Луна и исследуют изменение орбит в зависимости от изменения переменных управления СП, включая начальную фазу положения Солнца, величину номинального ускорения и углов наклона СП.

### 1. Математические модели и методы

Для описания движения Земли, Луны, Солнца и КА используются две системы координат (рис. 1). Первая – инерциальная система координат  $OXYZ$ : начало координат  $O$  находится в центре масс Земли; ось  $OZ$  перпендикулярна плоскости эклиптики; ось  $OX$  направлена на восходящий узел орбиты Луны; ось  $OY$  определяется по правилу правой



Рис. 1. Инерциальная система координат  $OXYZ$  и вращающаяся система координат  $oxuz$

руки. Вторая – вращающаяся система координат  $oxuz$ : начало координат  $o$  находится в центре масс системы Земля–Луна; ось  $ox$  направлена на центр масс Луны; ось  $oz$  совпадает с направлением угловой скорости Луны вокруг Земли; оси  $oy$  определяется по правилу правой руки.

Если пренебречь всеми возмущениями, массой КА и рассматривать круговые траектории Земли и Луны вокруг Солнца и Земли соответственно, то движение КА в системе координат  $oxuz$  можно рассчитывать в рамках круговой ограниченной задачи трех тел. В этом случае уравнение движения КА во вращающейся системе координат имеет вид:

$$\ddot{\mathbf{r}} + 2\boldsymbol{\omega}_л \times \dot{\mathbf{r}} + \nabla U(\mathbf{r}) = \mathbf{a};$$

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}|\boldsymbol{\omega}_л \times \mathbf{r}|^2 - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}$  – вектор положения КА;  $\boldsymbol{\omega}_л$  – угловая скорость Луны вокруг Земли;  $\mathbf{a}$  – ускорение, действующее на КА со стороны негравитационных сил;  $U(\mathbf{r})$  – псевдо-потенциальная функция;  $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$ ,  $m_1$  – масса Земли,  $m_2$  – масса Луны;  $r_1, r_2$  – расстояния от КА до Земли и Луны соответственно. Все величины в уравнении (1) представлены в безразмерной форме. Размерные параметры времени, массы и длины отнесены к

$$[T] = \sqrt{\frac{l^3}{G(m_1 + m_2)}}; [M] = m_1 + m_2; [L] = l$$

соответственно, где  $G$  – гравитационная постоянная;  $l$  – расстояние между Землей и Луной.

В инерциальной системе  $OXYZ$  вектор направления солнечного света  $\mathbf{r}_c$  можно выразить как

$$\mathbf{r}_c = [\cos \varphi \quad \sin \varphi \quad 0]^T,$$

где  $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega_3 t$  – угол направления солнечного света (рис. 1);  $\omega_3$  – угловая скорость Земли вокруг Солнца. Матрица преобразования координат  $\mathbf{r}_c$  в систему координат  $oxuz$  равна

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & \sin i \\ 0 & -\sin i & \cos i \end{bmatrix},$$

где  $\theta(t) = \theta_0 + \omega_{\text{Л}}t$  – угол положения Луны;  $i \approx 5,145^\circ$  – среднее наклонение орбиты Луны. Если заменить  $i$  нулем, то во вращающейся системе координат  $oxuz$  вектор направления солнечного света  $\mathbf{r}_{\text{СВ}}$  равен

$$\mathbf{r}_{\text{СВ}} = A\mathbf{r}_{\text{С}} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi - 0) & \sin(\varphi - 0) & 0 \\ \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \end{bmatrix}^T, \quad (2)$$

где  $\lambda(t) = \lambda_0 - \omega_{\text{С}}t$ ;  $\omega_{\text{С}} = \omega_{\text{Л}} - \omega_3$  – угловая скорость вращения Солнца вокруг системы Земля–Луна во вращающейся системе координат. Ошибка, возникающая из-за замены  $i = 0$ , равна

$$\Delta \mathbf{r}_{\text{СВ}} = [(1 - \cos i) \sin \theta \sin \varphi \quad (1 - \cos i) \cos \theta \sin \varphi \quad \sin i \sin \varphi]^T.$$

Величина ошибки

$$|\Delta \mathbf{r}_{\text{СВ}}| = \sqrt{2(1 - \cos i) \sin^2 \varphi} < 0,09,$$

поэтому замена  $r$  нулем обоснована.

Предполагая, что СП имеет идеально отражающую поверхность, вектор ускорения  $\mathbf{a}$ , действующий на КА можно выразить

$$\mathbf{a} = \kappa (\mathbf{r}_{\text{СВ}} \mathbf{n})^2 \mathbf{n}, \quad (3)$$

где  $\kappa$  – максимальное (номинальное) ускорение от светового давления на заданном расстоянии от Солнца;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к СП. Пусть в системе координат  $oxuz$  вектор  $\mathbf{n}$  задается углами ориентации  $\alpha$  и  $\gamma$ :

$$\mathbf{n} = [\cos \gamma \cos \alpha \quad \sin \gamma \cos \alpha \quad \sin \alpha]^T. \quad (4)$$

С целью упрощения управления СП предположим, что управляющие переменные СП, включая номинальное ускорение  $\kappa$  и углы ориентации  $\alpha$  и  $\gamma$  относительно направления солнечного света, фиксированы при формировании и движении по заданной орбите. В этом случае номинальное ускорение  $\kappa$  и угол  $\alpha$  постоянные, а угол  $\gamma$  определяется как

$$\gamma = \lambda + \gamma', \quad (5)$$

где  $\gamma'$  – постоянная. Тогда, согласно уравнениям (2)–(5) вектор ускорения тяги  $\mathbf{a}$  определяют из выражения (6), где  $\kappa' = \kappa \cos 2\gamma'$ ;  $\lambda' = \lambda_0 + \gamma'$ . Из выражения (6) видно, что влияние угла  $\gamma'$  на вектор ускорения

$\mathbf{a}$  может быть рассмотрено как эквивалентное влияние величины  $\kappa$  и угла  $\lambda_0$ . Таким образом, можем установить  $\gamma' = 0$ , и уравнение (6) преобразуется к виду

$$\mathbf{a} = \kappa \cos^2 \alpha [\cos(\lambda_0 - \omega_{\text{С}}t) \cos \alpha \quad \sin(\lambda_0 - \omega_{\text{С}}t) \cos \alpha \quad \sin \alpha]^T. \quad (7)$$

Это означает, что нужно анализировать только влияние  $\lambda_0$ ,  $\kappa$  и  $\alpha$  на орбиты.

Для естественных периодических орбит вектор ускорения  $\mathbf{a} = 0$ . Вблизи точки L2 чаще всего рассматриваются орбиты Ляпунова и гало-орбиты. Классической методикой формирования данных двух типов орбит является комбинация аналитического метода, основанного на приближении рядами Лежандра, и численного метода дифференциальной коррекции. Такая методика подробно рассмотрена в работах Richardson D., Gómez G. и Howell K. [20, 21]. Орбиты Ляпунова представляют собой семейство плоских орбит, а гало-орбиты представляют собой семейство трехмерных орбит. На рис. 2 показаны семейства орбит Ляпунова и северных гало-орбит в системе координат  $oxuz$ . Южные гало-орбиты симметричны с северными относительно плоскости  $z = 0$ . На рис. 3 показаны изображения зависимостей периодов движения по этим орбитам в зависимости от характеристических размеров для орбит Ляпунова и гало-орбит. Для орбит Ляпунова таким характеристическим размером является  $x_M$  – максимальное отклонение орбитального положения КА по оси  $x$ ,

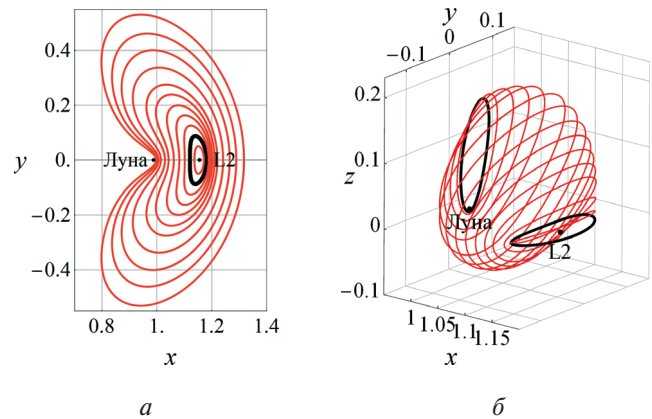


Рис. 2. Орбиты Ляпунова (а) и северные гало-орбиты (б). Черные линии представляют собой пересечение семейств орбит Ляпунова и гало-орбит, и граничной гало-орбиты

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \kappa \cos^2(\gamma - \lambda) \cos^2 \alpha [\cos \gamma \cos \alpha \quad \sin \gamma \cos \alpha \quad \sin \alpha]^T = \\ &= \kappa \cos^2(\gamma' - \lambda) \cos^2 \alpha [\cos(\lambda_0 - \omega_{\text{С}}t + \gamma') \cos \alpha \quad \sin(\lambda_0 - \omega_{\text{С}}t + \gamma') \quad \sin \alpha]^T = \\ &= \kappa' \cos^2 \alpha [\cos(\lambda'_0 - \omega_{\text{С}}t) \cos \alpha \quad \sin(\lambda'_0 - \omega_{\text{С}}t) \quad \sin \alpha]^T, \end{aligned} \quad (6)$$



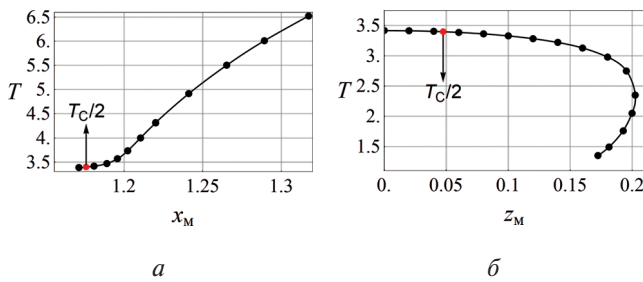


Рис. 3. Зависимости периодов от характеристических размеров для орбит Ляпунова (а) и для гало-орбит (б)

а для гало-орбит  $z_M$  – максимальное значение орбитального положения КА по оси  $z$ .

Резонансные орбиты представляют собой тип орбит, время полета на  $n$  оборотов по которым равно периоду  $T_C$  движения Солнца вокруг системы Земля–Луна. Они называются резонансными орбитами  $n$ -го порядка. Для формирования резонансных орбит можно применить следующую методику: решить двухточечную краевую задачу с целью замыкания траектории полета КА за период  $T_C$ , используя естественные орбиты, период которых равен  $T_C/n$  в качестве начальных приближений. Из рис. 3 видно, что наиболее подходящими орбитами для начальных приближений являются орбиты Ляпунова и гало-орбиты с периодом  $T_C/2$ . Соответствующие орбиты являются резонансными орбитами второго порядка.

Эффективным методом решения такой двухточечной краевой задачи является метод множественной стрельбы, основанный на матрице перехода состояний и методе дифференциальной коррекции [22–23]. Преобразуем уравнение движения (1) к следующему виду:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{a}), \tag{8}$$

где  $\mathbf{X} = [x, y, z, v_x, v_y, v_z]^T$  – вектор состояния КА. Пусть вектор состояния в начальный момент  $t_0$  равен  $\mathbf{X}_0$ , а в конечный момент  $t_0 + T_C$  равен  $\mathbf{X}_f$ . Из уравнения (7) видно, что при формировании и движении по заданной орбите с заданными параметрами управления  $\lambda_0$ ,  $\kappa$  и  $\alpha$ , ускорение  $\mathbf{a}$  зависит только от времени  $t$ . Поскольку интервал времени  $T_C$  постоянный, то для фиксированных  $\lambda_0$ ,  $\kappa$  и  $\alpha$ ,  $\mathbf{X}_f$  зависит только от  $\mathbf{X}_0$ :

$$\mathbf{X}_f = \Phi(\mathbf{X}_0). \tag{9}$$

Взяв вариацию этого уравнения первого порядка, получим

$$\delta\mathbf{X}_f = \Phi\delta\mathbf{X}_0, \tag{10}$$

где  $\Phi$  – матрица перехода состояний, величину которой можно найти путем интегрирования следующего дифференциального уравнения:

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{X}^T} \Phi, \Phi(t_0) = \mathbf{I}_6. \tag{11}$$

В методе множественной стрельбы на орбитах первоначального приближения выбираются времена  $t_1, t_2, \dots, t_n$  ( $t_n - t_1 = T_C$ ) и обозначаются соответствующие векторы состояния движения как  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ . Затем, для каждой пары моментов времени  $t_k$  и  $t_{k+1}$  при ограничении дифференциального уравнения вычисляются векторы состояния движения  $\Psi(\mathbf{X}_k)$  и соответствующие матрицы перехода состояния  $\Phi_k$ . Наконец, вычисляются векторы состояния, удовлетворяющие граничным условиям  $\Psi(\mathbf{X}_k) = \mathbf{X}_{k+1}$  для всех моментов. В результате все сегментированные траектории соединяются встык, и образуется непрерывная траектория, подчиняющаяся ограничениям дифференциального уравнения. Итерационная формула вычисления векторов состояния движения имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^{j+1} \\ \mathbf{X}_2^{j+1} \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^j \\ \mathbf{X}_2^j \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_1^j & -\mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2^j & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \Phi_n^j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_2^j - \Psi(\mathbf{X}_1^j) \\ \mathbf{X}_3^j - \Psi(\mathbf{X}_2^j) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_1^j - \Psi(\mathbf{X}_{n-1}^j) \end{bmatrix}, \tag{12}$$

где  $\mathbf{X}_k^j$  – вектор состояния  $k$ -й точки в  $j$ -м цикле итерации;  $\Psi(\mathbf{X}_k^j)$  – вектор состояния после интервала времени с  $\mathbf{X}_k^j$ ;  $\Phi_k^j$  – это матрица перехода состояний из точки  $k$  в точку  $k + 1$  в  $j$ -м цикле итерации. Итерируя эту формулу, можно за несколько приближений получить точное численное определение резонансной орбиты КА с СП.

## 2. Результаты моделирования

В данной статье получены два семейства резонансных орбит второго порядка на базе орбит Ляпунова и гало-орбит с периодом  $T_C/2$ , отличающиеся различными наборами переменных управления (начальное положение Солнца  $\lambda_0$ , величина номинального ускорения  $\kappa$  и угол установки СП  $\alpha$ ). Резонансные орбиты, сформированные на основе орбит Ляпунова, называются Ляпунов-конформными орбитами, а орбиты, сформированные на основе гало-орбит, называются гало-конформными орбитами.

Сравнительный анализ этих орбит дал следующие результаты.

1. Влияние начального положения Солнца  $\lambda_0$ . В ходе экспериментов было определено, что в диапазоне  $\lambda_0 = 0 \dots 360^\circ$  могут быть сформированы только две конфигурации резонансных орбит. Они соответствуют  $\lambda_0 = 0^\circ$  или  $180^\circ$ , и  $\lambda_0 = 90^\circ$  или  $270^\circ$ . На рис. 4 представлены Ляпунов-конформные орбиты (рис. 4,а и в) и гало-конформные орбиты (рис. 4,б и г) для этих значений  $\lambda_0$ . На рис. 4,а и б,  $\lambda_0 = 0^\circ$

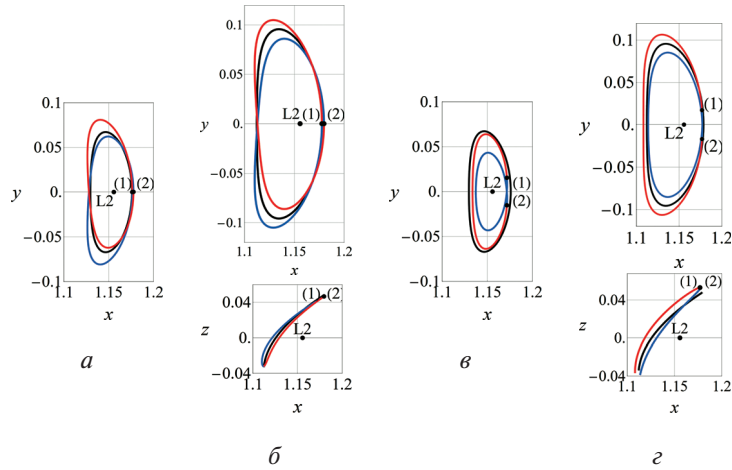


Рис. 4. Резонансные орбиты 2-го порядка ( $\kappa = 0,02$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ) при разных углах начального положения Солнца  $\lambda_0$

в точке (1) и  $\lambda_0 = 180^\circ$  в точке (2). На рис. 4,б и г,  $\lambda_0 = 90^\circ$  в точке (1) и  $\lambda_0 = 270^\circ$  в точке (2). Черные линии соответствуют естественным орбитам Ляпунова или гало-орбитам с периодом  $T_C/2$ . Синие и красные линии соответствуют первому и второму витку орбит.

Полученные результаты показывают, что влияние начальных фаз положения Солнца  $\lambda_0$  делит резонансные орбиты второго порядка на две группы с разными конфигурациями. Резонансные орбиты первой конфигурации ( $\lambda_0 = 0^\circ$  или  $180^\circ$ ) имеют два витка орбиты, симметричные друг другу относительно плоскости  $y = 0$ . Резонансные орбиты второй конфигурации ( $\lambda_0 = 90^\circ$  или  $270^\circ$ ) имеют один большой и один маленький витки, симметричные относительно плоскости  $y = 0$ .

2. Влияние величины номинального ускорения  $\kappa$ . На рис. 5 представлены резонансные орбиты 2-го порядка при разных величинах номинального ускорения  $\kappa$ . На рис. 5,а и б и 6,а и б траектории соответствуют Ляпунов-конформным и гало-конформным

резонансным орбитам первой конфигурации, на рис. 5,в и г соответствуют Ляпунов-конформным и гало-конформным резонансным орбитам второй конфигурации. Черные линии соответствуют естественной орбите с  $\kappa = 0$ . Красные линии –  $\kappa = 0,008$ ; синие линии –  $\kappa = 0,016$ .

На рис. 6 представлены зависимости максимальных смещений положения резонансных орбит  $\Delta y$  в направлении  $y$  относительно естественных периодических орбит от величин номинального ускорения  $\kappa$ . На каждом изображении верхняя линия соответствует максимальному смещению внешнего витка (или полувитка) орбит, и нижняя линия соответствует максимальному смещению внутреннего витка (или полувитка) орбит.

Полученные результаты показывают, что влияние величины номинального ускорения  $\kappa$  определяет смещение резонансных орбит относительно естественных периодических орбит. Максимальное смещение Ляпунов-конформных орбит изменяется нелинейно с увеличением величины номинального

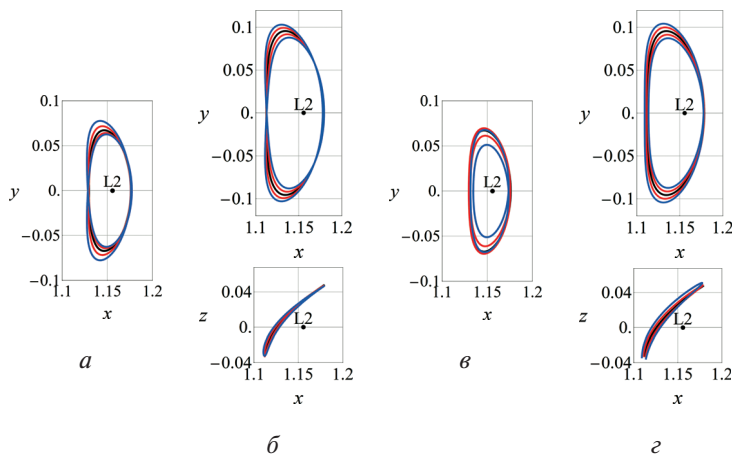


Рис. 5. Резонансные орбиты 2-го порядка при разных величинах номинального ускорения  $\kappa$  ( $\alpha = 0^\circ$ )

ускорения  $\kappa$ . Особенно немонотонно изменяется смещение больших витков Ляпунов-конформных орбит второй конфигурации. Максимальное смещение гало-конформных орбит изменяется примерно линейно с увеличением величины номинального ускорения  $\kappa$ .

3. Влияние угла установки паруса  $\alpha$ . На рис. 7 представлены резонансные орбиты 2-го порядка при разных  $\alpha$ . Черные линии соответствуют значению  $\alpha = 0^\circ$ ; синие линии – отрицательным отклонениям паруса  $\alpha = -15^\circ, -35,26^\circ$  и  $-45^\circ$ ; красные линии – положительным  $\alpha = 15, 35, 26$  и  $45^\circ$ .

На рис. 8 представлены зависимости максимальных смещений положения резонансных орбит  $\Delta z$  в направлении  $z$  относительно естественных периодических орбит от угла установки паруса  $\alpha$ . Красные линии представляют смещение самых

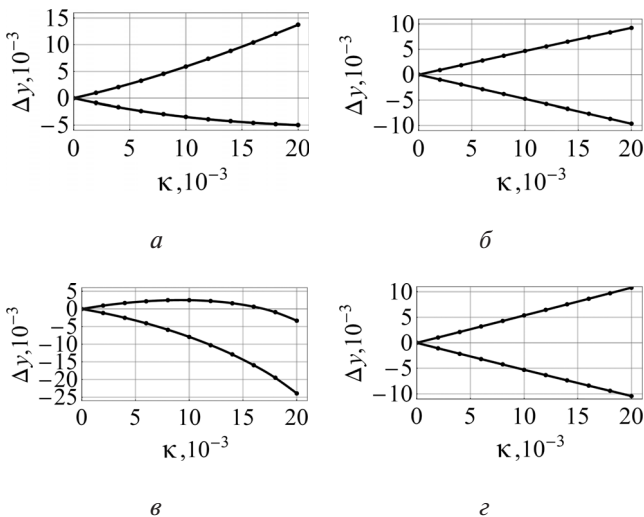


Рис. 6. Зависимости максимальных смещений положения резонансных орбит  $\Delta y$  в направлении  $y$  относительно естественных периодических орбит от величины номинального ускорения  $\kappa$

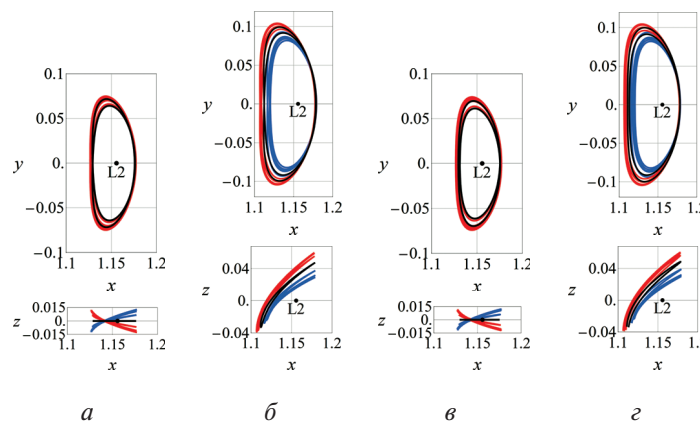


Рис. 7. Резонансные орбиты 2-го порядка при разных углах наклона  $\alpha$  ( $\kappa = 0,008$ )

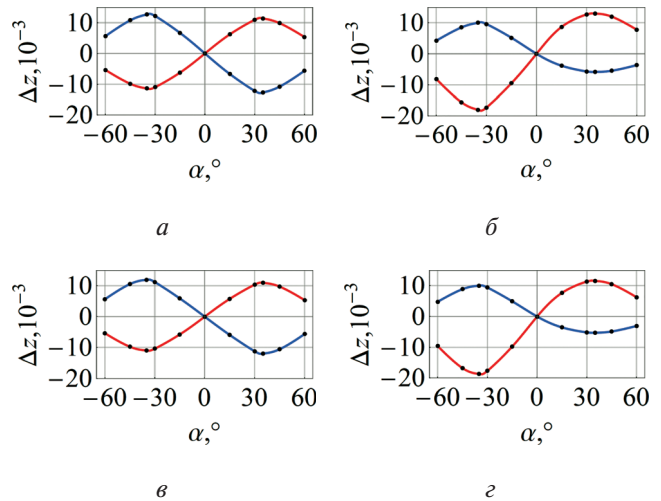


Рис. 8. Зависимости максимальных смещений положения резонансных орбит  $\Delta z$  в направлении  $z$  относительно естественных периодических орбит от угла наклона  $\alpha$

высоких точек орбит, а синие линии – смещение самых нижних точек орбит.

Полученные результаты показывают, что влияние угла установки паруса  $\alpha$  главным образом определяет смещение резонансных орбит относительно естественных периодических орбит в направлении оси  $z$ . Ляпунов-конформные орбиты и гало-конформные орбиты и первой, и второй конфигураций имеют одинаковые тенденции изменения максимальных смещений. Для всех орбит максимальные смещения получают экстремальные значения при  $\alpha = \pm 35,26^\circ$ .

Результаты моделирования показывают, что путем выбора переменных управления (начальное положение Солнца, величина номинального ускорения и угол установки СП) можно создавать разнообразные орбиты, удовлетворяющие заданным требованиям по их расположению.

**Выводы**

В данной статье определены зависимости геометрических характеристик резонансных орбит, включая изменения конфигурации и смещения орбит, от переменных управления (начального положения Солнца, величины номинального ускорения и угла установки СП). В частности, было обнаружено, что выбор начального положения Солнца делит резонансные орбиты на две группы с разными конфигурациями. Величина номинального ускорения определяет смещение орбит относительно естественных периодических орбит в направлении оси  $y$ ; угол установки СП главным образом определяет смещение резонансных орбит относительно естественных периодических орбит в направлении  $z$ . Используя полученные графические зависимости, комбинируя различные значения переменных управления, можно создавать разнообразные орбиты, адаптируемые к различным потребностям миссии. Следует отметить, что в отличие от орбит традиционных КА, положение КА с СП на резонансных орбитах в определенный момент времени уникально. Поэтому фазирование КА на орбите оказывается важным при расчете процесса выведения КА на резонансную орбиту и требует дополнительного исследования.

#### Список источников

1. *Heidmann J.* A proposal for a radio frequency interference-free dedicated lunar far side crater for high sensitivity radioastronomy: programmatic issues // *Acta Astronautica*. 2000. Vol. 46. No. 8, pp. 555–558. DOI: 10.1016/S0094-5765(00)00002-3
2. *Li S., Lucey P.G., Milliken R.E.* et al. Direct evidence of surface exposed water ice in the lunar polar regions // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2018. Vol. 115. No. 36, pp. 8907–8912. DOI: 10.1073/pnas.1802345115
3. *Breakwell J.V., Brown J.V.* The ‘Halo’ family of 3-dimensional periodic orbits in the Earth-Moon restricted 3-body problem // *Celestial Mechanics*. 1979. Vol. 20. No. 4, pp. 389–404. DOI: 10.1007/BF01230405
4. *Grebow D.* Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole coverage, MSA Thesis, West Lafayette, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, 2006, 165 p.
5. *Kim M., Hall C.D.* Lyapunov and halo orbits about L2 // *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference* (30 July – 02 August 2001; Quebec City, Canada). Vol. 109, pp. 349–366.
6. *Richardson D.L.* Halo orbit formulation for the ISEE-3 mission // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1980. Vol. 3. No. 6, pp. 543–548. DOI: 10.2514/3.56033
7. *Serban R., Koon W.S., Lo M.W.* et al. Halo orbit mission correction maneuvers using optimal control // *Automatica*. 2002. Vol. 38. No. 4, pp. 571–583. DOI: 10.1016/S0005-1098(01)00279-5
8. *Gao S., Zhou W.Y., Zhang L.* et al. Trajectory design and flight results for Chang’e 4-relay satellite // *Scientia Sinica Technologica*. 2019. Vol. 49. No. 2, pp. 156–165. DOI: 10.1360/N092018-00393
9. *Jianfeng D., Xie L.I., Cuilan L.I., Zhaokui W.* Orbit determination and analysis of Chang’e-4 relay satellite on mission orbit // *Journal of Deep Space Exploration*. 2019. Vol. 6. No. 3, pp. 247–253.
10. *Lihua Z., Liang X., Ji S.* One Year On-orbit Operation of Queqiao Lunar Relay Communications Satellite // *Aerospace China*. 2019. Vol. 3.
11. *Поляхова Е.Н.* Космический полет с солнечным парусом /Под ред. В.А. Егорова. – 2-е изд., доп. – М.: Издательство URSS, 2010. – 302 с.
12. *Garwin R.L.* Solar Sailing: A Practical Method of Propulsion within the Solar System // *Jet Propulsion*. 1958. Vol. 28. No. 3, pp. 188–190.
13. *Kirpichnikov S.N., Kirpichnikova E.S., Polyakhova E.N., Shmyrov A.S.* Planar heliocentric roto-translatory motion of a spacecraft with a solar sail of complex shape // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1995. No. 63, pp. 255–269.
14. *Spieth D., Zubrin R.* Ultra-Thin Solar Sails for Interstellar Travel. Phase I Final Report. NASA Institute for Advanced Concepts, 1999, 32 p.
15. *Tsuda Y., Mori O., Funase R.* et al. Achievement of IKAROS—Japanese deep space solar sail demonstration mission // *Acta Astronautica*. 2013. Vol. 82. No. 2, pp. 183–188. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.03.032
16. *Spencer D.A., Betts B., Bellardo J.M.* et al. The LightSail 2 solar sailing technology demonstration // *Advances in Space Research*. 2020. Vol. 67. No. 9, pp. 2878–2889. DOI: 10.1016/j.asr.2020.06.029
17. *Gong S., Li J.* Solar sail heliocentric elliptic displaced orbits // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2014. Vol. 37. No. 6, pp. 2021–2026. DOI: 10.2514/1.G000660
18. *Bookless J., McInnes C.* Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion, *Acta Astronautica*, 2008, vol. 62, no. 2–3, pp. 159–176.
19. *Heiligers J., Hiddink S., Noomen R., McInnes C.R.* Solar sail Lyapunov and Halo orbits in the Earth–Moon three-body problem // *Acta Astronautica*. 2015. Vol. 116, pp. 25–35. DOI: 10.1016/j.actaastro.2015.05.034
20. *Richardson D.L.* A note on a Lagrangian formulation for motion about the collinear points // *Celestial Mechanics*. 1980. Vol. 22. No. 3, pp. 231–236. DOI: 10.1007/BF01229509
21. *Howell K.C.* Families of orbits in the vicinity of the collinear libration points // *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit* (10–12 August 1998; Boston, MA, USA). DOI: 10.2514/6.1998-4465



22. Bock H.G., Plitt K.J. A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems // *IFAC Proceedings Volumes*. 1984. Vol. 17. No. 2, pp. 1603–1608. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)61205-9
23. Gómez G., Masdemont J.J., Mondelo J.M. Libration point orbits: a survey from the dynamical point of view // *Libration point orbits and applications*. 2003, pp. 311–372. DOI: 10.1142/9789812704849\_0016

## References

1. Heidmann J. A proposal for a radio frequency interference-free dedicated lunar far side crater for high sensitivity radioastronomy: programmatic issues. *Acta Astronautica*, 2000, vol. 46, no. 8, pp. 555–558. DOI: 10.1016/S0094-5765(00)00002-3
2. Li S., Lucey P.G., Milliken R.E. et al. Direct evidence of surface exposed water ice in the lunar polar regions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2018, vol. 115, no. 36, pp. 8907–8912. DOI: 10.1073/pnas.1802345115
3. Breakwell J.V., Brown J.V. The ‘Halo’ family of 3-dimensional periodic orbits in the Earth–Moon restricted 3-body problem. *Celestial Mechanics*, 1979, vol. 20, no. 4, pp. 389–404. DOI: 10.1007/BF01230405
4. Grebow D. *Generating periodic orbits in the circular restricted three-body problem with applications to lunar south pole coverage*, MSA Thesis, West Lafayette, School of Aeronautics and Astronautics, Purdue University, 2006, 165 p.
5. Kim M., Hall C.D. Lyapunov and halo orbits about L2. *AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference (30 July – 02 August 2001; Quebec City, Canada)*, vol. 109, pp. 349–366.
6. Richardson D.L. Halo orbit formulation for the ISEE-3 mission. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1980, vol. 3, no. 6, pp. 543–548. DOI: 10.2514/3.56033
7. Serban R., Koon W.S., Lo M.W. et al. Halo orbit mission correction maneuvers using optimal control. *Automatica*, 2002, vol. 38, no. 4, pp. 571–583. DOI: 10.1016/S0005-1098(01)00279-5
8. Gao S., Zhou W.Y., Zhang L. et al. Trajectory design and flight results for Chang’e 4-relay satellite. *Scientia Sinica Technologica*, 2019, vol. 49, no. 2, pp. 156–165. DOI: 10.1360/N092018-00393
9. Jianfeng D., Xie L.I., Cuilan L.I., Zhaokui W. Orbit determination and analysis of Chang’e-4 relay satellite on mission orbit. *Journal of Deep Space Exploration*, 2019, vol. 6, no. 3, pp. 247–253.
10. Lihua Z., Liang X., Ji S. One Year On-orbit Operation of Queqiao Lunar Relay Communications Satellite. *Aerospace China*, 2019, vol. 3.
11. Polyakhova E.N. *Kosmicheskii polet s solnechnym parusom* (Space flight with a solar sail). 2nd ed. Moscow, URSS, 2010, 302 p.
12. Garwin R.L. Solar Sailing: A Practical Method of Propulsion within the Solar System. *Jet Propulsion*, 1958, vol. 28, no. 3, pp. 188–190.
13. Kirpichnikov S.N., Kirpichnikova E.S., Polyakhova E.N., Shmyrov A.S. Planar heliocentric roto-translatory motion of a spacecraft with a solar sail of complex shape. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1995, no. 63, pp. 255–269.
14. Spieth D., Zubrin R. *Ultra-Thin Solar Sails for Interstellar Travel*. Phase I Final Report. NASA Institute for Advanced Concepts, 1999, 32 p.
15. Tsuda Y., Mori O., Funase R. et al. Achievement of IKAROS—Japanese deep space solar sail demonstration mission. *Acta Astronautica*, 2013, vol. 82, no. 2, pp. 183–188. DOI: 10.1016/j.actaastro.2012.03.032
16. Spencer D.A., Betts B., Bellardo J.M. et al. The LightSail 2 solar sailing technology demonstration. *Advances in Space Research*, 2020, vol. 67, no. 9, pp. 2878–2889. DOI: 10.1016/j.asr.2020.06.029
17. Gong S., Li J. Solar sail heliocentric elliptic displaced orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014, vol. 37, no. 6, pp. 2021–2026. DOI: 10.2514/1.G000660
18. Bookless J., McInnes C. Control of Lagrange point orbits using solar sail propulsion. *Acta Astronautica*, 2008, vol. 62, no. 2–3, pp. 159–176.
19. Heiligers J., Hiddink S., Noomen R., McInnes C.R. Solar sail Lyapunov and Halo orbits in the Earth–Moon three-body problem. *Acta Astronautica*, 2015, vol. 116, pp. 25–35. DOI: 10.1016/j.actaastro.2015.05.034
20. Richardson D.L. A note on a Lagrangian formulation for motion about the collinear points. *Celestial Mechanics*, 1980, vol. 22, no. 3, pp. 231–236. DOI: 10.1007/BF01229509
21. Howell K.C. Families of orbits in the vicinity of the collinear libration points. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit (10–12 August 1998; Boston, MA, USA)*. DOI: 10.2514/6.1998-4465
22. Bock H.G., Plitt K.J. A multiple shooting algorithm for direct solution of optimal control problems. *IFAC Proceedings Volumes*, 1984, vol. 17, no. 2, pp. 1603–1608. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)61205-9
23. Gómez G., Masdemont J.J., Mondelo J.M. Libration point orbits: a survey from the dynamical point of view. *Libration point orbits and applications*, 2003, pp. 311–372. DOI: 10.1142/9789812704849\_0016

Статья поступила в редакцию 20.03.2024; одобрена после рецензирования 27.03.2024; принята к публикации 04.04.2024.  
The article was submitted on 20.03.2024; approved after reviewing on 27.03.2024; accepted for publication on 04.04.2024.