УДК 519.168 519.854.2 656.22

Математическое моделирование в задаче оптимального назначения и перемещения локомотивов методами теории графов и комбинаторной оптимизации

Гайнанов Д.Н.[1*], Рассказова В.А.[2]**

[1]*Уральский федеральный университет, ул. Мира, 19.*
Екатеринбург, 620002, Россия

[2]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4,*
Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

**e-mail: damir.gainanov@gmail.com*

***e-mail: varvara.rasskazova@mail.ru*

Аннотация

Математическое моделирование в задачах планирования и организации грузовых железнодорожных перевозок является главной областью исследования в настоящей работе. Рассматривается теоретико-графовая модель железнодорожной транспортной сети, на основе которой формулируется задача построения бесконфликтного набора графиков движения поездов. Бесконфликтный набор нормативных ниток, в свою очередь, служит основой для формирования плана перевозок локомотивного парка сети, исполнение которого суть задача оптимального назначения и перемещения локомотивов. Методами математического моделирования данная задача сводится к графово-комбинаторной задаче покрытия ориентированными путями вершин ориентированного графа совместимости

перевозок. Для решения указанной графово-комбинаторной задачи разработан и формально описан вычислительный алгоритм.

Ключевые слова: покрытие вершин графа, алгоритм, оптимизация, назначение локомотивов.

Введение

Математическая модель как объект исследования лежит в основе многих прикладных задач, в том числе в основе задачи оптимального назначения и перемещения локомотивов. Теория графов и комбинаторной оптимизации предоставляют естественные и адекватные средства для построения математических моделей сетей, в частности моделей транспортных систем, а также для решения задач теории расписаний (см. [1], [2], [3], [4]). Грузовые железнодорожные перевозки имеют большую практическую значимость, ввиду чего разработка оптимальных алгоритмов планирования грузовых железнодорожных перевозок является объектом активных исследований (см. [5], [6], [7]).

В статье рассматривается теоретико–графовая модель железнодорожной транспортной сети и задача оптимизации грузовых железнодорожных перевозок с использованием методов теории графов и комбинаторной оптимизации.

В первой части статьи на множестве нормативных ниток графика движения вводится отношение конфликтности и неориентированный граф конфликтов. Неориентированный граф конфликтов порождает монотонную булеву функцию (МБФ), и задача формирования бесконфликтного набора нормативных ниток решается в постановке поиска максимального верхнего нуля МБФ, порожденной неориентированным графом конфликтов.

Во второй части для плана перевозок, заданного посредством бесконфликтного набора нормативных ниток, приводится постановка задачи о назначении и перемещении локомотивов из заданного парка локомотивов с заданными начальными условиями, в которой сначала минимизируется число локомотивов, задействованных для выполнения плана, а затем минимизируется число холостых перемещений локомотивов, необходимых для подачи локомотива на соответствующую станцию. Для решения задачи о назначении и перемещении локомотивов вводится в рассмотрение ориентированный граф совместимости заданий на перевозку и задача оптимизации назначения и перемещения локомотивов сводится к задаче поиска покрытия ориентированными путями множества вершин подграфа ориентированного графа зависимостей перевозок, при этом сначала минимизируется число путей, необходимых для покрытия всех вершин, соответствующих перевозкам из плана перевозок, а затем минимизируется общее число вершин, входящих в ориентированные пути, задействованные в покрытии.

Разработанные алгоритмы реализованы на ЭВМ в виде проблемно–ориентированного комплекса программ на языке программирования Visual Basic в приложении для Excel (VBA). Реализованы и описаны численные эксперименты, базирующиеся на реально существующем плане грузовых железнодорожных перевозок.

Формирование бесконфликтного набора энергоэффективных нормативных ниток графика движения поездов

Рассмотрим способы формирования набора энергоэффективных нормативных ниток графика движения поездов, на основе которых формируются расписания для выполнения плана грузовых перевозок.

Будем рассматривать ориентированный граф сети $\vec{\Gamma} = (S, E)$, где $S = \{s_i : i \in \overline{1,n}\}$ – множество станций, и $E \subseteq \{(s_i, s_j) : i, j \in \overline{1,n}\}$ – множество ориентированных перегонов, связывающих соседние станции.

Для ориентированного графа сети $\vec{\Gamma}$ определяют размеры движения на планируемый период времени. Размеры движения могут быть заданы в виде матрицы корреспонденций

$$\mathrm{R} = \left\| r(s_i, s_j) \right\|, i, j \in \overline{1,n},$$

где $r(s_i, s_j)$ – количество поездов, необходимое к отправке из станции s_i в станцию s_j в планируемый период времени. Заметим, что матрица R является сильно разреженной и, как правило, $r(s_i, s_j) \neq 0$ для станций s_i, s_j, являющихся сортировочными станциями или стыковыми станциями ориентированного графа сети $\vec{\Gamma}$ с внешними сетями.

Для организации выполнения планируемых перевозок R используют так называемый план поездоформирования

$$\mathrm{P} = \bigcup_{(s_i, s_j) \in E} (s_i, s_j),$$

где $p(s_i, s_j)$ – путь в ориентированном графе сети $\vec{\Gamma}$, допустимый для выполнения перевозки из станции s_i в станцию s_j.

Пусть для каждого ориентированного перегона (s_i, s_j) в ориентированном графе сети $\vec{\Gamma}$ выполнены тяговые расчеты (см. [8]) и заданы:

1. профиль дороги $h_{i,j}$;
2. вес брутто поезда Q, допустимый к перевозке на перегоне;
3. максимальная допустимая скорость $v_{\max}(s_i, s_j)$ движения на ориентированном перегоне (s_i, s_j);
4. скорость $\vec{v_{\text{н}}}(s_i, s_j)$ отправления поезда со станции s_i;
5. скорость $\vec{v_{\text{к}}}(s_i, s_j)$ прибытия поезда на станцию s_j;
6. время $t_{\text{н}}(s_i, s_j)$ отправления поезда со станции s_i;
7. время $t_{i,j}$ движения поезда на ориентированном перегоне (s_i, s_j).

Для каждого ориентированного перегона (s_i, s_j) при заданных 1–7 можно выбрать график движения $g_{i,j}(t)$, как функцию расстояния, пройденного от станции s_i, от времени $t \in \left[t_{\text{н}}(s_i, s_j); t_{\text{н}}(s_i, s_j) + t_{i,j}\right]$, при этом каждому графику $g_{i,j}(t)$ соответствуют энергозатраты на перевозку $E(g_{i,j}(\cdot))$. Тогда для организации движения на ориентированном перегоне (s_i, s_j) при заданных 1–7 будем выбирать график $g_{i,j}(t)$ таким образом, чтобы $E\left(g_{i,j}(\cdot)\right)$ были минимальны.

В рамках настоящей работы не рассматриваются способы задания $g_{i,j}(t)$ и расчета $E\left(g_{i,j}(\cdot)\right)$.

Определение 1. *Энергоэффективной стратегией движения на ориентированном перегоне* $\left(s_i, s_j\right)$ *будем называть набор параметров*:

$$\vec{E}\left(s_i, s_j\right) = \left(\overrightarrow{v_{\text{н}}}\left(s_i, s_j\right), \overrightarrow{v_{\text{к}}}\left(s_i, s_j\right), t_{\text{н}}\left(s_i, s_j\right), t_{i,j}, g_{i,j}(\cdot)\right).$$

Для различных $\overrightarrow{v_{\text{н}}}\left(s_i, s_j\right), \overrightarrow{v_{\text{к}}}\left(s_i, s_j\right), t_{\text{н}}\left(s_i, s_j\right)$ и $t_{i,j}$ имеем различные $g_{i,j}(\cdot)$ и соответствующие $E\left(g_{i,j}(\cdot)\right)$, тогда

$$\overrightarrow{E^k}\left(s_i, s_j\right) = \left(\overrightarrow{v_{\text{н}}^k}\left(s_i, s_j\right), \overrightarrow{v_{\text{к}}^k}\left(s_i, s_j\right), t_{\text{н}}^k\left(s_i, s_j\right), t_{i,j}, g_{i,j}^k(\cdot)\right),$$

где $k \in \overline{1, N_{i,j}}$ и $N_{i,j}$ – количество стратегий движения на ориентированном перегоне $\left(s_i, s_j\right)$, представляет собой k-ю энергоэффективную стратегию движения на ориентированном перегоне $\left(s_i, s_j\right)$.

Таким образом для каждого ориентированного перегона $\left(s_i, s_j\right)$ может быть построено $E\left(s_i, s_j\right)$ множество энергоэффективных стратегий движения

$$E\left(s_i, s_j\right) = \left\{\overrightarrow{E^k}\left(s_i, s_j\right) : k \in \overline{1, N_{i,j}}\right\}, \left(s_i, s_j\right) \in E.$$

На ориентированном графе сети $\vec{\Gamma}$ множество $\mathrm{E} = \bigcup\limits_{\left(s_i, s_j\right) \in E} E\left(s_i, s_j\right)$ энергоэффективных стратегий движения на ориентированных перегонах, соответствующих дугам ориентированного графа сети $\vec{\Gamma}$, порождает ориентированный мультиграф с множеством вершин $\mathrm{V}=\left\{\mathrm{v}_i : i \in \overline{1,n}\right\}$ и множеством дуг $\mathrm{E} \subseteq \left\{\left(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\right)_k : i,j \in \overline{1,n}, k \in \overline{1,N_{i,j}}\right\}$:

$$\vec{\mathrm{G}}=\left(\mathrm{V},\mathrm{E}\right),$$

где вершина $\mathrm{v}_i \in \mathrm{V}$ соответствует станции $s_i \in S$, и дуга $\left(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\right)_k \in \mathrm{E}$ соответствует энергоэффективной стратегии движения $\overrightarrow{E^k}\left(s_i, s_j\right) \in \mathrm{E}$. Другими словами, k-я дуга, соединяющая соседние вершины v_i и v_j, соответствующие начальной и конечной станциям ориентированного перегона $\left(s_i, s_j\right)$, соответствует k-й энергоэффективной стратегии движения на ориентированном перегоне $\left(s_i, s_j\right)$.

В ориентированном мультиграфе $\vec{\mathrm{G}}$ определим допустимые $\left(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\right)$-пути, $i<j$, как последовательности дуг графа $\left(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\right)_k \in \mathrm{E}$ таким образом, чтобы дуги, следующие друг за другом в допустимом $\left(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\right)$-пути, были совместимы по скорости и времени.

Аналогично определяются допустимые $\left(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\right)$-пути при $i>j$.

Определение 2. *Нормативной ниткой графика движения поезда*[1] *называется любой допустимый* $\left(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j\right)$*-путь.*

Множество нормативных ниток графика движения поезда, каждая из которых соответствует некоторому пути из плана поездоформирования P, будем называть *множеством нормативных ниток* и обозначать $\mathrm{N}\left(\mathrm{P}\right)$.

[1] График движения поезда в ориентированном графе сети $\vec{\Gamma}$ суть множество композиций графиков движения на ориентированных перегона.

Пусть $M_{i,j}$ – количество нормативных ниток, соответствующих множеству допустимых $(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j)$-путей в ориентированном мультиграфе $\vec{\mathrm{G}}$; обозначим через $\mathrm{M}_{i,j} = \left\{ n_{i,j}^m : m \in \overline{1, M_{i,j}} \right\}$ множество всех нормативных ниток, соответствующих множеству $\left\{ p_{i,j}^m : m \in \overline{1, M_{i,j}} \right\}$ допустимых $(\mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j)$-путей ориентированного мультиграфа $\vec{\mathrm{G}}$.

На множестве $\mathrm{N}(\mathrm{P})$ нормативных ниток графика введем бинарное отношение конфликтности.

Пусть для каждого ориентированного перегона (s_i, s_j), входящего в состав некоторой нормативной нитки $n \in \mathrm{N}(\mathrm{P})$, однозначно определен номер пути $W(s_i, s_j, n)$, по которому будет осуществляться движение поезда по нитке n на ориентированном перегоне (s_i, s_j).

Обозначим через $d_{\min}$ некоторое заданное минимальное географическое расстояние, допустимое между поездами при движении на одном и том же ориентированном перегоне.

Рассматривается период планирования движения $[T_0, T]$, где T_0 и T – время начала и время окончания периода планирования, соответственно.

Определение 3. *Будем говорить, что две нормативные нитки* n_1 *и* n_2 *имеют однонаправленный конфликт на ориентированном перегоне* (s_i, s_j), *если* $W(s_i, s_j, n_1) = W(s_i, s_j, n_2)$ *и они проходят его в одном и том же направлении по стратегиям* $\overrightarrow{E^{k_1}}(s_i, s_j)$ *и* $\overrightarrow{E^{k_2}}(s_i, s_j)$ *соответственно, и* *существует момент времени* $t \in [T_0, T]$ *из периода планирования, для которого*

$$\left| g_{i,j}^{k_1}(t) - g_{i,j}^{k_2}(t) \right| \le d_{\min}.$$

Определение 4. *Будем говорить, что две нормативные нитки* n_1 *и* n_2 *имеют разнонаправленный конфликт на ориентированном перегоне* (s_i, s_j), *если* $W(s_i, s_j, n_1) = W(s_j, s_i, n_2)$ *и одна из ниток проходит его в направлении* (s_i, s_j) *(для определенности, нитка* n_1*), а другая в направлении* (s_j, s_i) *(для определенности, нитка* n_2*) по стратегиям* $\overrightarrow{E}^{k_1}(s_i, s_j)$ *и* $\overrightarrow{E}^{k_2}(s_j, s_i)$ *соответственно, и существует момент времени* $t \in [T_0, T]$ *из периода планирования, для которого*

$$\left| g_{i,j}^{k_1}(t) - \left(\left| s_{i,j} \right| - g_{j,i}^{k_2}(t) \right) \right| \le d_{\min},$$

где $\left| s_{i,j} \right|$ *– общая длина пути с номером* $W(s_i, s_j, n_1) = W(s_j, s_i, n_2)$ *на ориентированном перегоне* (s_i, s_j).

Определение 5. *Две нормативные нитки* n_1 *и* n_2 *называются конфликтными, если существует ориентированный перегон* (s_i, s_j), *на котором они имеют однонаправленный или разнонаправленный конфликты.*

Бинарное отношение конфликтности определяет неориентированный граф конфликтов на множестве нормативных ниток $\mathrm{N}(\mathrm{P})$:

$$G = (\mathrm{N}(\mathrm{P}), U),$$

где $\{n_i, n_j\} \in U$, если нормативные нитки n_i и n_j конфликтны.

Определение 6. *Любое подмножество* N' *множества нормативных ниток* $\mathrm{N}(\mathrm{P})$ *такое, что порожденный подграф графа конфликтов, множеством вершин которого служит* $\mathrm{N}' \subset \mathrm{N}(\mathrm{P})$, *пуст, т.е. не имеет ребер*:

$$\langle \mathrm{N}' \rangle_G = (\mathrm{N}', \varnothing),$$

будем называть совместной системой нормативных ниток или бесконфликтным набором нормативных ниток.

Свойства несовместных систем общего вида подробно изучены в [9]. Бесконфликтные наборы нормативных ниток могут служить допустимыми расписаниями для осуществления перевозок.

Задача 1. *Для заданных* R *и* $\mathrm{N}(\mathrm{P})$ *найти множество бесконфликтных ниток* $\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{R})$ *такое, что*

$$\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{N}(\mathrm{P}),$$

$$\left|\mathrm{M}_{i,j} \cap \mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{R})\right| .. r(s_i, s_j) \text{ для всех } i, j \in \overline{1,n} : r(s_i, s_j) > 0.$$

Подмножество $\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{R}) \subseteq \mathrm{N}(\mathrm{P})$ будем называть вариантным графиком движения поездов.

Физический смысл задачи 1 состоит в том, что для каждой планируемой перевозки построена нормативная нитка вариантного графика такая, что начальная и конечная вершины нормативной нитки соответствуют начальной и конечной станциям перевозки.

Задача построения вариантного графика $\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{R})$ может быть решена в постановке поиска максимального верхнего нуля соответствующим образом заданной монотонной булевой функции.

Пусть $G=\left(\mathrm{N}(\mathrm{P}),U\right)$ – граф конфликтов и $\mathrm{N}(\mathrm{P})=\left\{n_1,n_2,\ldots,n_q\right\}$. Определим булеву функцию на множестве двоичных наборов длины q: $f_G:\{0,1\}^q\rightarrow\{0,1\}$ таким образом, что $f(x)=\left(x_1,x_2,\ldots,x_q\right)=0$ тогда и только тогда, когда подграф графа G, порожденный множеством вершин $\{n_i\}, i\in\overline{1,q}$, для которых значение соответствующих компонент $x_i=1, i\in\overline{1,q}$, пуст.

Из определения графа конфликтов следует, что нули функции f_G определяют бесконфликтные наборы нормативных ниток графика.

На практике более существенными являются бесконфликтные наборы нормативных ниток графика, содержащие наибольшее возможное число элементов, что в постановке булевых функций соответствует максимальным верхним нулям функции f_G. В работе [10] рассматривается задача поиска максимальных верхних нулей монотонных булевых функций, порожденных неориентированными графами, и приводится алгоритм, имеющий квадратичную сложность, позволяющий решить задачу или получить оценку отклонения решения от оптимального.

Постановка задачи

Пусть $\mathrm{N}(\mathrm{P},\mathrm{R})$ – вариантный график движения поездов.

Рассмотрим задачу организации перевозок согласно вариантного графика $\mathrm{N}\left(\mathrm{P},\mathrm{R}\right)$ с помощью назначения и перемещения имеющегося парка локомотивов.

Преобразуем вариантный график $\mathrm{N}\left(\mathrm{P},\mathrm{R}\right)$ движения поездов в план перевозок.

Для допустимого $\left(v_i,v_j\right)$-пути p ориентированного мультиграфа $\vec{\mathrm{G}}$, соответствующего некоторой нормативной нитке $n\in\mathrm{N}\left(\mathrm{P}\right)$, определим четверку вида

$$z\left(p\right)=\left(s_{\text{н}}\left(p\right),t_{\text{н}}\left(p\right),s_{\text{к}}\left(p\right),t_{\text{к}}\left(p\right)\right),$$

и будем называть её заданием на перевозку. Параметры $s_{\text{н}},t_{\text{н}}$ определяются как станция s_i и время начала движения по соответствующей стратегии на перегоне, входящем в состав нитки $n\in\mathrm{N}\left(\mathrm{P}\right)$ первым, и $s_{\text{к}},t_{\text{к}}$ – станция s_j и время окончания $\left(t_{\text{н}}+t\right)$ движения по соответствующей стратегии на перегоне, входящем в состав нитки $n\in\mathrm{N}\left(\mathrm{P}\right)$ последним.

Планом перевозок будем называть множество заданий на перевозку, полученное с учетом всех ниток из $\mathrm{N}\left(\mathrm{P},\mathrm{R}\right)$:

$$Z=\left\{z\left(p\right):p\in\mathrm{N}\left(\mathrm{P},\mathrm{R}\right)\right\}.$$

Имеется множество локомотивов $\mathrm{L}=\left\{L_i:i\in\overline{1,l}\right\}$, заданное начальными условиями доступности $s^0\left(L_i\right)$ – станция, в которой находится локомотив L_i в момент начала планирования; $t^0\left(L_i\right)$ – время, начиная с которого L_i впервые доступен для назначения. На практике не всегда удается выполнить заданный план перевозок посредством имеющегося парка локомотивов с заданными начальными условиями. Будем считать, что перевозки, осуществление которых локомотивами имеющегося парка с заданными начальными условиями невозможно, выполняются «фантомным» локомотивом L_0.

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathrm{R}^* = \left\| r^*\left(s_i, s_j\right) \right\|, i, j \in \overline{1,n},$$

такую, что

$$r^*\left(s_j, s_i\right) = 0, \text{ если } r\left(s_i, s_j\right) = 0 \text{ для всех } i, j \in \overline{1,n}.$$

Тогда, описанным для графика $\mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}\right)$ способом, определим вариантный график $\mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}^*\right)$, бесконфликтный с вариантным графиком $\mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}\right)$, т.е.

$$\left\langle \mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}\right) \cup \mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}^*\right) \right\rangle_G = \left(\mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}\right) \cup \mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}^*\right), \varnothing \right).$$

Преобразуем множество $\mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}^*\right)$ в *план перемещений* локомотивов, также, описанным способом:

$$D = \left\{ d(p) = \left(s_{\text{н}}(p), t_{\text{н}}(p), s_{\text{к}}(p), t_{\text{к}}(p) \right) : p \in \mathrm{N}\left(\mathrm{P}, \mathrm{R}^*\right) \right\}.$$

Упорядочим множество $(Z \cup D)$ в лексикографическом порядке относительно $s_{\text{н}}(p), t_{\text{н}}(p)$ и переобозначим:

$$Z \cup D = \left\{ v_i = \left(s_{\text{н}}(v_i), t_{\text{н}}(v_i), s_{\text{к}}(v_i), t_{\text{к}}(v_i) \right) \right\},$$

где $i \in \overline{1,V}$ и V – число всевозможных перемещений локомотивов по допустимым путям, соответствующим энергоэффективным стратегиям движения на ориентированном графе сети, включая $v \in Z$ – задания на перевозку, и $v \in D$ – допустимые перемещения локомотивов без нагрузки на перевозку составов.

Пусть задано действительное число $\Delta > 0$.

Для любого $t \in [T_0, T]$ обозначим

$$(Z \cup D)(t) = \left\{ v_i : v_i \in (Z \cup D), t_{\text{н}}(v_i) \leq t \leq t_{\text{к}}(v_i) \right\}.$$

Отображение $f : (Z \cup D) \to 2^{\mathrm{L} \cup \{L_0\}}$ будем называть допустимым, если

$$\left| f^{-1}(L_i)(t) \right| \leq 1, i \in \overline{1,l}. \tag{1}$$

В связи с (1) множество $f^{-1}(L_i)$ может быть линейно упорядочено:

$$f^{-1}(L_i) = \left\{ v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k} \right\}, k = \left| f^{-1}(L_i) \right|.$$

Тогда допустимое отображение f должно быть таковым, чтобы для каждого локомотива $L_i \in f(Z \cup D)$ и множества $f^{-1}(L_i) = \left\{ v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k} \right\}$ выполнялись условия:

$$\begin{cases} s_{\text{н}}(v_{i_1}) = s^0(L_i), t^0(L_i) \leq t_{\text{н}}(v_{i_1}); \\ s_{\text{к}}(v_{i_1}) = s_{\text{н}}(v_{i_2}), \ldots, s_{\text{к}}(v_{i_{k-1}}) = s_{\text{н}}(v_{i_k}); \\ t_{\text{к}}(v_{i_1}) \leq t_{\text{н}}(v_{i_2}) + \Delta, \ldots, t_{\text{к}}(v_{i_{k-1}}) \leq t_{\text{н}}(v_{i_k}) + \Delta. \end{cases}$$

Ниже под $Arg\min(Arg\max)$ будут пониматься множества всех объектов, на которых достигается минимум (максимум) соответствующей функции, в отличие от $\arg\min(\operatorname{argmax})$, которые традиционно обозначают лишь один некоторый объект, обладающий соответствующим свойством.

Рассмотрим цепочку включений $F \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq F_4$, где

$$F = \left\{ f : (Z \cup D) \to 2^{\mathrm{L} \cup \{L_0\}} \right\};$$

F_1 – множество допустимых отображений;

$$F_2 = Arg \max_{f \in F_1} \left| f^{-1}(\mathrm{L}) \cap Z \right|;$$

$$F_3 = Arg \min_{f \in F_2} \left| f(Z \cup D) \right|;$$

$$F_4 = Arg \min_{f \in F_3} \left| f^{-1}(\mathrm{L}) \cap D \right|.$$

Задача 2. *Для заданных* $(Z \cup D)$ *и множества локомотивов* L *с начальными условиями доступности, найти отображение* $f \in F_4$.

Задача о покрытии вершин графа ориентированными путями

Множество $(Z \cup D)$ порождает ориентированный граф $\overrightarrow{G^*}$ такой, что

$$\overrightarrow{G^*} = \left((Z \cup D), E^*\right);$$

$$(v_i, v_j) \in E^* \Leftrightarrow \begin{cases} s_{\text{к}}(v_i) = s_{\text{н}}(v_j); \\ t_{\text{к}}(v_i),, t_{\text{н}}(v_j) + \Delta, \end{cases}$$

и называемый *графом совместимости* заданий на перевозку.

В ориентированном графе $\overrightarrow{G^*}$ множество простых ориентированных путей обозначим

$$\mathrm{W} = \left\{ \mathrm{w}_i : i \in \overline{1, N} \right\},$$

а начало некоторого простого ориентированного пути $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ обозначим

$$v_1(\mathrm{w}) = \left(s_{\text{н}}\left(v_1(\mathrm{w})\right), t_{\text{н}}\left(v_1(\mathrm{w})\right), s_{\text{к}}\left(v_1(\mathrm{w})\right), t_{\text{к}}\left(v_1(\mathrm{w})\right)\right).$$

Задача 3. *В ориентированном графе* $\overrightarrow{G^*}$ *найти подмножество* $\mathrm{W}' \subseteq \mathrm{W}$ *простых ориентированных путей, для которого существует подмножество попарно различных локомотивов* $\mathrm{L}' \subseteq \mathrm{L}, |\mathrm{L}'| = |\mathrm{W}'|$, *и взаимно-однозначное соответствие* $g : \mathrm{W}' \to \mathrm{L}'$ *такое, что для любого* $\mathrm{w}' \in \mathrm{W}'$ *выполняются соотношения* $s_{\text{н}}\left(v_1(\mathrm{w}')\right) = s^0\left(g(\mathrm{w}')\right)$ *и* $t_{\text{н}}\left(v_1(\mathrm{w}')\right)..t^0\left(g(\mathrm{w}')\right)$, *и* W' *содержит максимально возможное число заданий на перевозку из множества* Z *и при этом минимально возможное число путей из множества* W *и минимально возможное число перемещений локомотивов без нагрузки составов из множества* D.

Для простого ориентированного пути $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ множество

$$\mathrm{vert}(\mathrm{w}) = \{v : v \in \mathrm{w}\}$$

содержит все вершины ориентированного графа $\overrightarrow{G^*}$, входящие в состав простого ориентированного пути $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$.

Для каждого локомотива $L_i \in \mathrm{L}, i \in \overline{1,l}$, обозначим через

$$\mathrm{W}(L_i) \subseteq \mathrm{W}$$

множество всех простых ориентированных путей, начало которых «совместимо» с начальными условиями доступности локомотива $L_i \in \mathrm{L}$, формально,

$$\begin{cases} s_{\text{н}}\left(v_1\left(\mathrm{w}(L_i)\right)\right) = s^0(L_i), \\ t_{\text{н}}\left(v_1\left(\mathrm{w}(L_i)\right)\right)..t^0(L_i), \end{cases}$$

для всех $\mathrm{w}(L_i) \in \mathrm{W}(L_i), L_i \in \mathrm{L}$. Отметим, что $\mathrm{W}(L_0)$ включает все простые ориентированные пути, содержащие вершины, соответствующие перемещениям, выполнение которых невозможно посредством имеющегося парка локомотивов.

Пусть $\mathrm{L}' \subseteq \mathrm{L}$ и задано отображение

$$\omega : \mathrm{L}' \to \bigcup_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{W}(L_i)$$

такое, что

$$\omega(L_i) \in \mathrm{W}(L_i) \text{ для всех } L_i \in \mathrm{L}'. \qquad (2)$$

Обозначим через W_1 множество всех пар вида $\left(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \bigcup_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{W}(L_i)\right)$, в которых отображение ω удовлетворяет условию (2).

Рассмотрим цепочку включений $\mathrm{W}_1 \supseteq \mathrm{W}_2 \supseteq \mathrm{W}_3 \supseteq \mathrm{W}_4$, где

(A) $$\mathrm{W}_2 = Arg \max_{(\mathrm{L}', w) \in \mathrm{W}_1} \left| Z \cap \bigcup_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}(L_i)\right) \right|,$$

(B) $$\mathrm{W}_3 = Arg \min_{(\mathrm{L}', w) \in \mathrm{W}_2} |\mathrm{L}'|,$$

(C) $$\mathrm{W}_4 = Arg \min_{(\mathrm{L}', w) \in \mathrm{W}_3} \left| D \cap \bigcup_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}(L_i)\right) \right|.$$

Рассмотрим отображение

$$g : \mathrm{W}_1 \to F_1,$$

которое каждой паре $\left(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \bigcup_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{W}(L_i)\right) \in \Omega_1$ ставит в соответствие функцию $f \in F$ следующим образом:

$$f(v_i) = L_j \;\Leftrightarrow\; v_i \in \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}\left(L_j\right)\right),$$

$$f(v_i) = L_0 \;\Leftrightarrow\; v_i \notin \bigcup_{L_j \in \mathrm{L}'} \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}\left(L_j\right)\right).$$

Утверждение 1. *Отображение g устанавливает взаимно однозначное соответствие между следующими парами множеств:*

$$\mathrm{W}_1 \text{ и } F_1, \tag{3}$$

$$\mathrm{W}_2 \text{ и } F_2, \tag{4}$$

$$\mathrm{W}_3 \text{ и } F_3, \tag{5}$$

$$\mathrm{W}_4 \text{ и } F_4, \tag{6}$$

Доказательство. Докажем сначала (3).

По определению множества $\mathrm{W}(L_i) \subseteq \mathrm{W}$, для каждого простого ориентированного пути $\mathrm{w}(L_i) \in \mathrm{W}(L_i)$ выполняются условия:

$$\begin{cases} s_{\text{н}}\left(v_1\left(\mathrm{w}\left(L_i\right)\right)\right) = s^0\left(L_i\right), \\ t_{\text{н}}\left(v_1\left(\mathrm{w}\left(L_i\right)\right)\right) .. t^0\left(L_i\right), \end{cases}$$

т.е. для отображения f выполняются условия допустимого отображения.

По построению отображения f имеем:

$$f\left(v_{i_1}\right) = f\left(v_{i_2}\right) = L_j \;\Leftrightarrow\; v_{i_1}, v_{i_2} \in \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}\left(L_j\right)\right).$$

В то же время, по определению $\overrightarrow{G^*}$ ориентированного графа зависимостей перевозок,

$$v_{i_1}, v_{i_2} \in \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}\left(L_j\right)\right) \;\Leftrightarrow\; t^{\text{н}}\left(v_{i_2}\right) .. t^{\text{к}}\left(v_{i_1}\right) + \Delta ,$$

или

$$v_{i_1}, v_{i_2} \in \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}\left(L_j\right)\right) \Leftrightarrow t^{\text{н}}\left(v_{i_1}\right) .. t^{\text{к}}\left(v_{i_2}\right) + \Delta .$$

Отсюда следует, что условие (1) допустимого отображения выполняется

$$\left| f^{-1}\left(L_i\right)\left(t\right) \right| ,, 1 \text{ для любых } t \in \left[T_0, T\right],\, L_i \in \mathrm{L}'.$$

С другой стороны, для допустимого отображения $f \in F_1$, можно построить пару $\left(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \bigcup\limits_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{W}\left(L_i\right)\right)$ таким образом, что

$$f\left(Z \cup D\right), \;\; \left\{L_0\right\} = \mathrm{L}',$$

и

$$f^{-1}\left(L_i\right) = \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}\left(L_i\right)\right) \text{ для любого } L_i \in \mathrm{L}'. \qquad (7)$$

Таким образом, установлена двойственная взаимосвязь между допустимыми отображениями $f \in F_1$ и парами $\left(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \bigcup\limits_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{W}\left(L_i\right)\right) \in \Omega_1$.

Далее, из (7) следует, что

$$f^{-1}(\mathrm{L}') = \bigcup_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{vert}\left(\mathrm{w}\left(L_i\right)\right). \qquad (8)$$

Из (8) следует, что

$$g\left(\mathrm{W}_2\right) = F_2 \;\text{ и }\; g^{-1}\left(F_2\right) = \mathrm{W}_2 .$$

Легко видеть, что для отображения g число локомотивов в паре $\left(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \bigcup\limits_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{W}(L_i)\right)$ равно числу локомотивов $\left| f(Z \cup D) \setminus \{L_0\} \right|$, из чего следует, что

$$g(\mathrm{W}_3) = F_3 \text{ и } g^{-1}(F_3) = \mathrm{W}_3,$$

Наконец, из соотношения (8), снова получаем, что

$$g(\mathrm{W}_4) = F_4 \text{ и } g^{-1}(F_4) = \mathrm{W}_4,$$

что и требовалось доказать. □

Утверждение 2. *Любая пара* $\left(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \bigcup\limits_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{W}(L_i)\right) \in \Omega_4$ *является решением задачи 3 и взаимно однозначно соответствует некоторому решению* $f \in F_4$ *задачи 2.*

Доказательство. Утверждение является непосредственным следствием утверждения 1. □

Алгоритм назначения локомотивов без учета ТО

На основании утверждения 2 справедливо полагать, что решение задачи 2 удобно найти в виде решения задачи 3, а именно, в виде пары $\left(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \bigcup\limits_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{W}(L_i)\right) \in \Omega_4$, и установить взаимно однозначное отображение g между такой парой и отображением $f \in F_4$.

Рассмотрим подмножество

$$\mathrm{P}(L_i) \subseteq \mathrm{W}(L_i),\ L_i \in \mathrm{L}',$$

всех максимальных по включению простых ориентированных путей, начало которых «совместимо» с начальными условиями доступности локомотива $L_i \in \mathrm{L}'$.

Каждому локомотиву $L_i \in \mathrm{L}'$ поставим в соответствие некоторый элемент из соответствующего множества $\mathrm{P}(L_i)$:

$$\omega : \mathrm{L}' \to \mathrm{P}(\mathrm{L}'),$$

причем

$$\omega(L_i) \in \mathrm{P}(L_i) \text{ для любого } L_i \in \mathrm{L}'.$$

Для каждой пары $(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \mathrm{P}(\mathrm{L}'))$ обозначим

$$\mathrm{A}(\mathrm{L}', \omega) = \left| Z \cap \bigcup_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{vert}\left(\mathrm{p}(L_i)\right) \right|,$$

$$\mathrm{B}(\mathrm{L}', \omega) = |\mathrm{L}'|,$$

$$\mathrm{C}(\mathrm{L}', \omega) = \left| D \cap \bigcup_{L_i \in \mathrm{L}'} \mathrm{vert}\left(\mathrm{p}(L_i)\right) \right|.$$

В качестве схемы алгоритма решения задачи 3 предлагается схема greedy-алгоритма поиска пары $(\mathrm{L}', \omega : \mathrm{L}' \to \mathrm{P}(\mathrm{L}'))$ по критерию минимизации скалярной величины

$$-\alpha_1 \cdot \mathrm{A} - \alpha_2 \cdot \mathrm{B} - \alpha_3 \cdot \mathrm{C}$$

при соответствующем векторе весовых коэффициентов $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Каждая найденная пара является решением задачи 3 и взаимно однозначно соответствует некоторому отображению $f \in F_4$, и любое такое отображение является искомым решением задачи 2 о назначении и перемещении локомотивов.

Заключение

1. Предлагается процедура построения множества $N(P)$ энергоэффективных нормативных ниток графика движения поездов на основе ориентированного мультиграфа энергоэффективных стратегий движения на перегонах ориентированного графа сети $\vec{\Gamma}$.

2. Предлагается сведение задачи построения бесконфликтного энергоэффективного набора ниток графика к задаче поиска максимального верхнего нуля монотонной булевой функции, порождаемой неориентированным графом конфликтов, построенном на множестве всех нормативных ниток графика.

3. Для плана перевозок, заданного на основе бесконфликтного набора нормативных ниток графика вводится в рассмотрение ориентированный граф совместимости заданий на перевозку. Приводится процедура сведения задачи оптимального назначения и перемещения локомотивов из заданного парка локомотивов к задаче поиска покрытия ориентированными путями вершин подграфа ориентированного графа совместимости заданий на перевозку минимальным числом путей.

Библиографический список

1.Малинина Н.Л. Противоречия в свойствах двух основных типов сетевых моделей и пути их разрешения // Труды МАИ, 2010, № 37: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=13440

2.Кобко Л.И. Комплексный комбинаторный метод построения расписания работы рабочих мест первичных производственных систем // Труды МАИ, 2001, № 3: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34687

3. Лазарев А.А. Оценки абсолютной погрешности и схема приближенного решения задач теории расписаний // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2009. Т.49. №2. С. 14–34.

4. Гафаров Е.Р., Лазарев А.А. Преобразование сетевого графика задач теории расписаний с ограничениями предшествования // Доклады академии наук. 2008. Т.424. № 2. С. 7–9.

5. Burdett O., Kozan E.A Disjunctive Graph Model and Framework for Constructing New Train Schedules // Eur. J. Oper. Res. 2010. V. 200. P. 85–98.

6. Gholami O., Sotskov Y.N. Mixed Graph Model and Algorithms for Parallel-Machine Job-shop Scheduling Problems // Int. J. Production Research. 2015. V.8. P. 1–16.

7. Lusby R., Ryan D. Railway Track Allocation: Models and Methods // Oper. Res. Spektrum. 2011. V.33. P.843–883.

8. Осипов С.И, Осипов С.С. Основы тяги поездов. – М.: УМК МПС, 2000. – 592 с.

9. Гайнанов Д.Н. Комбинаторная геометрия и графы в анализе несовместных систем и распознавании образов. – М.: Наука, 2014. –152 с.
10.Gainanov D.N., Rasskazova V.A. An inference algorithm for monotone boolean functions associated with undirected graphs. Bulletin SUSU. 2016. V.9. №3. P.17–30.