

Труды МАИ. 2021. № 121
Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья

УДК 539.3

DOI: [10.34759/trd-2021-121-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-04)

ОЦЕНКА УРОВНЯ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ МИКРО-РАЗМЕРНЫХ ОТВЕРСТИЙ НА ОСНОВЕ УПРОЩЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ГРАДИЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Владимир Алексеевич Короленко^{1✉}, Юрий Олегович Соляев²

^{1,2}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ,

Москва, Россия

²Институт прикладной механики Российской академии наук,

Москва, Россия

¹korolenko.vmir@gmail.com ✉

²yos@iam.ras.ru

Аннотация. В работе представлены результаты моделирования деформированного состояния и уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий. Построены аналитические решения о деформациях бесконечной пластины, содержащей круговое отверстие, в рамках нескольких упрощенных однопараметрических моделей градиентной теории упругости (ГТУ). Для построения решения использован новый вариант представления общего решения ГТУ в

перемещениях в форме Папковича-Нейбера, который сводится к использованию стандартного разложения Гельмгольца для градиентной составляющей поля перемещений. На основе построенных решений исследован прогнозируемый характер изменения концентрации напряжений и деформаций вблизи отверстий при уменьшении их диаметра. Показано, что выбор подходящего варианта упрощенной модели ГТУ и идентификация масштабных параметров для конкретных типов материалов может проводиться на основе определения разрушающих нагрузок для образцов, содержащих отверстия различного диаметра (с минимальным размером до ~100 мкм). Также показано, что проведение идентификации возможно на основе прямых методов измерения полей деформаций вблизи малоразмерных отверстий, например, с использованием методов корреляции цифровых изображений.

Ключевые слова: концентрация напряжений, задача Кирша, градиентная теория упругости, идентификация масштабных параметров

Финансирование: работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 20-38-90126 и при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код проекта FSFF-2020-0017)

Для цитирования: Короленко В.А., Соляев Ю.О. Оценка уровня концентрации напряжений вблизи микро-размерных отверстий на основе упрощенных моделей градиентной теории упругости // Труды МАИ. 2021.№ 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-04)

EVALUATION OF STRESS CONCENTRATION AROUND MICRO-SIZED HOLES WITHIN SIMPLIFIED MODELS OF STRAIN GRADIENT ELASTICITY

Vladimir A. Korolenko^{1✉}, Yuri O Solyaev²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University),
Moscow, Russia

²Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

¹korolenko.vmir@gmail.com✉

²yos@iam.ras.ru

Abstract. This paper presents the results for the modeling of the deformed state and the level of stress concentration around the micro-sized holes. Analytical solutions are derived for the deformations of an infinite plate containing a cylindrical hole within several simplified one-parametric models of the strain gradient elasticity theory (SGET). Namely, we used the simplified strain gradient elasticity theory, the couple stress theory, the dilatation gradient elasticity theory and the fully symmetric Gusev-Lurie theory, which all are the special cases of the general Mindlin-Tupin SGET. Linear elastic isotropic behavior of the material is assumed. New variant of the Papkovitch-Neuber solution of SGET equations in terms of displacements is involved for analytical derivations. It is shown that this solution can be reduced to the standard Helmholtz decomposition for the gradient part of the displacement field and to the standard representation of its classical part. Based on the derived solutions we investigate the changes of the stress and strain state around the holes of different diameter. It is shown that the choice of a suitable variant of a simplified SGET model and identification of the length scale parameter for the certain materials can be performed based

on the experimental data for the failure loads for the samples containing holes of different diameters (with a minimum size of $\sim 100 \mu\text{m}$). It is also shown that identification can be also carried out on the basis of direct methods of strain measurements around the small-sized holes, for example, by using digital image correlation methods, which requires the use of microscopy or, at least, macro photography techniques at the micro-scale level.

Keywords: stress concentration, Kirsch problem, strain gradient elasticity theory, identification of length scale parameters

Funding: this work was supported by the RFBR grant 20-38-90126 and with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project code FSFF-2020-0017)

For citation: Korolenko V.A., Solyaev Y.O. Evaluation of stress concentration around micro-sized holes within simplified models of strain gradient elasticity. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-04](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-04)

1. Введение

Классическое решение задачи Кирша о концентрации напряжения вблизи кругового отверстия в бесконечной пластине не содержит масштабных параметров, и, фактически, предполагает одинаковый характер распределения напряжений вблизи отверстий любого размера. Однако, известны экспериментальные данные, из которых следует, что при уменьшении диаметра отверстия в экспериментальных образцах, происходит повышение разрушающих нагрузок при статическом и усталостном нагружении [1], что свидетельствует о снижении уровня концентрации напряжений в некоторых материалах вблизи малоразмерных отверстий. Описание таких эффектов

в рамках линейно упругой формулировки возможно при использовании неклассических моделей, например, теории сред Коссера [2] или теории упругости с поверхностными эффектами [3], или градиентной теории упругости [4]. Известные в этих теориях решения для задачи Кирша прогнозируют снижение уровня концентрации напряжений вблизи отверстий малого размера, по сравнению с классическим решением [2-7]. Поэтому, потенциально, такие теории могут быть использованы для описания известных экспериментальных данных. При этом возникает необходимость, как выбора конкретного варианта теории, так и идентификации дополнительных параметров, которые в ней присутствуют.

В настоящей работе обсуждается возможность применения упрощенных моделей градиентной теории упругости (ГТУ) для описания размерных эффектов, реализующихся при испытании образцов с отверстиями-концентраторами. В общем случае, для изотропного материала определяющие соотношения ГТУ содержат 5 дополнительных материальных констант (масштабных параметров) помимо двух классических параметров Ламе [8]. К настоящему времени предложено большое количество упрощенных градиентных теорий, содержащих редуцированное число масштабных параметров [9]. В настоящей работе рассматриваются одно/двух-параметрические теории – упрощенная теория Айфантиса [10], моментная теория упругости [11], дилатационная теория упругости [12] и полностью симметричная теория Гусева-Лурье [13], которые являются частным случаем общей ГТУ, сформулированной в работах Миндлина и Тупина в 1960-х годах [8,14]. Проводится анализ возможности идентификации градиентных теорий и их масштабных параметров по результатам испытания образцов с отверстиями разного размера в

условиях одноосного и двухосного растяжения и чистого сдвига. При этом предполагается, что классические характеристики материала могут быть найдены из стандартных испытаний.

Идея идентификации масштабных параметров ГТУ на основе испытаний образцов с концентраторами была предложена относительно недавно [15-17]. Было показано, что ГТУ позволяет описывать известные в механике разрушения масштабные эффекты, связанные с длиной трещины и размерами других типов концентраторов [15-17, 28]. Решения ГТУ для задач о трещинах являются регулярными для деформаций и классических напряжений (связанных классическим законом Гука с деформациями) [18]. Поэтому анализ прочности для тел с трещинами или острыми вырезами в ГТУ может быть сведен к стандартному прочностному анализу с привлечением критериев прочности и не требует привлечения аппарата механики разрушения [15-17]. При этом, решения ГТУ согласуются с решениями линейно упругой механики разрушения, и, в частности, прогнозируют соответствующую зависимость номинальных напряжений при разрушении для образцов с длинными трещинами $\propto a^{-1/2}$ (a – длина трещины). Для коротких трещин ГТУ естественным образом позволяет описать размерные эффекты, связанные с выходом уровня номинальной прочности образца с малоразмерным дефектом на предел прочности материала без дефекта [15]. Поэтому ГТУ является альтернативным подходом по отношению к известным моделям с когезионными эффектами [19], моделям размерного эффекта Базанта [20], теории критических расстояний [1], и т.д.

Уровень напряжений вблизи концентратора в ГТУ определяется его геометрией, внешней нагрузкой, а также значением неклассических масштабных параметров. Эти же масштабные параметры можно связать с характерным размером зоны предразрушения или пластической зоны вблизи вершины трещины. В частности, для однопараметрической теории Айфантиса было показано [15], что масштабный параметр l в этой теории по своему порядку для различных материалов имеет значения, близкие к известной оценке для протяженности пластической зоны (или для критического размера трещины): $l \approx \frac{1}{2\pi} \frac{K_{Ic}^2}{\bar{\sigma}^2}$, где K_{Ic} – критический коэффициент интенсивности напряжений, $\bar{\sigma}$ – предел прочности или предел текучести материала. Соответственно, для большинства хрупких и пластичных материалов этот масштабный параметр может принимать значения от нескольких десятков до нескольких сотен микрон, а все размерные эффекты, связанные со снижением уровня концентрации напряжений вблизи дефектов, реализуются при приближении их характерных размеров к диапазону значений 10-100 мкм.

Для рассматриваемой далее задачи о концентраторе в виде кругового отверстия будем предполагать, что материалом пластины является оргстекло, для которого характерным значением трещиностойкости является $K_{Ic} = 1 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, а прочности $\bar{\sigma} = 30 \text{ МПа}$. Таким образом, порядок значений масштабного параметра для этого материала оценивается на уровне ~ 180 мкм. Как будет видно далее, все существенные размерные эффекты прогнозируются для отношения диаметра к масштабному параметру < 5 , то есть для диаметров отверстий < 1 мм. Такие отверстия могут быть относительно легко нанесены в экспериментальных образцах с

использованием микросверел вплоть до диаметров ~ 100 мкм, что позволяет говорить о возможности дальнейшей проверки приводимых здесь результатов расчетов на основе экспериментальных данных.

2. Постановка краевой задачи градиентной теории упругости

В градиентной теории упругости предполагается, что плотность энергии деформаций среды зависит не только от самих деформаций, но и от их градиентов [8]:

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}, \nabla \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{A} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1)$$

где \mathbf{C} – тензоры модулей упругости четвертого ранга, \mathbf{A} – тензор градиентных модулей шестого ранга; $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ – тензор бесконечно малых деформаций, $\nabla \boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор градиентов деформаций, ∇ – оператор набла, $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – вектор перемещений в точке \mathbf{x} .

Определяющие соотношения для классических напряжений $\boldsymbol{\tau}$ (тензор второго ранга) и для градиентных напряжений $\boldsymbol{\mu}$ (тензор третьего ранга) имеют вид:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial W}{\partial \nabla \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

Постановка краевой задачи ГТУ может быть получена на основе вариационного принципа Лагранжа с учетом записанной структуры плотности энергии деформаций (1). Для тела, занимающего объем Ω с гладкой границей $\partial\Omega$, с заданными только статическими граничными условиями, эта постановка имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} &= 0, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}, \quad \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}, & & \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} - \nabla \cdot \boldsymbol{\mu}$ – тензор полных напряжений, входящий в уравнения равновесия ГТУ, $\bar{\mathbf{b}}$ – заданные объемные силы, $\bar{\mathbf{t}}, \bar{\boldsymbol{\mu}}$ – заданные поверхностные нагрузки (классические и моментные напряжения на поверхности), а вектор напряжений и градиентных напряжений на поверхности тела, определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nabla_S \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu}) - H \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{m} &= \mathbf{nn} : \boldsymbol{\mu} \end{aligned} \quad (4)$$

где H – это средняя кривизна поверхности, \mathbf{n} – вектор внешней единичной нормали к поверхности, ∇_S – оператор поверхностного градиента.

Компоненты тензоров модулей упругости и градиентных модулей в общем случае изотропного тела могут быть представлены в следующем виде:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} A_{ijklmn} &= A_{jiklmn} = A_{ijkmln} = A_{lmnijk} \\ &= a_1 (\delta_{ij} \delta_{kl} \delta_{mn} + \delta_{in} \delta_{jk} \delta_{lm} + \delta_{ij} \delta_{km} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jn} \delta_{lm}) \\ &+ a_2 \delta_{ij} \delta_{kn} \delta_{lm} \\ &+ a_3 (\delta_{ik} \delta_{jl} \delta_{mn} + \delta_{im} \delta_{jk} \delta_{ln} + \delta_{ik} \delta_{jm} \delta_{ln} + \delta_{il} \delta_{jk} \delta_{mn}) \\ &+ a_4 (\delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn}) \\ &+ a_5 (\delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} + \delta_{in} \delta_{jm} \delta_{kl}) \end{aligned} \quad (6)$$

где λ, μ – классические константы Ламе [Па], a_i ($i=1...5$) дополнительные константы материала [Па м²]; δ_{ij} – дельта Кронекера.

Подставляя соотношения (5), (6) в определяющие соотношения (2), получаем классический закон Гука для вычисления компонент классических напряжений и дополнительный набор соотношений для вычисления градиентных напряжений:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ii} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ijk} = \mu_{jik} = & a_1 \left(2\delta_{ij} \varepsilon_{kl,l} + \delta_{ik} \theta_{,j} + \delta_{jk} \theta_{,i} \right) + a_2 \delta_{ij} \theta_{,k} \\ & + 2a_3 \left(\delta_{jk} \varepsilon_{il,l} + \delta_{ik} \varepsilon_{jl,l} \right) + 2a_4 \varepsilon_{ij,k} + 2a_5 \left(\varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ – компоненты тензора бесконечно малых деформаций, $\varepsilon_{ij,k}$ компоненты тензора градиентов деформаций.

С использованием (7), (8) и определений для тензора деформаций, уравнения равновесия в (3) могут быть записаны в терминах перемещений в следующем инвариантном виде:

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2 \nabla^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u} - \mu(1 - l_2^2 \nabla^2) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (9)$$

где в общем случае возникает два масштабных параметра, которые имеют размерность длины и определяются через градиентные модули следующим образом:

$$l_1^2 = \frac{4a_1 + a_2 + 4a_3 + 2a_4 + 4a_5}{\lambda + 2\mu}, \quad l_2^2 = \frac{a_3 + a_4 + a_5}{\mu}.$$

3. Представление решения в форме Папковича-Нейбера

Решение для уравнений равновесия ГТУ в перемещениях (9) может быть представлено в форме Папковича-Нейбера, обобщенной на случай рассматриваемой системы уравнений повышенного (четвертого) порядка. В работе Миндлина [8] был предложен вариант такого представления с использованием потенциалов, удовлетворяющих уравнениям четвертого порядка. С использованием этого представления решение для задачи Кирша в общей формулировке ГТУ и для упрощенной теории Айфантиса было построено в работах [4,5]. Позднее была

предложена запись решения в форме Папковича-Нейбера для ГТУ через потенциалы, которые удовлетворяют уравнениям Лапласа и Гельмгольца, то есть уравнениям второго порядка [22]. Вариант такого представления можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u}^{(c)} + \mathbf{u}^{(g)}, \\ \mathbf{u}^{(c)} &= \Phi - \kappa \nabla(\mathbf{x} \cdot \Phi), \\ \mathbf{u}^{(g)} &= l_1^2 \nabla \psi + \Psi - l_1^2 \nabla \nabla \cdot \Psi\end{aligned}\tag{10}$$

где $\mathbf{u}^{(c)}$ – классическая часть решения, которая определяется через классический гармонический векторный потенциал Φ и классический параметр

$$\kappa = \frac{\lambda + \mu}{2(\lambda + 2\mu)};$$

классический скалярный потенциал не рассматриваем, предполагая,

что коэффициент Пуассона материала не равен 0.25; $\mathbf{u}^{(g)}$ – это градиентная часть решения, которая определяется через скалярный потенциал ψ и векторный потенциал Ψ .

Классический векторный потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi = 0\tag{11}$$

Градиентные потенциалы должны быть решениями уравнений Гельмгольца:

$$\Psi - l_2^2 \nabla^2 \Psi = 0, \quad \psi - l_1^2 \nabla^2 \psi = 0,\tag{12}$$

Заметим далее, что любое векторное поле Ψ , и, в том числе, удовлетворяющее уравнению Гельмгольца, может быть представлено в виде разложения на потенциальную (продольную) Ψ_L и вихревую (поперечную) Ψ_T составляющие [23]:

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi_L + \Psi_T \\ \Psi_L &= \nabla f, \quad f - l_2^2 \nabla^2 f = 0, \quad \nabla \cdot \Psi_T = 0\end{aligned}\tag{13}$$

где f – это некоторая функция, удовлетворяющая скалярному уравнению Гельмгольца.

Подставляя разложение (13) в представление для градиентной части поля перемещений в (10), получим:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(g)} &= l_1^2 \nabla \psi + \Psi_T - l_2^2 \nabla \nabla \cdot \Psi_T + \Psi_L - l_2^2 \nabla \nabla \cdot \Psi_L \\ &= l_1^2 \nabla \psi + \Psi_T - l_2^2 \nabla \nabla \cdot \Psi_T + \nabla (f - l_2^2 \nabla^2 f)\end{aligned}\tag{14}$$

Таким образом, из (14) видно, что для градиентной части поля перемещений в ГТУ допустимо использовать обычное разложение Гельмгольца, при чем в этом разложении скалярный потенциал ψ и векторное соленоидальное поле Ψ_T должны удовлетворять, соответственно, скалярному и векторному уравнениям Гельмгольца. Использование такого разложения, вообще говоря, накладывает ограничения на скорость затухания решения на бесконечности [23], однако это ограничение всегда выполняется для ГТУ, где градиентная часть поля перемещений выражается через решения уравнения Гельмгольца.

Для рассматриваемой далее задачи Кирша необходимо получить представление решения в полярной цилиндрической системе координат (решение будет строиться в предположении плоского деформированного состояния). В этом случае предлагаемая запись решения ГТУ в форме Папковича-Нейбера имеет вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &= \{u_r^{(c)} + u_r^{(g)}, u_\theta^{(c)} + u_\theta^{(g)}, 0\} \\
u_r^{(c)} &= (1-k)\Phi_r - r\kappa \frac{\partial \Phi_r}{\partial r} \\
u_\theta^{(c)} &= \Phi_\theta - \kappa \frac{\partial \Phi_r}{\partial \theta} \\
u_r^{(g)} &= \Psi_r + l_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \\
u_\theta^{(g)} &= \Psi_r + \frac{l_1^2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{15}$$

Классический векторный потенциал Φ должен удовлетворять уравнению Лапласа, и представление для его компонент в полярной системе координат имеет следующий вид [23]:

$$\begin{aligned}
\Phi_r &= c_{10} \ln r \sin \theta + c_{30} \sin \theta + c_{50} \ln r \cos \theta + c_{70} \cos \theta \\
&+ \sin \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_{1n} \cos n\theta + c_{2n} \sin n\theta) + r^n (c_{3n} \cos n\theta + c_{4n} \sin n\theta) \right) \\
&+ \cos \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_{5n} \cos n\theta + c_{6n} \sin n\theta) + r^n (c_{7n} \cos n\theta + c_{8n} \sin n\theta) \right), \\
\Phi_\theta &= c_{10} \ln r \cos \theta + c_{30} \cos \theta + c_{50} \ln r \sin \theta + c_{70} \sin \theta \\
&+ \cos \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_{1n} \cos n\theta + c_{2n} \sin n\theta) + r^n (c_{3n} \cos n\theta + c_{4n} \sin n\theta) \right) \\
&+ \sin \theta \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_{5n} \cos n\theta + c_{6n} \sin n\theta) + r^n (c_{7n} \cos n\theta + c_{8n} \sin n\theta) \right)
\end{aligned} \tag{16}$$

где c_{mn} ($m=1..8, n=0..\infty$) – неизвестные константы, которые должны быть найдены через граничные условия.

Векторный потенциал, через который определяется вихревая часть в градиентной составляющей поля перемещений, может быть выражен через соответствующий скалярный потенциал, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца [23]:

$$\Psi \equiv \Psi_T = l_2^2 \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}\chi), \quad \text{т.е.} \quad \Psi_r = \frac{l_2^2}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}, \quad \Psi_\theta = -l_2^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \theta} \quad (17)$$

где мы исключаем ту часть решения, которая определяет смещения «из плоскости» (это часть имеет вид $\nabla \times (\mathbf{r}\chi)$); \mathbf{r} – это радиус-вектор точки, а χ – это скалярный потенциал, который удовлетворяет уравнению Гельмгольца:

$$\chi - l_2^2 \nabla^2 \chi = 0 \quad (18)$$

В результате, градиентная составляющая поля перемещений выражается через скалярные потенциалы χ и ψ (15), (17). В полярной системе координат эти потенциалы, удовлетворяющие уравнениям Гельмгольца, могут быть представлены в следующем виде [24]:

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_n \left(\frac{r}{l_1} \right) (b_{1n} \cos n\theta + b_{2n} \sin n\theta) + I_n \left(\frac{r}{l_1} \right) (b_{3n} \cos n\theta + b_{4n} \sin n\theta) \right) \\ \chi &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(K_n \left(\frac{r}{l_2} \right) (d_{1n} \cos n\theta + d_{2n} \sin n\theta) + I_n \left(\frac{r}{l_2} \right) (d_{3n} \cos n\theta + d_{4n} \sin n\theta) \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Где b_{mn} , d_{mn} – неизвестные константы, I_n , K_n – модифицированные функции Бесселя.

Таким образом, решение для уравнений равновесия ГТУ для плоских задач может быть представлено через две компоненты классического векторного потенциала Φ_r , Φ_θ , и через два скалярных потенциала χ и ψ . При этом записанные разложения (16) и (19) являются полными [24]. Аналогичным образом это представление может быть обобщено и на трехмерный случай.

4. Модели с упрощенными определяющими соотношениями

Для прикладных расчетов удобным является использование моделей ГТУ с минимальным набором дополнительных материальных констант (хотя в настоящее время теоретически или экспериментально не доказано, что для реальных материалов это является допустимым для любых вариантов нагружения). Поэтому в ГТУ были предложены разнообразные варианты упрощенных теорий, содержащих 1...3 дополнительных параметра и отличающихся формой записи определяющих соотношений для градиентных напряжений (8). Наиболее часто используемой является модель Айфантиса, которая может быть получена из общей формулировки ГТУ с использованием следующих предположений [10]:

$$a_1 = a_3 = a_5 = 0 \quad a_2 = \lambda l^2 \quad a_4 = \mu l^2 \quad l_1 = l_2 = l \quad (20)$$

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = l^2 \tau_{ij,k} = \lambda l^2 \delta_{ij} \varepsilon_{ij,k} + 2\mu l^2 \varepsilon_{ij,k}$$

где l – это единственный масштабный параметр модели; запятой обозначены производные по координатам, и по повторяющимся индексам предполагается суммирование.

Другим распространенным частным случаем ГТУ, который был предложен даже раньше общей формулировки, является моментная теория упругости [11]. Формулировка этой теории может быть получена из (8) с использованием следующих предположений [18]:

$$a_1 = 2l^2 \eta \mu, \quad a_2 = -4l^2 \eta \mu, \quad a_3 = -l^2 \eta \mu, \\ a_4 = 2l^2 (\eta + 1) \mu, \quad a_5 = -l^2 (\eta + 1) \mu, \quad l_1 = 0 \quad l_2 = l$$

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = 2\mu l^2 \left(2\eta \left(2\delta_{ij} \omega_{kp,p} - \delta_{ik} \omega_{jp,p} - \delta_{jk} \omega_{ip,p} \right) + (1 + \eta) \left(\omega_{ik,j} + \omega_{jk,i} \right) \right),$$

где $\omega_{ij} = (u_{i,j} - u_{j,i})/2$ – тензор малых поворотов, и $\eta \in [-1,1]$ – второй неклассический параметр модели.

Далее будем рассматривать упрощенный вариант моментной теории упругости, в котором предполагается, что тензор градиентных напряжений определяется только через симметричную часть тензора градиентов поворотов ($\eta = 0$, *modified couple stress theory*):

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = 2\mu l^2 (\omega_{ik,j} + \omega_{jk,i}) \quad (22)$$

Следующий вариант модели – это дилатационная теория упругости [12]. Ее определяющие соотношения следуют из (8), если предположить:

$$a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = 0 \quad a_2 = (\lambda + 2\mu)l^2 \quad (23)$$

$$\mu_{ijk} = \mu_{jik} = (\lambda + 2\mu)l^2 \delta_{ij} \varepsilon_{ll,k}$$

Последним рассматриваемым вариантом определяющих соотношений является полностью симметричная теория [13], которую получим из (8), предполагая, что:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \lambda l^2, \quad a_4 = a_5 = \mu l^2 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \mu_{ijk} = \mu_{jik} = \mu_{ikj} = \lambda l^2 & \left(2\delta_{ij} \varepsilon_{kl,l} + \delta_{ik} \theta_{,j} + \delta_{jk} \theta_{,i} + \delta_{ij} \theta_{,k} + 2\delta_{jk} \varepsilon_{il,l} + 2\delta_{ik} \varepsilon_{jl,l} \right) \\ & + 2\mu l^2 (\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} + \varepsilon_{ki,j}), \end{aligned}$$

Заметим, что полностью симметричная теория может быть получена из общей ГТУ, записанной, в так называемой, форме III Миндлина [8], в предположении, что в среде отсутствуют моментные напряжения. Кроме этого, заметим, что все рассматриваемые неклассические теории сводятся к классической теории упругости, если положить равным нулю масштабный параметр l .

5. Решение задачи Кирша

Рассматриваем задачу о деформациях бесконечного пространства (или достаточно большого образца), содержащего цилиндрическое отверстие радиусом R . На бесконечности задано однородное напряженное состояние, соответствующее одноосному или двухосному растяжению, либо чистому сдвигу. Поверхность отверстия свободна от нагрузки. Постановка рассматриваемой задачи в ГТУ может быть представлена в следующем виде [5]:

$$\begin{cases} r \geq R: & \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ r = R: & t_r = 0, t_\theta = 0, m_r = 0, m_\theta = 0, \\ r \rightarrow \infty: & t_r = \frac{\bar{t}}{2}(1 + \xi) + \frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi) \cos 2\theta, \quad t_\theta = -\frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi) \sin 2\theta, \quad m_r = 0, \quad m_\theta = 0 \end{cases} \quad (25)$$

где \bar{t} – это заданный уровень внешней нагрузки, и одноосное растяжение реализуется при $\xi = 0$, двухосное растяжение – при $\xi = 1$, и чистый сдвиг (под углом 45 градусов) – при $\xi = -1$.

Решение для перемещений в аналогичной задаче классической теории упругости имеет вид:

$$\begin{aligned} u_r^{clas} &= \frac{\sigma}{8Gr} \left((\xi + 1) \left((\kappa + 1)r^2 + 2R^2 \right) - 2(\xi - 1) \left(r^2 + (\kappa + 1)R^2 - \frac{R^4}{r^2} \right) \cos 2\varphi \right), \\ u_\theta^{clas} &= \frac{\sigma}{4Gr} (\xi - 1) \left(r^2 + (\kappa - 1)R^2 + \frac{R^4}{r^2} \right) \sin 2\varphi \end{aligned} \quad (26)$$

Это решение может быть получено из классического представления в форме Папковича-Нейбера, в котором векторный потенциал должен быть определен в следующем виде:

$$\begin{aligned}\Phi_r &= c_{21}r^{-1} + c_{41}r + (c_{51}r^{-1} + c_{71}r + c_{23}r^{-3})\cos 2\theta, \\ \Phi_\theta &= -(c_{51}r^{-1} + c_{71}r - c_{23}r^{-3})\sin 2\theta\end{aligned}\tag{27}$$

где $c_{21}, c_{41}, c_{51}, c_{71}, c_{23}$ – это константы, которые определяются из граничных условий задачи.

Решение (27) для компонент потенциала Φ может быть получено из общей записи (16), если в ней рассматривать только слагаемые в суммах при $n = 1$ и $n = 3$, а остальные слагаемые исключить, полагая равными нулю соответствующие константы. После использования стандартных тригонометрических преобразований и переобозначения констант можно получить (27).

Учитывая представление решения (15), в котором отдельно выделяется классическая и градиентная части поля перемещений, в решение для задачи Кирша в ГТУ включаем те же классические слагаемые, которые присутствуют в (27). Будем предполагать, что никаких других дополнительных классических составляющих в решении ГТУ не возникает. Для рассматриваемой задачи это предположение оказывается верным, так как оно позволяет удовлетворить всем граничным условиям. Однако, так бывает не всегда, и в некоторых задачах классическая часть поля перемещений в решении ГТУ может содержать дополнительные составляющие, которые не присутствуют в соответствующем решении классической теории упругости [25].

Градиентную часть поля перемещений определим с использованием двух введенных скалярных потенциалов (см. (15)). Для задания этих потенциалов оставим в рядах (19) только те слагаемые, которые соответствуют четности и периодичности классического решения (27). При этом также учтем, что задание однородного поля

напряжений на бесконечности требует исключения модифицированных функций Бесселя первого рода из (19). Тогда получим:

$$\begin{aligned}\psi &= b_{10} K_0\left(\frac{r}{l_1}\right) + b_{12} K_2\left(\frac{r}{l_1}\right) \cos 2\theta \\ \chi &= d_{12} K_2\left(\frac{r}{l_2}\right) \cos 2\theta\end{aligned}\tag{28}$$

где b_{10}, b_{12}, d_{12} – это дополнительные константы решения, которые должны определяться с учетом наличия расширенного набора граничных условий в ГТУ.

Выбранная запись для потенциалов (27), (28) содержит всего 8 констант. В постановке (25) присутствует 8 граничных условий, из которых два удовлетворяются тривиальным образом – на бесконечности моментные напряжения будут равны нулю, так как все градиентные составляющие решения затухают, что обеспечено выбором затухающих модифицированных функций Бесселя в (28). Для решения задачи необходимо учесть, что в решении присутствуют составляющие разной периодичности (осесимметричные и π -периодические), поэтому граничные условия относительно радиальной компоненты вектора перемещений будут распадаться на два отдельных уравнения. В итоге, в задаче будет присутствовать 8 независимых граничных условий для определения восьми констант: $c_{21}, c_{41}, c_{51}, c_{71}, c_{23}, b_{10}, b_{12}, d_{12}$. Для записи этих условий необходимо использовать выражения для потенциалов (27), (28) и определить перемещения в форме (15). Далее необходимо использовать стандартные соотношения в полярной системе координат для вычисления компонент тензора деформаций и тензора градиентов деформаций. Далее классические напряжения должны определяться на основе соотношений (7), а градиентные

напряжения – с использованием определяющих соотношений одной из упрощенных теорий (20)-(24). Запись граничных условий относительно вектора напряжений на границе отверстия может быть представлена через компоненты классических и градиентных напряжений в следующем виде (формулировку ГТУ в криволинейных системах координат см., например, в [22]):

$$r = R:$$

$$t_r = -\tau_{rr} + \frac{\partial \mu_{rrr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\mu_{rrr} - 3\mu_{r\theta\theta} - \mu_{\theta\theta r} + \frac{\partial \mu_{rr\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial \theta} \right) = 0,$$

$$t_\theta = -\tau_{r\theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\mu_{rr\theta} + 2\mu_{r\theta r} - 2\mu_{\theta\theta\theta} + \frac{\partial \mu_{r\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \mu_{\theta\theta r}}{\partial \theta} \right) = 0$$

Граничные условия для моментных напряжений имеют более простую структуру:

$$r = R:$$

$$m_r = \mu_{rrr} = 0,$$

$$m_\theta = \mu_{\theta rr} = 0$$

Граничные условия на бесконечности, с учетом затухания градиентных эффектов, могут быть записаны только относительно классических напряжений в следующем виде:

$$r \rightarrow \infty:$$

$$\tau_{rr} = \frac{\bar{t}}{2}(1 + \xi) + \frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi) \cos 2\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\bar{t}}{2}(1 - \xi) \sin 2\theta$$

При записи общего решения для дилатационной и для моментной теории упругости необходимо учитывать, что некоторые из граничных условий относительно градиентных напряжений будут удовлетворяться тривиальным

образом (вследствие их отсутствия в этих моделях), а соответствующие константы будут исключаться из структуры общего решения вследствие применения гипотез этих теорий. В частности, в дилатационной теории упругости следует считать, что тождественно равен нулю скалярный потенциал $\chi \equiv 0$, а в моментной – $\psi \equiv 0$.

В результате, решение задачи сводится к решению системы из 8 алгебраических уравнений, которое легко находится в замкнутом виде, но является достаточно громоздким и поэтому здесь не приводится. Это решение строилось в системе символьных вычислений Wolfram Mathematica.

В следующем разделе представлены примеры результатов расчетов и оценки изменения уровня концентрации напряжений τ_{ij} вблизи отверстий различного размера, которое прогнозируется различными упрощенными моделями ГТУ для различных случаев нагружения. Решение для напряжений при этом определяется путем подстановки найденных констант в потенциалы (27), (28), вычисления перемещений (15), деформаций и использования определяющих соотношений (7). Важно отметить, что форма решения в перемещениях для упрощенной теории Афантиса при этом полностью совпадает с той, которая ранее рассматривалась, например, в работе [5], что говорит о том, что предложенная форма записи общего решения (15) оказывается эквивалентной той, которая использовалась ранее в [8, 4, 5], и предполагала использование потенциалов, удовлетворяющих уравнениям четвертого порядка.

6. Результаты расчетов

Рассматриваем материал (оргстекло) с модулем упругости 3.2 ГПа и коэффициентом Пуассона 0.3. Все последующие результаты будут представлены в терминах параметров концентрации, поэтому значение модуля Юнга материала, вообще говоря, является не принципиальным. Распределение нормированных значений напряжений τ_{ij} / \bar{t} и деформаций $\hat{\varepsilon}_{ij} = E\varepsilon_{ij} / (\bar{t}(1 - \nu^2))$ определяется только коэффициентом Пуассона материала и отношения диаметра отверстия к масштабному параметру материала R/l .

В решениях ГТУ, так же как и в классическом решении для задачи Кирша, максимальные значения принимают нормальные напряжения $\tau_{\theta\theta}$ на границе отверстия в точке $\theta = \pi/2$ [29]. Максимальная концентрация этих напряжений в классическом решении при одноосном растяжении составляет 3, при двухосном 2, а при чистом сдвиге 4. Зависимость максимального уровня концентрации этих напряжений от нормированной величины радиуса отверстия, рассчитанная в ГТУ, представлена на рис. 1.

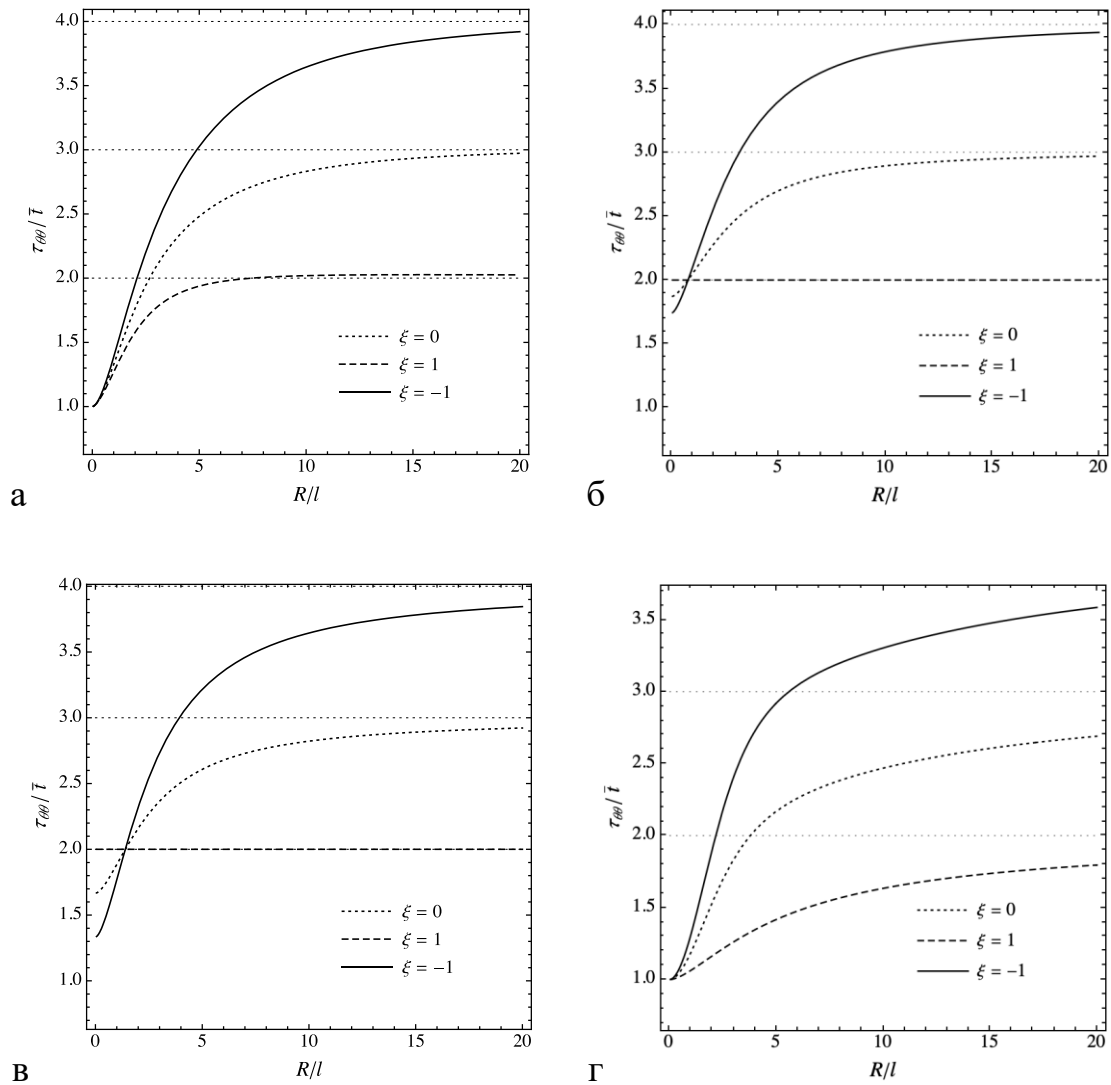


Рис. 1. Зависимость максимальной концентрации напряжений $\tau_{\theta\theta}$ от размера отверстия в упрощенной ГТУ (а), в моментной теории упругости (б), в дилатационной теории (в) и в полностью симметричной теории (г).

На рисунке 1 видно, что упрощенная (рис. 1а) и полностью симметричная (рис. 1г) теории прогнозируют снижение уровня концентрации во всех испытаниях, при этом в последней реализуется значительно более протяженный масштабный эффект, то есть неклассические уровни концентрации напряжений возникают даже вблизи относительно крупных отверстий. Наблюдение такого рода эффектов в

экспериментах позволит, в частности, сделать выбор между этими двумя теориями. Также заметим, что в указанных теориях для случая очень малых отверстий уровень концентрации выходит на единичное значение, то есть прогнозируется, что микроскопические отверстия, размер которых меньше масштабного параметра материала, не будут снижать прочности образца.

Спецификой дилатационной (рис. 1б) и моментной (рис. 1в) теорий является то, что при двухосном растяжении в этих теориях не возникает масштабного эффекта. Поэтому, если в эксперименте наблюдается присутствие размерных эффектов для уровня концентрации напряжений при сдвиге и растяжении образцов с отверстиями, но эти эффекты не возникают при двухосном растяжении, то это говорит о том, что рассматриваемый материал должен быть описан моделью типа дилатационной или моментной теории упругости. Выбор между этими двумя теориями может быть сделан с учетом реализующегося в них различного минимального уровня концентрации напряжений для малых отверстий. Обе теории прогнозируют, что даже для очень малых размеров отверстий на их границе будет реализовываться повышенный уровень напряжений по сравнению с заданной на бесконечности однородной нагрузкой. Снижение концентрации в дилатационной теории оказывается несколько более значительным, по сравнению с моментной теорией.

Для рассматриваемого модельного материала (оргстекло) более естественным может быть определение не момента разрушения с учетом максимальной концентрации напряжений, представленной на рис. 1, но момента начала образования пластических деформаций. Вариант такого описания экспериментов для металлических образцов с трещинами был представлен в работе [26]. В случае

возникновения пластических эффектов, целесообразно оценивать изменение уровня концентрации эквивалентных напряжений по Мизесу. Соответствующие результаты расчетов представлены на рис. 2.

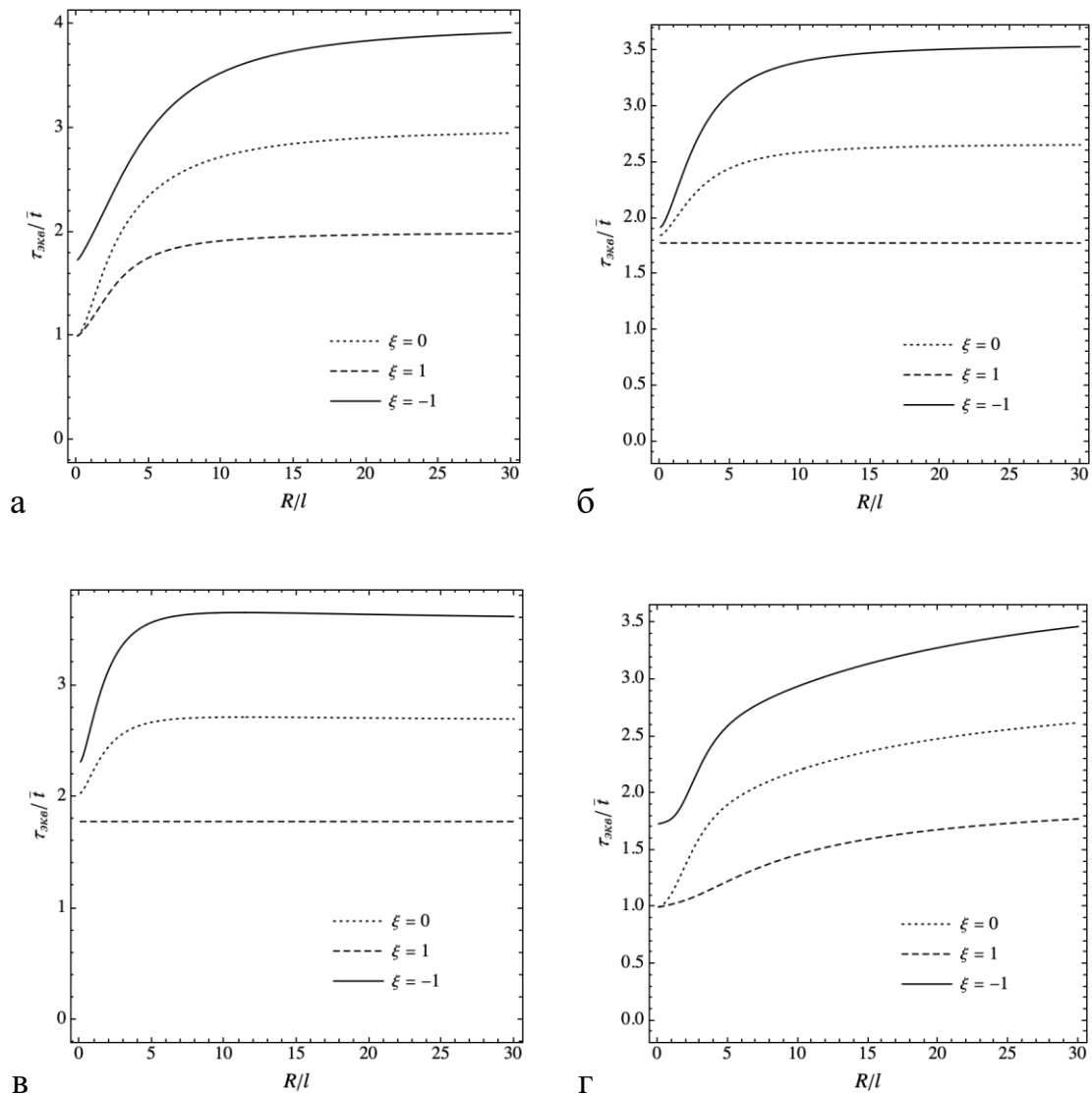


Рис. 2. Зависимость максимальной концентрации эквивалентных напряжений от размера отверстия в упрощенной ГТУ (а), в моментной теории упругости (б), в дилатационной теории (в) и в полностью симметричной теории (г).

В зависимостях на рис. 2 возникают аналогичные эффекты, как и на рис.1. В частности, упрощенная и полностью симметричная теория отличаются диапазоном реализующегося масштабного эффекта, а моментная и дилатационная теории не содержат размерной зависимости для случая двухосного растяжения. В дилатационной теории (рис. 2в) в отличие от других теорий реализуется наиболее короткий масштабный эффект для эквивалентных напряжений – только в области очень малых размеров отверстий.

Представленные зависимости на рис. 1,2 могут быть использованы для обработки результатов измерения разрушающих нагрузок образцов материалов, содержащих отверстия различного диаметра. На этих рисунках рассмотрен диапазон диаметров от 0.1 до 15 масштабных параметров, что в абсолютных значениях для рассматриваемого материала соответствует, приблизительно, диапазону от 0.02 до 2.7 мм, причем существенное влияние размера отверстий на уровень концентрации напряжений прогнозируется при диаметрах <1 мм.

Оценка начала образования пластических деформаций по диаграммам, получаемым в процессе макроскопических испытаний, может быть недостаточно чувствительным методом, для выявления размерных эффектов и дальнейшей идентификации масштабных параметров ГТУ. Альтернативным подходом может быть непосредственное измерение поля деформаций вблизи отверстий. Такие измерения в настоящее время могут быть выполнены с использованием метода корреляции цифровых изображений, для реализации которого на микроуровне необходимо использование микроскопии или, по крайней мере, техники макросъемки (см., например, [27]).

На рис. 3 и 4 представлен прогнозируемый характер распределения деформаций вблизи отверстий, который найден на основе различных упрощенных моделей ГТУ для условий одноосного растяжения (рис. 3) и сдвига (рис. 4). Рисунки представлены для компонент тензора деформаций в безразмерных декартовых координатах, нормированных на величину радиуса отверстия, который в решении ГТУ задавался равным двум масштабным параметрам (то есть диаметр отверстия равен $4l$). Классические решения для рассматриваемых задач представлены на рис. 3а и 4а. На остальных рисунках показаны прогнозы, которые дают упрощенные градиентные теории. Из представленных результатов видно, что поля деформаций вблизи отверстий значительно различаются, как между классическим решением и решениями ГТУ, так и между различными упрощенными градиентными моделями. При этом изменяется не только уровень максимальных и минимальных деформаций, но и характер их распределения. Наиболее сильные изменения возникают в решении полностью симметричной модели (рис. 3д, 4д), в которой возникает самый низкий уровень концентрации максимальных деформаций и специфические картины распределения полей. Минимальные изменения по сравнению с классическим решением дает дилатационная теория (рис. 3г, 4г), хотя и в этой теории уровень максимальных деформаций существенно отличается от классического.

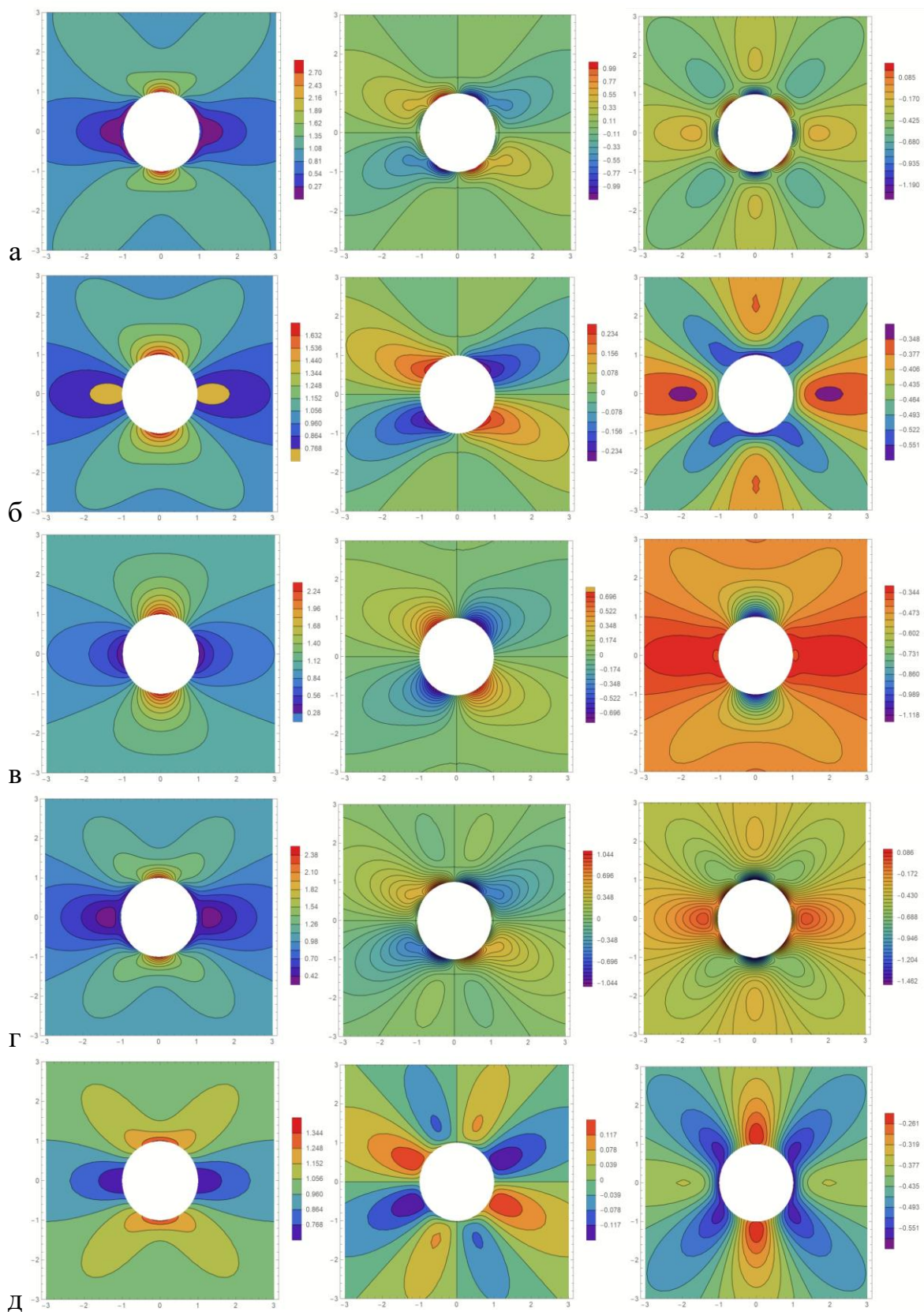


Рис. 3. Деформации $\hat{\epsilon}_{xx}$ (слева), $\hat{\epsilon}_{xy}$ (по центру), $\hat{\epsilon}_{yy}$ (справа), вблизи отверстия в классическом решении (а) и в упрощенной (б), в моментной (в), в дилатационной (г) и в полностью симметричной (д) ГТУ. Растяжение.

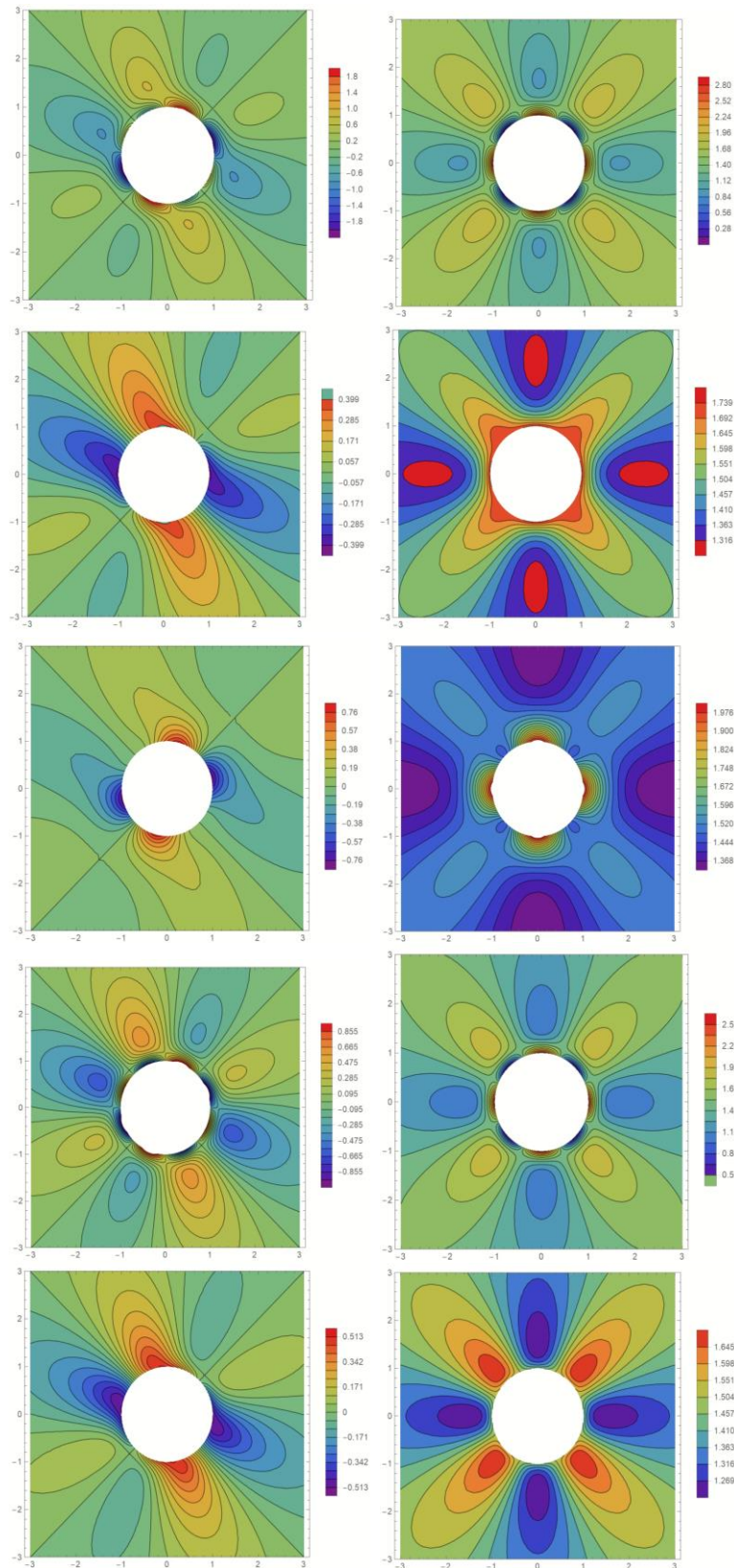


Рис. 4. Деформации $\hat{\varepsilon}_{xx}$ (слева) и $\hat{\varepsilon}_{yy}$ (справа), вблизи отверстия в классическом решении (а) и в упрощенной (б), в моментной (в), в дилатационной (г) и в полностью симметричной (д) ГТУ. Сдвиг под углом 45 градусов.

В целом, все представленные на рис. 3 и 4 решения ГТУ содержат более однородные поля деформаций вблизи отверстия, по сравнению с классическим решением, то есть с меньшими градиентами и большей протяженностью краевых эффектов. Прогнозируемый характер отклонения распределения деформаций от классического решения вполне может быть измерен экспериментально (при реализации этого отклонения). В частности, для уровня средних деформаций $\sim 0.3\%$, прогнозируемая максимальная концентрация, например, в упрощенной ГТУ при одноосном растяжении (рис. 3б), снижается почти в 2 раза по сравнению с классическим решением. То есть прогнозируемый уровень концентрации вблизи отверстия составляет $\sim 0.5\%$ вместо $\sim 0.9\%$. При этом прогнозируемая амплитуда изменения деформаций в рассматриваемой области, имеющей размер $\sim 1 \times 1$ мм, составляет $\sim 0.25\%$. Измерение такого уровня деформаций с достаточно высоким уровнем точности является вполне достижимой задачей при использовании современных методов бесконтактной тензометрии. Реализация такого рода измерений является задачей для будущей работы авторов.

Выводы

В работе представлены новые решения для задачи Кирша в рамках упрощенных моделей градиентной теории упругости. На основе предложенной формы записи общего решения построены аналитические решения для четырех вариантов упрощенных определяющих соотношений ГТУ, содержащих единственный дополнительный масштабный параметр. На основе проведенных расчетов показано, что идентификация варианта теории и масштабных параметров для конкретного

материала возможна путем проведения испытаний с образцами, содержащими отверстия различного размера вплоть до диаметров ~100 мкм.

Заметим, что важность решаемой задачи определяется не только возможностью уточненного описания прочности образцов, ослабленных малоразмерными отверстиями. Важность рассматриваемой задачи также заключается в том, что предлагаемый вид испытаний образцов с малоразмерными отверстиями является дополнительным подходом к проверке значений масштабных параметров ГТУ для конкретных типов материалов. Эти параметры, при описании прочности образцов с трещинами или любыми другими видами концентраторов, играют ключевую роль в оценке уровня разрушающих нагрузок в ГТУ. Поэтому разработка дополнительных методов идентификации масштабных параметров, помимо испытания образцов с трещинами [15-17], позволит, во-первых, проверить, что эти параметры являются материальными константами, не зависящими от вида нагружения и геометрии образцов, и, во-вторых, их идентифицированные значения могут быть использованы в расчетах для изделий с произвольной геометрией, содержащей другие виды концентраторов.

Список источников

1. Taylor D. The theory of critical distances // Engineering Fracture Mechanics, 2008, vol. 75, no. 7, pp. 1696-1705. DOI:[10.1016/j.engfracmech.2007.04.007](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.04.007)
2. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Построение и анализ точного аналитического решения задачи Кирша в рамках континуума и псевдоконтинуума Коссера // Прикладная механика и техническая физика. 2001. Т. 42. № 4. С. 145-154.

3. Бочкарев А.О., Греков М.А. Влияние поверхностных напряжений на жесткостные свойства и устойчивость нанопластины в задаче Кирша // Физическая мезомеханика. 2017. Т. 20. № 6. С. 62-76.
4. Eshel N.N., Rosenfeld G. Effects of strain-gradient on the stress-concentration at a cylindrical hole in a field of uniaxial tension // Journal of Engineering Mathematics, 1970, vol. 4, no. 2, pp. 97-111.
5. Khakalo S., Niiranen J. Gradient-elastic stress analysis near cylindrical holes in a plane under bi-axial tension fields // International Journal of Solids and Structures, 2017, vol. 110, pp. 351-366. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2016.10.025](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.10.025)
6. Kaloni P.N., Ariman T. Stress concentration effects in micropolar elasticity // Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, 1967, vol. 18, no. 1, pp. 136-141. DOI:[10.1007/BF01593904](https://doi.org/10.1007/BF01593904)
7. Dai M., Yang H.B., Schiavone P. Stress concentration around an elliptical hole with surface tension based on the original Gurtin-Murdoch model // Mechanics of Materials, 2019, vol. 135, pp. 144-148. DOI:[10.1016/j.mechmat.2019.05.009](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.05.009)
8. Mindlin R.D. Microstructure in linear elasticity // Columbia Univ New York Dept of Civil Engineering and Engineering Mechanics, 1963. DOI:[10.1007/BF00248490](https://doi.org/10.1007/BF00248490)
9. Polizzotto C. A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity // European Journal of Mechanics-A/Solids, 2017, vol. 61, pp. 92-109. DOI:[10.1016/j.euromechso1.2016.09.006](https://doi.org/10.1016/j.euromechso1.2016.09.006)
10. Askes H., Aifantis E. C. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and

- new results // International Journal of Solids and Structures, 2011, vol. 48, no. 13, pp. 1962-1990. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006)
11. Mindlin R. D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity // Columbia Univ New York, 1962, no. 11, pp. 415-448.
 12. Lurie S.A. et al. Dilatation gradient elasticity theory // European Journal of Mechanics-A/Solids, 2021, vol. 88, pp. 104258. DOI:[10.1016/j.euromechsol.2021.104258](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104258)
 13. Gusev A.A., Lurie S.A. Symmetry conditions in strain gradient elasticity // Mathematics and Mechanics of Solids, 2017, vol. 22, no. 4, pp. 683-691. DOI:[10.1177/1081286515606960](https://doi.org/10.1177/1081286515606960)
 14. Toupin R. Elastic materials with couple-stresses // Archive for rational mechanics and analysis, 1962, vol. 11, no.1, pp. 385-414. DOI:[10.1007/BF00253945](https://doi.org/10.1007/BF00253945)
 15. Askes H., Susmel L. Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? // Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures, 2015, vol. 38, no. 2, pp. 154-160. DOI:[10.1111/ffe.12183](https://doi.org/10.1111/ffe.12183)
 16. Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А. Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабнo-зависимой обобщенной теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 4. С. 5-12. DOI: [10.24411/1683-805X-2018-14001](https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-14001)
 17. Васильев В.В., Лурье С.А. Новый метод исследования прочности хрупких тел с трещинами // Деформация и разрушение материалов. 2019. № 9. С. 12-19.
 18. Sciarra G., Vidoli S. Asymptotic fracture modes in strain-gradient elasticity: Size effects and characteristic lengths for isotropic materials // Journal of Elasticity, 2013, vol. 113, no. 1, pp. 27-53. DOI:[10.1007/s10659-012-9409-y](https://doi.org/10.1007/s10659-012-9409-y)

19. Morel S., Dourado N. Size effect in quasibrittle failure: Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model // International Journal of Solids and Structures, 2011, vol. 48, no. 10, pp. 1403-1412. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2011.01.014](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.01.014)
20. Bažant Z.P., Yu Q. Universal size effect law and effect of crack depth on quasi-brittle structure strength // Journal of engineering mechanics, 2009, vol. 135, no. 2, pp. 78-84. DOI:[10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2009\)135:2\(78\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:2(78))
21. Lurie S. et al. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity: applications to composite materials // International Journal of Engineering Science, 2011, vol. 49, no. 12, pp. 1517-1525. DOI:[10.1016/j.ijengsci.2011.05.001](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.05.001)
22. Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity // European Journal of Mechanics-A/Solids, 2019, vol. 78, pp. 103853. DOI:[10.1016/j.euromechsol.2019.103853](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103853)
23. Morse P.M., Feshbach H. Methods of theoretical physics // American Journal of Physics, 1954, vol. 22, no. 6, pp. 410-413.
24. Zieliński A.P. On trial functions applied in the generalized Trefftz method // Advances in Engineering Software, 1995, vol. 24(1–3), pp.147-155. DOI:[10.1016/0965-9978\(95\)00066-6](https://doi.org/10.1016/0965-9978(95)00066-6)
25. Ломакин Е.В. и др. Концентрация напряжений вблизи жестких цилиндрических включений в условиях антиплоского сдвига // Доклады Российской академии наук. Физика. Технические науки. 2020. Т. 495. № 1. С. 50-56. DOI: [10.31857/S2686740020060139](https://doi.org/10.31857/S2686740020060139)
26. Васильев В.В., Лурье С.А., Салов В.А. Определение нагрузки, вызывающей появление пластической деформации в растягиваемой пластине с трещиной //

Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 4. С. 43-49.

DOI: [10.31857/S0572329920040133](https://doi.org/10.31857/S0572329920040133)

27. Solyaev Y., Babaytsev A. Direct observation of plastic shear strain concentration in the thick GLARE laminates under bending loading // *Composites Part B: Engineering*, 2021, vol. 224, pp. 109145. DOI:[10.1016/j.compositesb.2021.109145](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2021.109145)

28. Лурье С.А., Дудченко А.А., Нгуен Д.К. Градиентная модель термоупругости для слоистой композитной структуры // *Труды МАИ*. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49674>

29. Ендогур А.И., Кравцов В.А. Напряженное состояние композиционной панели в зоне отверстия // *Труды МАИ*. 2013. № 64. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=36558>

References

1. Taylor D. The theory of critical distances, *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, vol. 75, no. 7, pp. 1696-1705. DOI:[10.1016/j.engfracmech.2007.04.007](https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2007.04.007)

2. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2001, vol. 42, no. 4, pp. 145-154.

3. Bochkarev A.O., Grekov M.A. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2017, vol. 20, no. 6, pp. 62-76.

4. Eshel N.N., Rosenfeld G. Effects of strain-gradient on the stress-concentration at a cylindrical hole in a field of uniaxial tension, *Journal of Engineering Mathematics*, 1970, vol. 4, no. 2, pp. 97-111.

5. Khakalo S., Niiranen J. Gradient-elastic stress analysis near cylindrical holes in a plane under bi-axial tension fields, *International Journal of Solids and Structures*, 2017, vol. 110, pp. 351-366. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2016.10.025](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.10.025)
6. Kaloni P.N., Ariman T. Stress concentration effects in micropolar elasticity, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1967, vol. 18, no. 1, pp. 136-141. DOI:[10.1007/BF01593904](https://doi.org/10.1007/BF01593904)
7. Dai M., Yang H.B., Schiavone P. Stress concentration around an elliptical hole with surface tension based on the original Gurtin-Murdoch model, *Mechanics of Materials*, 2019, vol. 135, pp. 144-148. DOI:[10.1016/j.mechmat.2019.05.009](https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2019.05.009)
8. Mindlin R.D. Microstructure in linear elasticity, *Columbia Univ New York Dept of Civil Engineering and Engineering Mechanics*, 1963. DOI:[10.1007/BF00248490](https://doi.org/10.1007/BF00248490)
9. Polizzotto C. A hierarchy of simplified constitutive models within isotropic strain gradient elasticity, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2017, vol. 61, pp. 92-109. DOI:[10.1016/j.euromechsol.2016.09.006](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.09.006)
10. Askes H., Aifantis E. C. Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results, *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, no. 13, pp. 1962-1990. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.03.006)
11. Mindlin R. D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity, *Columbia Univ New York*, 1962, no. 11, pp. 415-448.
12. Lurie S.A. et al. Dilatation gradient elasticity theory, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2021, vol. 88, pp. 104258. DOI:[10.1016/j.euromechsol.2021.104258](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2021.104258)

13. Gusev A.A., Lurie S.A. Symmetry conditions in strain gradient elasticity, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 2017, vol. 22, no. 4, pp. 683-691. DOI:[10.1177/1081286515606960](https://doi.org/10.1177/1081286515606960)
14. Toupin R. Elastic materials with couple-stresses, *Archive for rational mechanics and analysis*, 1962, vol. 11, no.1, pp. 385-414. DOI:[10.1007/BF00253945](https://doi.org/10.1007/BF00253945)
15. Askes H., Susmel L. Understanding cracked materials: is linear elastic fracture mechanics obsolete? *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 2015, vol. 38, no. 2, pp. 154-160. DOI:[10.1111/ffe.12183](https://doi.org/10.1111/ffe.12183)
16. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A., Salov V.A. *Fizicheskaya mezomekhanika*, 2018, vol. 21, no. 4, pp. 5-12. DOI: [10.24411/1683-805X-2018-14001](https://doi.org/10.24411/1683-805X-2018-14001)
17. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A. *Deformatsiya i razrushenie materialov*, 2019, no. 9, pp. 12-19.
18. Sciarra G., Vidoli S. Asymptotic fracture modes in strain-gradient elasticity: Size effects and characteristic lengths for isotropic materials, *Journal of Elasticity*, 2013, vol. 113, no. 1, pp. 27-53. DOI:[10.1007/s10659-012-9409-y](https://doi.org/10.1007/s10659-012-9409-y)
19. Morel S., Dourado N. Size effect in quasibrittle failure: Analytical model and numerical simulations using cohesive zone model, *International Journal of Solids and Structures*, 2011, vol. 48, no. 10, pp. 1403-1412. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2011.01.014](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.01.014)
20. Bažant Z.P., Yu Q. Universal size effect law and effect of crack depth on quasi-brittle structure strength, *Journal of engineering mechanics*, 2009, vol. 135, no. 2, pp. 78-84. DOI:[10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2009\)135:2\(78\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2009)135:2(78))

21. Lurie S. et al. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity: applications to composite materials, *International Journal of Engineering Science*, 2011, vol. 49, no. 12, pp. 1517-1525. DOI:[10.1016/j.ijengsci.2011.05.001](https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2011.05.001)
22. Solyaev Y., Lurie S., Korolenko V. Three-phase model of particulate composites in second gradient elasticity, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 2019, vol. 78, pp. 103853. DOI:[10.1016/j.euromechsol.2019.103853](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103853)
23. Morse P.M., Feshbach H. Methods of theoretical physics, *American Journal of Physics*, 1954, vol. 22, no. 6, pp. 410-413.
24. Zieliński A.P. On trial functions applied in the generalized Trefftz method, *Advances in Engineering Software*, 1995, vol. 24(1–3), pp.147-155. DOI:[10.1016/0965-9978\(95\)00066-6](https://doi.org/10.1016/0965-9978(95)00066-6)
25. Lomakin E.V. et al. *Doklady Rossiiskoi akademii nauk. Fizika, tekhnicheskie nauki*, 2020, vol. 495, no. 1, pp. 50-56. DOI: [10.31857/S2686740020060139](https://doi.org/10.31857/S2686740020060139)
26. Vasil'ev V.V., Lur'e S.A., Salov V.A. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2020, no. 4, pp. 43-49. DOI: [10.31857/S0572329920040133](https://doi.org/10.31857/S0572329920040133)
27. Solyaev Y., Babaytsev A. Direct observation of plastic shear strain concentration in the thick GLARE laminates under bending loading, *Composites Part B: Engineering*, 2021, vol. 224, pp. 109145. DOI:[10.1016/j.compositesb.2021.109145](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2021.109145)
28. Lur'e S.A., Dudchenko A.A., Nguen D.K. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49674>
29. Endogur A.I., Kravtsov V.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 64. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=36558>

Статья поступила в редакцию 18.10.2021; одобрена после рецензирования 27.10.2021; принята к публикации 21.12.2021.

The article was submitted on 18.10.2021; approved after reviewing on 27.10.2021; accepted for publication on 21.12.2021.