УДК 536.2

Температурное поле двухфазного пористого материала с поглощающими проникающее излучение включениями в виде шарового слоя*

А.В. Аттетков, К.А. Гайдаенко, А.В. Котович

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, 105005, Россия
e-mail: fn2@bmstu.ru, kseniyagaydaenko@gmail.com

DOI: 10.34759/tpt-2021-13-5-220-225

Поступила в редакцию 30.04.2021
После доработки 20.05.2021
Принята к публикации 21.05.2021

Предложена математическая модель процесса теплопереноса в двухфазном пористом материале с поглощающими проникающее излучение включениями в виде шарового слоя. С использование разработанного интегрального преобразования по пространственному переменному в аналитически замкнутом виде найдено решение смешанной задачи для системы уравнений в частных производных второго порядка параболического типа, представленной рассматриваемой математической моделью.

Ключевые слова: двухфазный материал, лазерное излучение, поглощающие включения в виде шарового слоя, температурное поле, интегральное преобразование.

Введение

В проблеме лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов важное место занимает «микроочаговая модель» процесса теплопереноса в двухфазном материале с поглощающими проникающее излучение сферическими включениями [1–3]. Известны трудности, возникающие при нахождении аналитического решения соответствующей задачи нестационарной теплопроводности даже в простейшей ситуации наличия в прозрачном для излучения материале одного поглощающего включения сферической формы [4]. Возможный путь их преодоления связан с принятием разного рода допущений, приводящих к замене исходной математической модели ее упрощенными аналогами [4]. Дальнейшее развитие эти исследования получили в [5], где в качестве объекта исследований рассмотрен изотропный материал с термически тонким поглощающим включением в виде шарового слоя.

Цель проведенных исследований – разработка математической модели и аналитического метода исследования процессов теплопереноса в двухфазном пористом материале с поглощающими проникающее излучение включениями в виде шарового слоя.

Исходная математическая модель и ее преобразование

В качестве объекта исследований рассматривается изотропный материал (фаза «s»), содержащий включения (фаза «h») радиуса R_1 в виде шарового слоя шириной $\Delta = R_1 - 1$ (регулярная ячеистая схема). Шаровая полость единичного радиуса заполнена газом (фаза «g») с постоянной температурной, равной начальной температуре объекта исследований. На изотропный материал воздействует поток излуче-

* Материалы статьи основаны на докладе, сделанном на XXII Школе-семинаре молодых ученых и специалистов под руководством академика А.И. Леонтьева «Проблемы газодинамики и тепломассообмена в энергетических установках», 20–24 мая 2021 г., г. Новосибирск.

ния с плотностью мощности f, для которого он абсолютно прозрачен, но может поглощаться шаровым слоем.

В предположении, что тепловой контакт в анализируемой системе является идеальным, и с учетом ранее полученных результатов [5] математическую модель процесса формирования температурного поля объекта исследований можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\chi\left[\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}+\Lambda f(\rho,\mathrm{Fo})\right],$$

$$1<\rho<R_1,\ \ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},\ R_1<\rho<R_2,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\theta(\rho,0)=0; \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=1}=\Lambda\mathrm{Bi}\,\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=1};$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R_1-0}=\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R_1+0};$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1-0}=\Lambda\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1+0};$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_2}=0;$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge0}\in L^2_{\rho^2}[1,R_2];\ f(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge0}\in L^2[1,R_1];$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{1\le\rho\le R_2}\in L^2[0,+\infty);$$

$$f(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{1\le\rho\le R_1}\in L^2[0,+\infty).$$

В математической модели (1) использованы следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\mathrm{Fo}=\frac{a_s t}{r_0^2};\ \ \rho=\frac{r}{r_0};\ \ \theta=\frac{T-T_0}{T_*-T_0};$$

$$R_1=\frac{r_0+\tilde{\Delta}}{r_0};\ \ R_2=\frac{r_2}{r_0};$$

$$\chi=\frac{a_h}{a_s};\ \ \Lambda=\frac{\lambda_s}{\lambda_h};$$

$$\mathrm{Bi}=\frac{\alpha r_0}{\lambda_s};\ \ f=\frac{q r_0}{\lambda_s(T_*-T_0)}.$$

Далее полагаем

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\triangleq\rho\theta(\rho,\mathrm{Fo});\ \ \varphi(\rho,\mathrm{Fo})\triangleq\chi\Lambda\rho f(\rho,\mathrm{Fo}) \tag{2}$$

и, согласно (1), (2), приходим к математической модели для определения функции $V(\rho,\mathrm{Fo})$:

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\chi\frac{\partial^2V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2}+\varphi(\rho,\mathrm{Fo}),$$

$$1<\rho<R_1,\ \ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho^2},\ R_1<\rho<R_2,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$V(\rho,0)=0; \tag{3}$$

$$\left.\left[\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}-(\Lambda\mathrm{Bi}+1)V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\right|_{\rho=1}=0;$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R_1-0}=V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R_1+0};$$

$$\left.\left[\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}-V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\right|_{\rho=R_1-0}=$$

$$=\Lambda\left.\left[\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}-V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\right|_{\rho=R_1+0};$$

$$\left.\left[\rho\frac{\partial V(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}-V(\rho,\mathrm{Fo})\right]\right|_{\rho=R_2}=0;$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge0}\in L^2[1,R_2];\ \varphi(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge0}\in L^2[1,R_1];$$

$$V(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{1\le\rho\le R_2}\in L^2[0,+\infty);$$

$$\varphi(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{1\le\rho\le R_1}\in L^2[0,+\infty).$$

Математическая модель (3) представляет собой смешанную задачу для системы уравнений в частных производных второго порядка параболического типа. Для решения данной задачи обратимся к конечному интегральному преобразованию для двуслойной области, применяемому по пространственному переменному $\rho\in[1,R_2]$.

Интегральное преобразование по пространственному переменному ρ

Согласно общей теории интегральных преобразований [6], в рассматриваемом случае весовая функция $\gamma(\rho)$ искомого интегрального преобразования

$$\gamma(\rho)=\left\{\begin{matrix}\chi^{-1},\ 1<\rho<R_1\\ 1,\ R_1<\rho<R_2\end{matrix}\right\}, \tag{4}$$

а его ядро $K(\eta_n,\rho)$ и спектр собственных значений $\{\eta_n\}_{n\ge1}$ определяются из решения краевой задачи:

$$\frac{d^2K(\eta_n,\rho)}{d\rho^2}+\frac{\eta_n^2}{\chi}K(\eta_n,\rho)=0,\ 1<\rho<R_1; \quad (5)$$

$$\frac{d^2K(\eta_n,\rho)}{d\rho^2}+\eta_n^2K(\eta_n,\rho)=0,\ R_1<\rho<R_2; \quad (6)$$

$$\left[\rho\frac{dK(\eta_n,\rho)}{d\rho}-(\Lambda\mathrm{Bi}+1)K(\eta_n,\rho)\right]\Bigg|_{\rho=1}=0; \quad (7)$$

$$K(\eta_n,\rho)\big|_{\rho=R_1-0}=K(\eta_n,\rho)\big|_{\rho=R_1+0}; \quad (8)$$

$$\left[\rho\frac{dK(\eta_n,\rho)}{d\rho}-K(\eta_n,\rho)\right]\Bigg|_{\rho=R_1-0}= =\Lambda\left[\rho\frac{dK(\eta_n,\rho)}{d\rho}-K(\eta_n,\rho)\right]\Bigg|_{\rho=R_1+0}; \quad (9)$$

$$\left[\rho\frac{dK(\eta_n,\rho)}{d\rho}-K(\eta_n,\rho)\right]\Bigg|_{\rho=R_2}=0. \quad (10)$$

Общие решения уравнений (5), (6) могут быть найдены стандартными методами:

$$K(\eta_n,\rho)\big|_{1<\rho<R_1}=c_1(\eta_n)\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-\rho)\right]+ +c_2(\eta_n)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-\rho)\right]; \quad (11)$$

$$K(\eta_n,\rho)\big|_{R_1<\rho<R_2}=c_3(\eta_n)\cos\left[\eta_n(\rho-R_1)\right]+ +c_4(\eta_n)\sin\left[\eta_n(\rho-R_1)\right], \quad (12)$$

и, согласно представлениям (11), (12) ядра интегрального преобразования, условиям сопряжения (8), (9) и однородным краевым условиям (7), (10), должны выполняться равенства:

$$c_2(\eta_n)=g(\eta_n)c_1(\eta_n);\ c_3(\eta_n)=c_1(\eta_n); \quad c_4(\eta_n)=\mu(\eta_n)c_1(\eta_n), \quad (13)$$

где

$$g(\eta_n)=\left\{\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-1)\right]- -(\Lambda\mathrm{Bi}+1)\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-1)\right]\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-1)\right]+ +(\Lambda\mathrm{Bi}+1)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-1)\right]\right\}^{-1};$$

$$\mu(\eta_n)= =\left\{\eta_nR_2\sin\left[\eta_n(R_2-R_1)\right]+\cos\left[\eta_n(R_2-R_1)\right]\right\}\times \quad (14)$$

$$\times\left\{\eta_nR_2\cos\left[\eta_n(R_2-R_1)\right]+\sin\left[\eta_n(R_2-R_1)\right]\right\}^{-1}.$$

Процедура определения ядра искомого интегрального преобразования завершается, согласно (11)–(14), идентификацией спектра его собственных значений $\{\eta_n\}_{n\ge1}$ и нахождением коэффициентов $c_1(\eta_n)$.

Для идентификации спектра собственных значений достаточно воспользоваться представлениями (11), (12) ядра $K(\eta_n,\rho)$ интегрального преобразования, условиями сопряжения (8), (9) и равенствами (13). В результате приходим к уравнению:

$$\Lambda-1=R_1\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}g(\eta_n)+\Lambda\mu(\eta_n)\right]. \quad (15)$$

$c_1(\eta_n)$ является коэффициентом пропорциональности для ядра искомого интегрального преобразования, что непосредственно следует из представленных равенствами (11)–(13) результатов. При этом, согласно общей теории интегральных преобразований [6], ядро $K(\eta_n,\rho)$ должно удовлетворять условиям нормировки с весовой функцией $\gamma(\rho)$, определенной равенством (4). В результате, с учетом равенств (11)–(13), приходим к цепочке равенств:

$$1\equiv\|K(\eta_n,\rho)\|^2=\int_1^{R_2}\gamma(\rho)K^2(\eta_n,\rho)d\rho=$$

$$=c_1^2(\eta_n)\left\{\frac{1}{\chi}\int_1^{R_1}\left(\cos\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-\rho)\right]+ +g(\eta_n)\sin\left[\frac{\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-\rho)\right]\right)^2d\rho+\right.$$

$$\left.+\int_{R_1}^{R_2}\left(\cos\left[\eta_n(\rho-R_1)\right]+\mu(\eta_n)\sin\left[\eta_n(\rho-R_1)\right]\right)^2d\rho\right\},$$

воспользовавшись которой и определяем нормирующий множитель

$$c_1(\eta_n) = \left\{ \frac{R_1-1}{2\chi}\left[1+g^2(\eta_n)\right] + \right.$$

$$+\frac{1}{4\eta_n\sqrt{\chi}}\left[1-g^2(\eta_n)\right]\sin\left[\frac{2\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-1)\right]+$$

$$+\frac{g(\eta_n)}{\eta_n\sqrt{\chi}}\sin^2\left[\frac{2\eta_n}{\sqrt{\chi}}(R_1-1)\right]+\frac{R_1-R_2}{2}\left[1+\mu^2(\eta_n)\right]+ \quad (16)$$

$$+\frac{1}{4\eta_n}\left[1-\mu^2(\eta_n)\right]\sin\left[2\eta_n(R_2-R_1)\right]+$$

$$\left. +\frac{\mu(\eta_n)}{\eta_n}\sin^2\left[\eta_n(R_2-R_1)\right]\right\}^{-1/2}.$$

Таким образом, ядро $K(\eta_n,\rho)$ искомого интегрального преобразования полностью определено равенствами (11)–(14), (16), спектр его собственных значений $\{\eta_n\}_{n\geq 1}$ – уравнением (15) и равенствами (14), весовая функция $\gamma(\rho)$ – равенством (4).

Температурное поле

Функция $\theta(\rho,\text{Fo}), \rho\in[1,R_2], \text{Fo}\geq 0$, определяющая температурное поле двухфазного пористого материала, согласно первому равенству в (2) имеет вид

$$\theta(\rho,\text{Fo}) = \rho^{-1}V(\rho,\text{Fo}),$$

где функция $V(\rho,\text{Fo})$ – решение смешанной задачи, представленной математической моделью (3). Применив к данной модели разработанное интегральное преобразование и полагая

$$w_n(\text{Fo}) \triangleq \int_1^{R_2} V(\rho,\text{Fo})\,\gamma(\rho)K(\eta_n,\rho)d\rho;$$

$$\Phi_n(\text{Fo}) \triangleq \int_1^{R_2}\varphi(\rho,\text{Fo})\left\{J(R_1-\rho)-J(1-\rho)\right\}\times$$

$$\times\gamma(\rho)K(\eta_n,\rho)d\rho \equiv \quad (17)$$

$$\equiv \Lambda\int_1^{R_1} f(\rho,\text{Fo})\rho K(\eta_n,\rho)d\rho,$$

где $J(\cdot)$ – единичная функция, приходим к задаче Коши относительно изображения $w_n(\text{Fo})$ оригинала $V(\rho,\text{Fo})$:

$$\frac{dw_n(\text{Fo})}{d\text{Fo}}+\eta_n^2 w_n(\text{Fo}) = \Phi_n(\text{Fo}),\ \ \text{Fo}>0; \quad (18)$$

$$w_n(0)=0.$$

Решение задачи Коши (18) находится стандартными методами:

$$w_n(\text{Fo}) = \int_0^{\text{Fo}} \Phi_n(\tau)\exp\left[-\eta_n^2(\text{Fo}-\tau)\right]d\tau, \quad (19)$$

$$\text{Fo}\geq 0.$$

Таким образом, согласно общей теории интегральных преобразований [6], решение смешанной задачи, представленной математической моделью (3), определяется как

$$V(\rho,\text{Fo}) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\text{Fo})K(\eta_n,\rho),$$

$$1\leq\rho\leq R_2,\ \ \text{Fo}\geq 0,$$

где изображение $w_n(\text{Fo})$ определено равенствами (17), (19).

Заключение

Применение разработанного интегрального преобразования по пространственному переменному позволяет представить искомое температурное поле двухфазного пористого материала с поглощающими проникающее излучение включениями в аналитически замкнутом виде.

При проведении параметрического анализа температурного поля могут возникать значимые технические трудности, обусловленные сложным характером зависимости реализуемого интегрального преобразования от параметров исходной модели. В связи с этим целесообразно, рассматривая исходную математическую модель как базовую, разработать иерархию ее упрощенных аналогов с последующей идентификацией диапазона возможного применения каждого из них.

Список обозначений

a – температуропроводность, м^2/с;
r – радиус, м;
t – время, с;
T – температура, К;
T_* – масштабная температура, К;
α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м^2·К);
λ – теплопроводность, Вт/(м·К).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Буркина Р.С., Морозова Е.Ю., Ципилев В.П.** Инициирование реакционно-способного вещества потоком излучения при его поглощении оптическими неоднородностями вещества // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. № 5. С. 95–105.
2. **Адуев Б.П., Ананьева М.В., Звеков А.А., Каленский А.В., Кригер В.Г., Никитин А.П.** Микроочаговая модель лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов с учетом плавления // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. № 6. С. 92–99.
3. **Каленский А.В., Звеков А.А., Никитин А.П.** Микроочаговая модель с учетом зависимости коэффициента эффективности поглощения лазерного импульса от температуры // Химическая физика. 2017. Т. 36. № 4. С. 43–49.
4. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Температурное поле прозрачного для излучения твердого тела с поглощающим сферическим включением // Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. №5–6. С. 256–264.
5. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Процессы теплопереноса в твердом деле с поглощающим проникающее излучением включением в виде шарового слоя // Тепловые процессы в технике. 2020. Т. 12. № 1. С. 18–24.
6. **Волков И.К., Канатников А.Н.** Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. 228 с.

Temperature field of a two-phase porous material with penetrating radiation absorbing inclusions in the form of ball layer

A.V. Attetkov, K.A. Gaydaenko, A.V. Kotovich

Bauman Moscow State Technical University
(National Research University),
Moscow, 105005, Russia
e-mail: fn2@bmstu.ru, kseniyagaydaenko@gmail.com

The "micro-focal model" of the heat transfer process in the two-phase material with spherical inclusions absorbing penetrating radiation occupies an important place in the studies on the problem of laser initiation of explosive decomposition in energy materials. Absorbing inclusions in the form of a ball layer represent theoretical and meaningful practical interest while studying heat transfer processes in the material transparent to radiations. There are well-known difficulties occurring while searching for analytical solution to the corresponding problem for the parabolic type second order partial differential system, even in the simplest situation of the ball layer thermal insulation. They are being aggravated if it is necessary to account for the inter-phase thermal exchange impact on the temperature field of the two-phase material. It was noted, that analytical solution to the problem under consideration employing Laplace integral transform over temporal variable in its image space was not associated with significant difficulties, but subsequent transition herewith to the originals space of the integral transformation being used was rather problematic.

To overcome the originated difficulties the work suggests the other option of the analytical solution to the problem under consideration. Applying the theory of general integral transformations, the finite integral transformation was developed over the spatial variable for the two-layer area, its core, eigenvalues spectrum and weight function were identified. The obtained results were employed to find analytically closed solution of the problem, represented by the mathematical model under study of heat transfer in the radiation transparent two-phase porous material with absorbing inclusions in the form of the ball layer.

The presented results demonstrate that while performing parametric analysis of the studied temperature field, significant technical difficulties stipulated by the complex nature of the dependence of the core and the eigenvalues spectrum of the developed integral transformation on the parameters of the original model may arise. It is advisable, in this regard, to develop hierarchy of simplified analogues, using the initial model as a basic one, with further determination of the range of possible application of each.

Keywords: two-phase material, laser radiation, absorbing inclusions in the form of ball layer, temperature field, integral transformation.

REFERENCES

1. **Burkina R.S., Morozova E.Y., Tsipilev V.P.** Initiation of a reactive material by a radiation beam absorbed by optical heterogeneities of the material. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 581–590.
2. **Aduev B.P., Anan'eva M.V., Zvekov A.A., Kalenskii A.V., Kriger V.G., Nikitin A.P.** Miro-hotspot model for the laser initiation of explosive decomposition of energetic materials with melting taken into account. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 704–710.
3. **Kalensky A.V., Zvekov A.A., Nikitin A.P**. Mikrochagovaya model' s uchetom zavisimosti koeffitsienta effektivnosti pogloshheniya lazernogo impul'sa ot temperatury [Micro-focal model taking into account the dependence of the efficiency coefficient of a laser pulse absorption on temperature]. *Khimicheskaya fizika – Chemical Physics,* 2017, vol. 36, no. 4, pp. 43–49. In Russ.
4. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Temperaturnoe pole prozrachnogo dlya izlucheniya tverdogo tela s pogloshhayushhim sfericheskim vklyucheniem [Temperature field of transparent for radiation solid with absorbing spherical inclusion]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2018, vol. 10, no. 5–6, pp. 256–264. In Russ.
5. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Protsessy teploperenosa v tverdom tele s pogloshhayushhim pronikayushhee izluchenie vklyucheniem v vide sharovogo sloya [Heat transfer processes in a solid with an inclusion, absorbing penetrating radiation, as a spherical layer]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineerin*4g, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 18–24. In Russ. DOI 10.34759/tpt-2020-12-1-18-2
6. **Volkov I.K., Kanatnikov A.N.** *Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoe* ischislenie [Integral transformations and operational calculus]. Moscow: Publishing house Bauman, 2015. 228 p. In Russ.