

Научная статья
УДК 539.31
DOI: [10.34759/trd-2023-131-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-05)

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА ТОНКОГО ИЗОТРОПНОГО СФЕРИЧЕСКОГО ПОЯСА

Варвара Николаевна Зуськова¹, Анатолий Сергеевич Оконечников²,

Дмитрий Олегович Сердюк^{3✉}

^{1,2,3}Московский авиационный институт (национально исследовательский университет), Москва, Россия

¹varvarazuskova@gmail.com

²oas.mai@mail.ru

³d.serduk55@gmail.com[✉]

Аннотация. В осесимметричной постановке исследована нестационарная динамика тонкого сферического пояса с произвольными граничными условиями при воздействии подвижной нестационарной нагрузки. Материал пояса упругий и изотропный. В качестве математической модели сферического пояса приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. Подход к исследованию основан на принципе суперпозиции, методе функции Грина и методе компенсирующих нагрузок. Суть заключается в связи искомого решения с действующей и компенсирующими нагрузками при помощи интегральных операторов типа свертки по координате и времени. Ядром этих операторов является функция Грина для сферической оболочки,

которая представляет собой нормальное перемещение в ответ на воздействие единичной сосредоточенной по координате и времени нагрузки, математически описываемой дельта-функцией Дирака. Компенсирующее решение есть результат влияния некоторых специально вычисленных нагрузок, при котором сумма решений от действующей нагрузки и компенсирующих нагрузок удовлетворяет граничным условиям на торцах сферического пояса.

Ключевые слова: нестационарная динамика, компенсирующие нагрузки, функция Грина, сферический пояс, сферическая оболочка

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 23-21-00189

Для цитирования: Зуськова В.Н., Оконечников А.С., Сердюк Д.О. Нестационарная динамика тонкого изотропного сферического пояса // Труды МАИ. 2023. № 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-05)

Original article

TRANSIENT DYNAMICS OF A THIN ISOTROPIC SPHERICAL BELT

Varvara N. Zuskova¹, Anatoly S. Okonechnikov², Dmitry O. Serdyuk^{3✉}

^{1,2,3}Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

¹varvarazuskova@gmail.com

²oas.mai@mail.ru

³d.serduk55@gmail.com✉

Abstract. Thin-walled spherical shells are common structural elements in various industries, such as aircraft, rocket and mechanical engineering. When designing the corresponding structural elements, one of the topical issues is the calculations of structures operating in non-stationary interaction modes. Such calculations are complex and time-consuming, since in such problems the desired solution is significantly heterogeneous in spatial coordinates and time. In an axisymmetric formulation, the study of the transient dynamics of a thin spherical belt with emission boundary conditions under the influence of a moving transient load. The belt material is elastic and isotropic. The Kirchhoff-Love hypothesis was implemented in the qualitative mathematical model of the spherical scenario. An approach to research based on the principle of superposition, the Green's function method and the method of compensating influence. The essence of the results is in connection with the desired solution with the acting and compensating load using integral operations such as convolution in coordinate and time. Being this operation, is the Green's function for spherical exploitation, which is the normal displacement in response to the core, random focusing on the load coordinate and time, mathematically described by the Dirac delta function. The compensation solution is the result of studying some specially calculated values, at which decisions are made from the acting load and the compensating sensation, satisfying the boundary conditions at the ends of the spherical belt. An example of calculating the unsteady dynamics of a spherical belt is given. The results for transient functions of normal displacements, angles of turns and bending moments are presented in the form of graphs. The method of compensating loads applied in the work allows us to

study the transient dynamics of a spherical belt with intermediate axisymmetric supports, as well as spherical segments.

Keywords: transitional dynamics, compensating load, Green's function, spherical layer, spherical shell

Funding: this work was supported by a grant from the Russian Science Foundation, projects № 23-21-00189

For citation: Zuskova V.N., Okonechnikov A.S., Serdyuk D.O. Transient dynamics of a thin isotropic spherical belt. *Trudy MAI*, 2023, no. 131. DOI: [10.34759/trd-2023-131-05](https://doi.org/10.34759/trd-2023-131-05)

Введение

Тонкостенные сферические оболочки являются распространенными элементами конструкций в различных отраслях промышленности, таких как авиастроение, ракетостроение и машиностроение. При проектировании соответствующих конструктивных элементов одними из актуальных вопросов являются расчеты конструкций, работающих в условиях нестационарных режимов взаимодействия. Подобные расчеты сложны и трудоемки, поскольку в таких задачах искомое решение существенно неоднородно по пространственным координатам и времени.

По динамике оболочек, в том числе нестационарной, существует большое количество публикаций. В работе [1] представлено исследование динамического асимметричного поведения зажатых слоистых композитных колпачков, подвергающихся приложенным нагрузкам. Решение реализовано методом конечных

элементов (МКЭ) с использованием теории гибкости при сдвиге. Метод КЭ представлен восьмиугольным четырехугольно двояко искривленным сдвиговым гибким элементом оболочки на основе подхода согласованности поля. В [2], [3] исследуются статические и динамические реакции анизотропных сферических оболочек на динамическую нагрузку с помощью аналитического решения для ассиметричного анализа переходных характеристик. В [4] изучалась динамическая реакция слоистых ортотропных сферических оболочек на осесимметричную динамическую нагрузку. Полученные уравнения движения решаются численным методом (численное интегрирование). В статье [5] исследовано поведение функционально градиентных сферических крышек при внезапно приложенных нагрузках. Получено решение методом конечного элемента при использовании осесимметричного изогнутого элемента оболочки, основанного на подходе согласованности полей. В статье [6] анализируются хаотические колебания детерминированных геометрически нелинейных упругих сферических и конических осесимметричных оболочек неоднородной толщины, материал которых представлен анизотропным. Для решения данной задачи использовался численный метод, основанный на интегрально-интерполяционных уравнениях в пространственных координатах и разработана конечно-разностная схема по временной координате. В данной работе не учитываются касательные силы инерции к усредненной поверхности и инерция вращения поперечного сечения. В [7] рассматривается статическое и динамическое изгибание полярных ортотропных антисимметрично слоистых, умеренно толстых пологих сферических оболочек при равномерно распределенной нагрузке. Было получено аналитическое решение уравнения

движения для оболочек, подвергающихся большим деформациям, с помощью метода Чебышёва дискретизации по координате и схемы Хоуболта для дискретизации по времени. В статье [8] исследуются реакции ортотропных армированных оболочек при динамическом нагружении. Здесь были использованы математические модели в рамках теории типа Кирхгофа-Лява. Математическая модель представлена системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение данного уравнения было получено с помощью численного решения неявной схемы Рунге-Кутты. В работе [9] получено уточненное аналитическое решение напряженного состояния в полой сферической оболочке с круговым жестким включением, нагруженным тангенциальными или поперечными усилиями. Математическая модель была основана на гипотезе теории оболочек Тимошенко. В [10] представлены результаты численного решения нелинейной краевой задачи о влиянии вида нагружения, геометрических параметров и характеристик материала на изгиб и устойчивость сферических оболочек. В статье [11] представлен аналитический алгоритм решения краевых задач для оболочек, локально нагруженных по площадкам, границы которых не совпадают с их линиями главных кривизн. В [12], [13] получено численное решение расчета напряженно-деформированного состояния изотропных сферических оболочек с использованием уточненной теории. Математическая модель основана на трехмерном уравнении теории упругости. Полученные дифференциальные уравнения решаются численным методом конечных разностей и матричной прогонки. В статье [14] построены нестационарные фундаментальные решения для круговой цилиндрической оболочки постоянной толщиной. Материал оболочки упругий и ортотропный, с симметрией относительно срединной поверхности.

В настоящей статье рассматривается нестационарная динамика тонкого сферического пояса с произвольными граничными условиями при воздействии подвижной нестационарной нагрузки. В качестве математической модели сферического пояса приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. Материал принят упругим и изотропным.

Основная цель исследования заключается в построении новой и универсальной по отношению к граничным условиям нестационарной функции осесимметричных нормальных перемещений для сферического пояса при воздействии подвижной нестационарной нагрузки.

1. Постановка задачи

Объектом исследования является тонкий сферический пояс (сферический слой, незамкнутая сферическая оболочка) постоянной толщины h , радиусом R и высотой H , описываемый моделью сферической оболочки по гипотезам Кирхгофа-Лява. Материал оболочки упругий и изотропный. Движение оболочки рассматривается в полярной системе координат $Or\beta$, $\beta \in (0, \pi)$. На боковую поверхность сферического пояса действует нестационарная нагрузка $P(\beta, t)$ с переменной во времени амплитудой и координатой воздействия. В начальный момент времени $t = 0$ сферический пояс находится в невозмущенном состоянии. На торцах сферического пояса рассмотрено три варианта граничных условий: скользящая заделка двух торцов, свободное опирание двух торцов, скользящая заделка и свободно опертый торец (см. рис. 1).

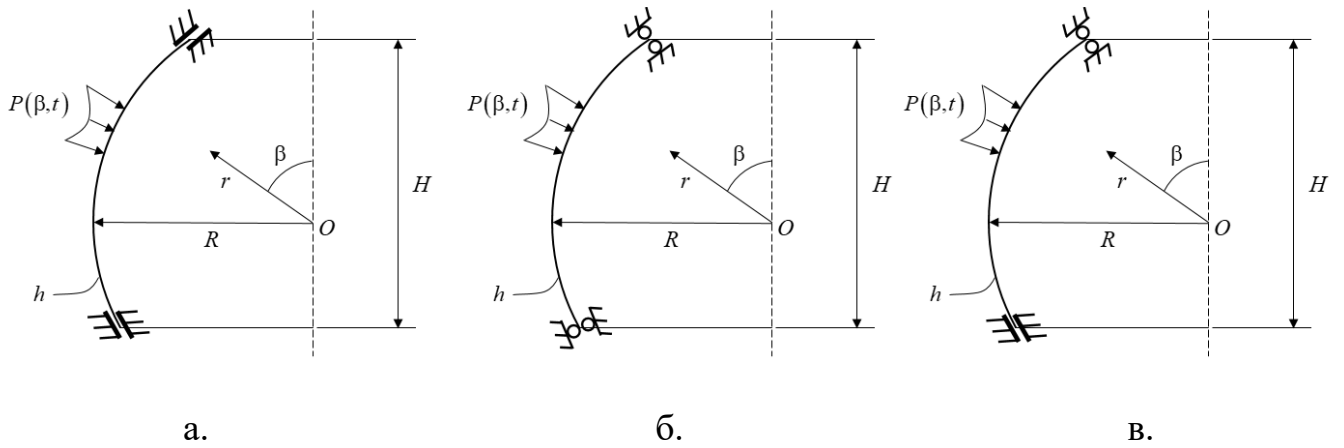


Рис. 1. Сферический пояс: а - скользящая заделка двух торцов; б - свободное опирание двух торцов; в - скользящая заделка и свободно опертый торец

Постановка задачи включает в себя безразмерные осесимметричные уравнения движения в перемещениях упругой сферической оболочки Кирхгофа-Лява, нулевые начальные и граничные условия [15], [16].

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \tau^2} &= K_{11}(u_\beta) + K_{12}(w), \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= K_{21}(u_\beta) + K_{22}(w) + P, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} K_{11}(u_\beta) &= \frac{\partial^2 u_\beta}{\partial \beta^2} + \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} - (\operatorname{ctg}^2 \beta + C_2) u_\beta, \\ K_{12}(w) &= 2C_1 \frac{\partial w}{\partial \beta}, \quad K_{21}(u_\beta) = -2C_1 \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + u_\beta \operatorname{ctg} \beta \right), \\ K_{22}(w) &= \frac{1}{12} k^2 \left[-\frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} \operatorname{ctg} \beta + (\operatorname{ctg}^2 \beta - 2C_1) \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \right. \\ &\quad \left. - (\operatorname{ctg}^2 \beta + C_3) \operatorname{ctg} \beta \frac{\partial w}{\partial \beta} \right] - 4C_1 \left(1 + \frac{1}{12} k^2 \right) w. \end{aligned} \quad (2)$$

Безразмерные параметры, входящие в (1), (2) (штрихами обозначены размерные параметры) следующие:

$$u_{\beta} = \frac{u_{\beta}'}{L}, w = \frac{w'}{L}, \tau = \frac{c_* t}{L}, P = \frac{P'L}{\rho h c_*^2}, c_* = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},$$

$$C_1 = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu}, C_2 = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, C_3 = \frac{5\lambda + 8\mu}{\lambda + 2\mu}, k = \frac{h}{R}, L = R. \quad (3)$$

В (1) - (3) w – нормальное перемещение, u_{β} – тангенциальное перемещение, τ – безразмерное время; P – нестационарная нагрузка; k – коэффициент отношения толщины к радиусу оболочки, c_* – характерная скорость распространения возмущений, λ, μ – параметры Ламе изотропного материала, L – характерный линейный размер.

Граничные условия:

- скользящая заделка

$$w|_{\beta=a_1} = \frac{\partial w}{\partial \beta} \Big|_{\beta=a_1} = 0, w|_{\beta=a_2} = \frac{\partial w}{\partial \beta} \Big|_{\beta=a_2} = 0;$$

- свободное опирание

$$w|_{\beta=a_1} = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=a_1} = 0, w|_{\beta=a_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=a_2} = 0;$$

- скользящая заделка и свободное опирание

$$w|_{\beta=a_1} = \frac{\partial w}{\partial \beta} \Big|_{\beta=a_1} = 0, w|_{\beta=a_2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=a_2} = 0.$$

В общем виде граничные условия для представленных трех случаев можно представить следующим образом:

$$w|_{\beta=a_i} = \frac{\partial^j w}{\partial \beta^j} \Big|_{\beta=a_i} = 0, \quad (4)$$

где $a_i, i=1,2$ – координаты торцов сферического пояса по углу β , $j=1,2$ – порядок производной.

В рассмотренных условиях закрепления отсутствуют ограничения на тангенциальные перемещения u_β , что приводит к следующим граничным условиям:

$$\frac{\partial u_\beta(\beta, \tau)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0, \pi} = 0.$$

Начальные условия:

$$w|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad u_\beta|_{\tau=0} = \frac{\partial u_\beta}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Решение начально-краевой задачи (1) – (5) построено с применением функции Грина для сферической оболочки и метода компенсирующих нагрузок [17], [18] как сумма основного и компенсирующего решения:

$$w(\beta, \tau) = G_w(\beta, \xi, \tau) ** P(\beta, \tau) + \sum_{n=1}^2 [G_w(\beta, \xi, \tau) ** Q_n(\beta, \tau) + G_w(\beta, \xi, \tau) ** F_n(\beta, \tau)]. \quad (6)$$

Под основным решением понимается нестационарный нормальный прогиб сферической оболочки от действия внешней нагрузки, под компенсирующим решением понимается нестационарный нормальный прогиб сферической оболочки от действия компенсирующих нагрузок. В (6) символ «*» обозначает интегральный оператор свертки по координате β и времени τ , $G_w(\beta, \xi, \tau)$ – функция Грина нормальных перемещений для сферической оболочки в осесимметричной

постановке, ξ – координата действия импульсной нагрузки, Q_n, F_n – специально вычисленные компенсирующие нагрузки, при которых сумма основного и компенсирующего решения удовлетворяет граничным условиям на торцах сферического пояса.

2. Функция Грина для сферической оболочки

Постановка задачи о функции Грина для замкнутой сферической оболочки в соответствии с соотношениями (1) – (5) следующая:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_u}{\partial \tau^2} &= K_{11}(G_u) + K_{12}(G_w), \\ \frac{\partial^2 G_w}{\partial \tau^2} &= K_{21}(G_u) + K_{22}(G_w) + \delta(\beta - \xi)\delta(\tau), \\ G_u|_{\tau=0} &= \frac{\partial G_u}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = G_w|_{\tau=0} = \frac{\partial G_w}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Здесь $G_u = G_u(\beta, \xi, \tau)$ – функция Грина для тангенциальных перемещений, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, дифференциальные операторы имеют вид (2), где функции u_β, w следует заменить на G_u, G_w соответственно.

Граничные условия в задаче (7) состоят в требовании ограниченности решения в полюсах оболочки $\beta = 0, \beta = \pi$.

Для решения задачи (7) используем интегральное преобразование Лапласа по времени τ и разложение функций $G_w(\beta, \xi, \tau)$ и $\delta(\beta - \xi)$ в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\cos\beta)$, а функцию $G_u(\beta, \xi, \tau)$ по полиномам Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta)$, которые связаны между собой [19]:

$$\frac{dP_n(\cos\beta)}{d\beta} = -\sin\beta C_{n-1}^{3/2}(\cos\beta).\tag{8}$$

Упомянутые выше ряды имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 G_w(\beta, \xi, \tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{wn}(\xi, \tau) P_n(\cos \beta), \\
 G_u(\beta, \xi, \tau) &= -\sin \beta \sum_{n=1}^{\infty} G_{un}(\xi, \tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos \beta), \\
 \delta(\beta - \xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\xi) P_n(\cos \beta),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\delta_n(\xi) = \frac{2n+1}{2} \int_0^{\pi} \delta(\beta - \xi) P_n(\cos \beta) \sin \beta d\beta = \frac{2n+1}{2} P_n(\cos \xi) \sin \xi.$$

Выполнив подстановку (9) в уравнения движения из (7) и используя известные соотношения для полиномов Лежандра и Гегенбауэра с учетом (8), а также проведя интегральное преобразование Лапласа по времени τ , получим систему уравнений относительно изображений функций Грина в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned}
 G_{un}^L(\xi, s)(s^2 - a_{11}) - G_{wn}^L(\xi, s)a_{12} &= 0, \\
 -G_{un}^L(\xi, s)a_{21} + G_{wn}^L(\xi, \tau)(s^2 - a_{22}) &= \delta_n(\xi),
 \end{aligned} \tag{10}$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= (1 - n(n+1) - C_2), \quad a_{12} = 2C_1, \quad a_{21} = 2C_1 n(n+1), \\
 a_{22} &= \left(\frac{1}{12} k^2 n(n+1)(C_3 - n(n+1) - 1) - 4C_1 \left(1 + \frac{1}{12} k^2 \right) \right).
 \end{aligned}$$

В (10) верхний индекс L означает преобразование по Лапласу, s – параметр преобразования Лапласа.

Решение системы (10) относительно функций Грина приводит к результату:

$$G_{wn}^L(\xi, s) = \delta_n(\xi) \frac{s^2 + \Lambda_1(n)}{s^4 + \Lambda_2(n)s^2 + \Lambda_3(n)}, \quad G_{un}^L(\xi, s) = \delta_n(\xi) \frac{a_{12}}{s^4 + \Lambda_2(n)s^2 + \Lambda_3(n)}, \quad (11)$$

$$\Lambda_1(n) = -a_{11}, \quad \Lambda_2(n) = -a_{11} - a_{22}, \quad \Lambda_3(n) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Вид оригинала функции Грина $G_{wn}^L(\xi, s)$ зависит от характера нулей знаменателя в (11). На характер нулей влияет значение коэффициента ряда n .

Так при $n = 0$ корни знаменателя (11) имеют вид:

$$s_{1,2} = \pm\alpha_0, \quad s_{3,4} = \pm i\beta_0,$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{-\Lambda_2(0) + \sqrt{D}}{2}}, \quad \beta_0 = \sqrt{\frac{\Lambda_2(0) + \sqrt{D}}{2}}, \quad D = \Lambda_2(0)^2 - 4\Lambda_3(0) > 0, \quad (12)$$

$$\Lambda_1(0) = C_2 - 1, \quad \Lambda_2(0) = \Lambda_1(0) + r, \quad \Lambda_3(0) = r\Lambda_1(0), \quad r = 4C_1 \left(1 + \frac{1}{12}k^2\right),$$

так как $\sqrt{D} > \Lambda_2(n)$, что хорошо видно при обратной подстановке C_i из (3).

Соотношение для $G_{w0}^L(\xi, s)$ с учетом (12) следующее:

$$G_{w0}^L(\xi, s) = \delta_0(\xi) \frac{1}{s^2 + r},$$

а оригинал функции $G_{w0}^L(\xi, s)$ с учетом того, что $r > 0$, принимает вид

$$G_{w0}(\xi, \tau) = \delta_0(\xi) \frac{\sin(\sqrt{r} \tau)}{\sqrt{r}}. \quad (13)$$

При $n = 1$ корни знаменателя (11) при обратной подстановке C_i из (3) имеют вид

$$s_1 = s_2 = \alpha_1, \quad s_{3,4} = \pm i\beta_1, \quad \alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = \sqrt{3\Lambda_1(1)}, \quad \Lambda_1(1) = \frac{3\hat{\lambda} + 2\mu}{2(\hat{\lambda} + \mu)} > 0. \quad (14)$$

Соотношение для $G_{w1}^L(\xi, s)$ с учетом (14) следующее:

$$G_{w1}^L(\xi, s) = \delta_1(\xi) \frac{s^2 + \Lambda_1(1)}{s^4 + 3\Lambda_1(1)s^2}.$$

Оригинал представленной функции имеет вид [20]:

$$G_{w1}(\xi, \tau) = \frac{1}{3} \delta_1(\xi) \left(\tau + \frac{2 \sin\left(\sqrt{3\Lambda_1(1)} \tau\right)}{\sqrt{3\Lambda_1(1)}} \right). \quad (15)$$

При $n > 1$ корни s_k биквадратного уравнения знаменателя (12) следующие:

$$s_{1,2} = \pm i\alpha_n, \quad s_{3,4} = \pm i\beta_n, \quad (16)$$

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{\Lambda_2(n) - \sqrt{D(n)}}{2}}, \quad \beta_n = \sqrt{\frac{\Lambda_2(n) + \sqrt{D(n)}}{2}}, \quad D = \Lambda_2^2(n) - 4\Lambda_3(n) > 0,$$

так как $\sqrt{D} < \Lambda_2(n)$. Вид корней (16) позволяет записать знаменатель функции

$G_{wn}^L(\xi, s)$ в виде:

$$s^4 + \Lambda_2(n)s^2 + \Lambda_3(n) = \prod_{k=1}^4 (s - s_k) = (s - i\alpha_n)(s + i\alpha_n)(s - i\beta_n)(s + i\beta_n). \quad (17)$$

Для построения оригинала функции $G_{wn}^L(\xi, s)$ воспользуемся второй теоремой разложения для преобразования Лапласа

$$G_{wn}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^4 A_k e^{s_k \tau}, \quad A_k = (s - s_k) G_{wn}^L(\xi, s_k), \quad (18)$$

где соотношения для A_k с учетом (17) примут вид:

$$A_1 = \delta_n(\xi) \frac{\alpha_n^2 - \Lambda_1(n)}{2i(\alpha_n^3 - \alpha_n \beta_n^2)}, \quad A_3 = \delta_n(\xi) \frac{\beta_n^2 - \Lambda_1(n)}{2i(\beta_n^3 - \beta_n \alpha_n^2)}, \quad (19)$$

$$A_2 = -A_1, \quad A_4 = -A_3.$$

Выполнив подстановку (19) в (18), получим оригинал функции Грина $G_{wn}(\xi, \tau)$ при $n > 1$:

$$G_{wn}(\xi, \tau) = \delta_n(\xi)(f_1 \sin(\alpha_n \tau) + f_2 \sin(\beta_n \tau)),$$

$$f_1 = \frac{\alpha_n^2 - \Lambda_1(n)}{\alpha_n^3 - \alpha_n \beta_n^2}, \quad f_2 = \frac{\beta_n^2 - \Lambda_1(n)}{\beta_n^3 - \beta_n \alpha_n^2}. \quad (20)$$

Подставив (13), (15) и (20) в (9), получим оригинал функции Грина для нормального прогиба сферической оболочки Кирхгофа–Лява в осесимметричной постановке:

$$G_w(\beta, \xi, \tau) = \delta_0(\xi) \frac{\sin(\sqrt{r} \tau)}{\sqrt{r}} P_0(\cos \beta) + \frac{1}{3} \delta_1(\xi) \left(\tau + \frac{2 \sin(\sqrt{3\Lambda_1(1)} \tau)}{\sqrt{3\Lambda_1(1)}} \right) P_1(\cos \beta) +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \delta_n(\xi) (f_1 \sin(\alpha_n \tau) + f_2 \sin(\beta_n \tau)) P_n(\cos \beta). \quad (21)$$

При проведении расчетов ряд из (21) заменяется конечной суммой.

3. Нестационарные функции нормальных перемещений

Для выполнения граничных условий (4) на торцах сферического пояса введем сосредоточенные компенсирующие нагрузки Q_n, F_n следующего вида (количество компенсирующих нагрузок равно числу граничных условий):

$$Q_i(\beta, \tau) = q_i(\tau) H(\tau) \delta(\beta - a_i),$$

$$F_i(\beta, \tau) = f_i(\tau) H(\tau) \delta(\beta - (a_i - \gamma)), \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Здесь $q_i(\tau), f_i(\tau)$ – амплитуды компенсирующих нагрузок, $H(\tau)$ – функция Хэвисайда, $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, a_i – координаты действия нагрузок Q_i (совпадают с координатами торцов сферического пояса a_i по углу β), $a_i - \gamma$, $\gamma = const$ – координаты действия нагрузок F_i . Расчетная схема метода компенсирующих нагрузок представлена на рис. 2.

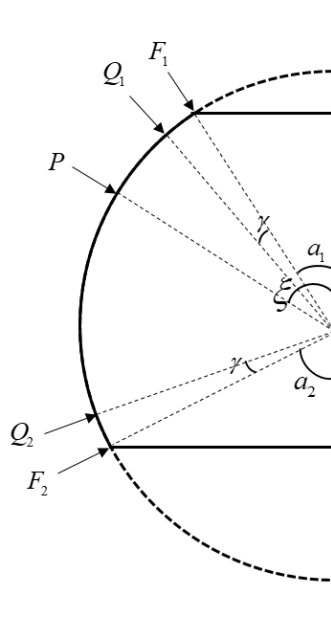


Рис. 2. Расчетная схема метода компенсирующих нагрузок

В качестве действующей нагрузки рассмотрен вариант воздействия осесимметричной подвижной по координате β нагрузки следующего вида:

$$P(\beta, \tau) = A(\tau)H(\tau)\delta(\beta - S(\tau)), \quad S(\tau) = \xi + v(\tau), \quad (23)$$

где: $A(\tau)$ – закон изменения амплитуды нагрузки, $H(t)$ – функция Хэвисайда, ξ – координата по β действия нагрузки в начальный момент времени, $v(\tau)$ – закон изменения скорости по координате β .

Функция нестационарного нормального перемещения сферического пояса (6) с учетом (22) и (23) примет вид:

$$w(\beta, \tau) = \int_0^{\tau} G_w(\beta, \xi + v(t), \tau - t)A(t)dt + \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^{\tau} G_w(\beta, a_i, \tau - t)q_i(t)dt + \int_0^{\tau} G_w(\beta, a_i - \gamma, \tau - t)f_i(t)dt \right]. \quad (24)$$

Расчет амплитуд компенсирующих нагрузок выполняется из системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с разностным ядром, получаемой в результате подстановки (24) в граничные условия (4):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\tau} G_w(a_i, \xi + v(t), \tau - t) A(t) dt + \\
 & \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^{\tau} G_w(a_r, a_i, \tau - t) q_i(t) dt + \int_0^{\tau} G_w(a_r, a_i - \gamma, \tau - t) f_i(t) dt \right] = 0, \quad r = \overline{1, 2}, \\
 & \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(a_r, \xi + v(t), \tau - t) A(t) dt + \\
 & \sum_{i=1}^2 \left[\int_0^{\tau} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(a_r, a_i, \tau - t) q_i(t) dt + \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(a_r, a_i - \gamma, \tau - t) f_i(t) dt \right] = 0, \quad r = \overline{1, 2},
 \end{aligned} \tag{25}$$

Решение системы интегральных уравнений (25) относительно функций $q_i(t), f_i(t)$ построено с применением метода дискретизации этих функций по времени τ на l равных отрезков ($l \geq 1$) длительностью $\Delta_\tau = \frac{T}{l}$: $\tau \leftrightarrow \{\tau_c = c\Delta_\tau : \Delta_\tau = T/l, c = 1, 2, \dots, l\}$, где T – конечный момент времени. В предположении, что функции $q_i(t), f_i(t)$ остаются постоянными на каждом временном интервале $[\tau_{c-1}, \tau_c]$, система уравнений (25) на каждом шаге по времени принимает вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^2 \left[q_{ic} \int_{\tau_{c-1}}^{\tau_c} G_w(a_r, a_i, \tau_c - t) dt + f_{ic} \int_{\tau_{c-1}}^{\tau_c} G_w(a_r, a_i - \gamma, \tau_c - t) dt \right] = \\
& = - \int_0^{\tau} G_w(a_r, \xi + v(t), \tau - t) A(t) dt - D_r, \quad r = \overline{1, 2}, \\
& \sum_{n=1}^2 \left[q_{ic} \int_{\tau_{c-1}}^{\tau_c} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(a_r, a_i, \tau_c - t) dt + f_{ic} \int_{\tau_{c-1}}^{\tau_c} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(a_r, a_i - \gamma, \tau_c - t) dt \right] = \\
& = - \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(a_r, \xi + v(t), \tau - t) A(t) dt - H_r, \quad r = \overline{1, 2}.
\end{aligned} \tag{26}$$

В (26) q_{ic}, f_{ic} – значения компенсирующих нагрузок в текущий отрезок времени, D_r, H_r – добавочные части (числа), учитывающие историю изменения значений компенсирующих нагрузок во времени. При $c=1$ добавочные части нулевые (поскольку истории изменения компенсирующих нагрузок еще нет), а при $c > 1$ принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
D_r &= \sum_{k=1}^{c-1} \sum_{i=1}^2 \left[q_{ik} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} G_w(a_r, a_i, \tau_c - t) dt + f_{ik} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} G_w(a_r, a_i - \gamma, \tau_c - t) dt \right], \\
H_r &= \sum_{k=1}^{c-1} \sum_{i=1}^2 \left[q_{ik} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(a_r, a_i, \tau_c - t) dt + f_{ik} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(a_r, a_i - \gamma, \tau_c - t) dt \right].
\end{aligned} \tag{27}$$

В (27) q_{ik}, f_{ik} – значения компенсирующих нагрузок в предыдущий отрезок времени.

Среди интегралов, входящих в (26) у компенсирующих нагрузок q_{ic}, f_{ic} имеем следующие структуры подынтегральных функций (здесь $t_1 = \tau_{c-1}, t_2 = \tau_c$):

$$\int_{t_1}^{t_2} G_w(\beta, \xi, t_2 - t) dt, \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(\beta, \xi, t_2 - t) dt. \tag{28}$$

Структура функции Грина (21) позволяет взять интегралы (28) аналитически:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} G_w(\beta, \xi, t_2 - t) dt &= -Y_1 P_0(\cos(\beta)) - K_1 P_1(\cos(\beta)) - \sum_{n=2}^R P_n(\cos(\beta)) U_1, \\
\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial G_w}{\partial \beta}(\beta, \xi, t_2 - t) dt &= -K_1 \frac{\partial P_1(\cos(\beta))}{\partial \beta} - \sum_{n=2}^R \frac{\partial P_n(\cos(\beta))}{\partial \beta} U_1, \\
\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 G_w}{\partial \beta^2}(\beta, \xi, t_2 - t) dt &= -K_1 \frac{\partial^2 P_1(\cos(\beta))}{\partial \beta^2} - \sum_{n=2}^R \frac{\partial^2 P_n(\cos(\beta))}{\partial \beta^2} U_1,
\end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{\delta_0}{r} \left(\cos(\sqrt{r} k_1) - 1 \right), \\
K_1 &= \frac{\delta_1}{18\Lambda_1(1)} \left(4 \left(\cos(\sqrt{3\Lambda_1(1)} k_1) - 1 \right) - 3\Lambda_1(1) k_1^2 \right), \\
U_1 &= \frac{\delta}{\alpha \varphi} \left(f_2 \alpha (\cos(\varphi k_1) - 1) + f_1 \varphi (\cos(\alpha k_1) - 1) \right), \\
k_1 &= t_2 - t_1.
\end{aligned}$$

Среди интегралов, входящих в (27), у компенсирующих нагрузок q_{ik} , f_{ik} имеем следующие структуры подынтегральных функций (здесь $t_1 = \tau_{k-1}$, $t_2 = \tau_k$, $t_3 = \tau_c$):

$$\int_{t_1}^{t_2} G_w(\beta, \xi, t_3 - t) dt, \quad \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j}(\beta, \xi, t_3 - t) dt. \tag{30}$$

Структура функции Грина (21) позволяет взять интегралы (30) аналитически:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} G_w(\beta, \xi, t_3 - t) dt &= -Y_2 P_0(\cos(\beta)) - K_2 P_1(\cos(\beta)) - \sum_{n=2}^R P_n(\cos(\beta)) U_2, \\
\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial G_w}{\partial \beta}(\beta, \xi, t_3 - t) dt &= -K_2 \frac{\partial P_1(\cos(\beta))}{\partial \beta} - \sum_{n=2}^R \frac{\partial P_n(\cos(\beta))}{\partial \beta} U_2, \\
\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial^2 G_w}{\partial \beta^2}(\beta, \xi, t_3 - t) dt &= -K_2 \frac{\partial^2 P_1(\cos(\beta))}{\partial \beta^2} - \sum_{n=2}^R \frac{\partial^2 P_n(\cos(\beta))}{\partial \beta^2} U_2,
\end{aligned} \tag{31}$$

где

$$\begin{aligned}
Y_2 &= -\frac{\delta_0}{r} \left(\cos(\sqrt{r}k_2) - \cos(\sqrt{r}k_3) \right), \\
K_2 &= \frac{\delta_1}{18\Lambda_1(1)} \left(4 \left(\cos(\sqrt{3\Lambda_1(1)k_2}) - \cos(\sqrt{3\Lambda_1(1)k_3}) \right) - 3k_1(k_2 + k_3)\Lambda_1(1) \right), \\
U_2 &= \frac{\delta}{\alpha\varphi} \left(\alpha f_2 \left(\cos(\varphi k_2) - \cos(\varphi k_3) \right) + \varphi f_1 \left(\cos(\alpha k_2) - \cos(\alpha k_3) \right) \right), \\
k_1 &= t_2 - t_1, \quad k_2 = t_3 - t_1, \quad k_3 = t_3 - t_2.
\end{aligned}$$

Интегралы от действующей нагрузки в (26) взяты численно с применением квадратурных формул метода прямоугольников:

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau G_w(\beta, \xi + v(t), \tau - t) A(t) dt &= \frac{\tau}{m} \sum_{k=0}^{m-1} G_w \left(\beta, \xi + v \left(\frac{\tau}{m} k \right), \tau - \frac{\tau}{m} k \right) A \left(\frac{\tau}{m} k \right), \\
\int_0^\tau \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j} (a_i, \xi + v(t), \tau - t) A(t) dt &= \frac{\tau}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^j G_w}{\partial \beta^j} \left(\beta, \xi + v \left(\frac{\tau}{m} k \right), \tau - \frac{\tau}{m} k \right) A \left(\frac{\tau}{m} k \right).
\end{aligned} \quad (32)$$

Подстановка (27), (29) и (31) в (26) приводит к системе s линейных уравнений с s неизвестными, где неизвестными являются компенсирующие нагрузки q_{ic}, f_{ic} , а коэффициенты при них – результаты взятия интегралов (29). Правые части этих уравнений – результаты взятия интегралов (31) и интегралов от действующей нагрузки. Решение этой системы l раз (на каждом отрезке времени Δ_τ) приводит к расчету значений компенсирующих нагрузок q_{ic}, f_{ic} для каждого момента времени Δ_τ с учетом истории их изменения на более ранних промежутках времени. В результате, нестационарная функция нормальных перемещений для тонкого упругого сферического пояса примет вид:

$$\begin{aligned}
w(\beta, T) &= \int_0^T G_w(\beta, \xi + v(t), T - t) A(t) dt + \\
&+ \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^2 \left[q_{ik} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} G_w(\beta, a_i, T - t) dt + f_{ik} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} G_w(\beta, a_i - \gamma, T - t) dt \right].
\end{aligned} \quad (33)$$

Здесь интегралы у компенсирующих нагрузок имеют вид (31), а интеграл от действующей нагрузки - вид (32).

4. Пример расчета

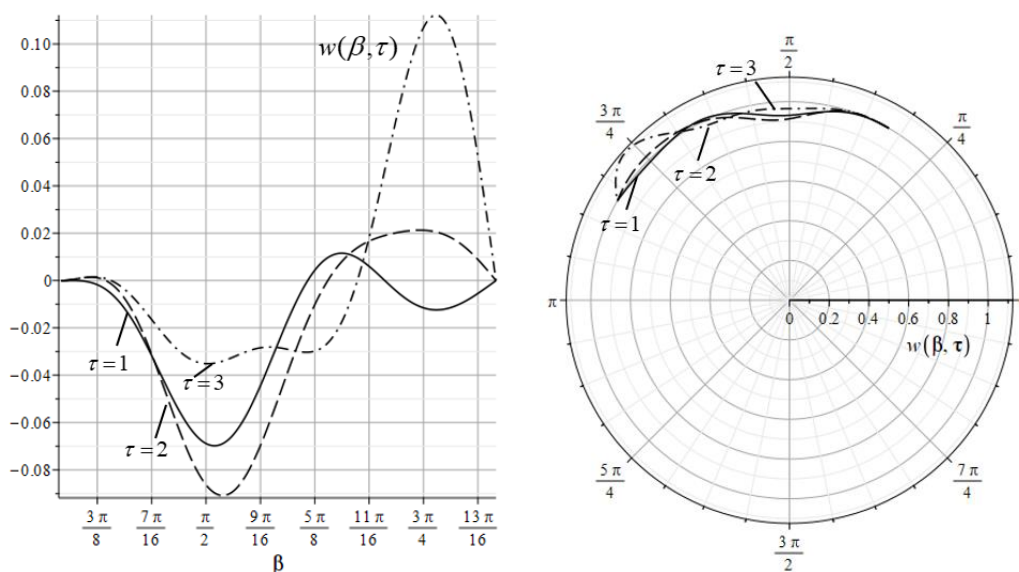
В качестве примера рассмотрим сферический пояс в случае смешанных граничных условий: шарнирно опертый и жестко защемленный торец (рис.1. г) со следующими параметрами из (3): $k = 0.04$, $\lambda = 1.15 \cdot 10^{11}$ Па, $\mu = 7.69 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho = 7850$

кг/м³. Координаты торцов из (4): $a_1 = \frac{\pi}{3}$, $a_2 = \frac{5\pi}{6}$.

На сферический пояс действует осесимметричная подвижная по координате β нагрузка вида (23) при:

$$A(\tau) = -\sin(\tau) \cdot e^{-4\tau}, \quad v(\tau) = \frac{\pi}{5} \tau, \quad \xi = \frac{4}{9} \pi.$$

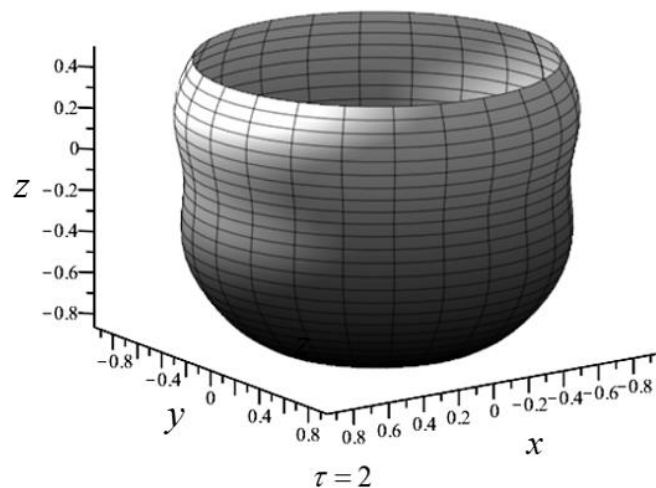
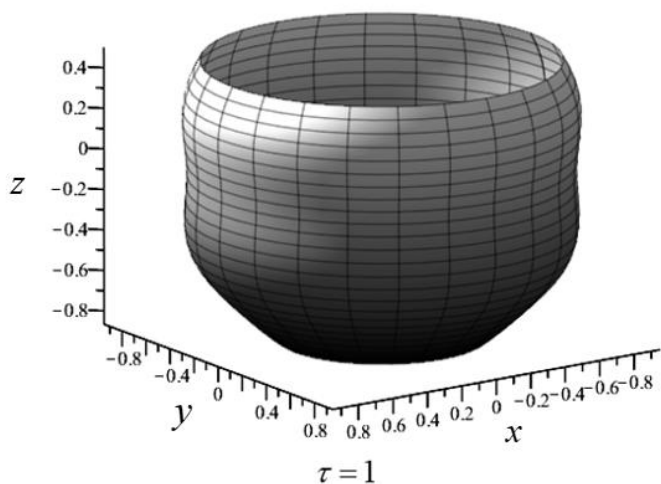
На рис. 3 и рис. 4 представлены графики нормального перемещения сферического пояса при действии подвижной осесимметричной нагрузки в моменты времени $\tau = 1$ (сплошная линия), $\tau = 2$ (штриховая линия), $\tau = 3$ (штрих пунктирная линия).



а.

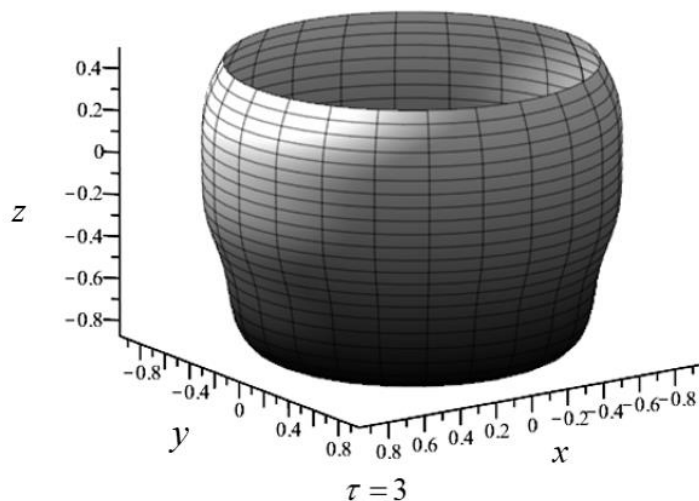
б.

Рис.3. Нормальные перемещения сферического пояса в фиксированные моменты времени: а – в декартовой системе координат; б – в полярной системе координат



а.

б.



в.

Рис.4. Пространственные зависимости нормального перемещения:

а – $\tau = 1$, б – $\tau = 2$, в – $\tau = 3$

На рис. 5 приведены зависимости угла поворота и изгибающего момента от координаты β в момент времени $\tau = 3$.

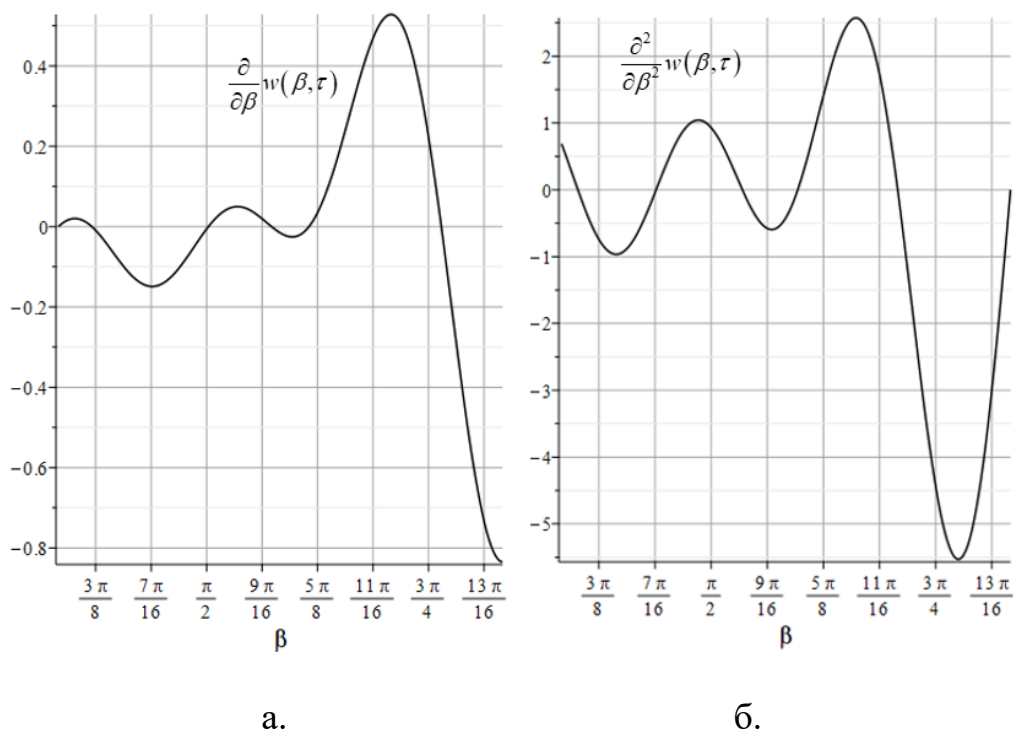


Рис.5. Нестационарные функции в момент времени $\tau = 3$:

а – угол поворота; б – изгибающий момент

Результаты, представленные на рис. 3 и рис. 4, демонстрируют нестационарный характер распространения возмущений в сферическом поясе. Функции нестационарных нормальных перемещений, углов поворотов и изгибающих моментов приведенные на рис. 3 и рис. 5, доказывают выполнение рассмотренных смешанных граничных условий на торцах сферического пояса.

При построении графиков на рис. 3 – рис. 5 в соотношении (33) удержано количество членов суммы $l=12$ (количество отрезков дискретизации временного интервала $\tau=3$), что обусловлено оценкой сходимости результатов для функции нормального перемещения по относительной погрешности с точностью до 0.1%:

$$\frac{\|w(\beta, 3)|_{l=10} - w(\beta, 3)|_{l=8}\|}{\|w(\beta, 3)|_{l=10}\|} \cdot 100\% = \frac{\max_{a_1 \leq \beta \leq a_2} |w(\beta, 3)|_{l=10} - w(\beta, 3)|_{l=8}|}{\max_{a_1 \leq \beta \leq a_2} |w(\beta, 3)|_{l=10}|} \cdot 100\% = 0.85\%,$$

$$\frac{\|w(\beta, 3)|_{l=12} - w(\beta, 3)|_{l=10}\|}{\|w(\beta, 3)|_{l=12}\|} \cdot 100\% = \frac{\max_{a_1 \leq \beta \leq a_2} |w(\beta, 3)|_{l=12} - w(\beta, 3)|_{l=10}|}{\max_{a_1 \leq \beta \leq a_2} |w(\beta, 3)|_{l=12}|} \cdot 100\% = 0.08\%.$$

Выводы

Численно-аналитическими методами построена новая и универсальная по отношению к граничным условиям нестационарная функция нормальных перемещений для тонкого упругого изотропного сферического пояса в случае воздействия подвижной нагрузки с переменной во времени амплитудой. Исследование проведено с применением функции Грина для сферической оболочки по гипотезам Кирхгофа-Лява в сочетании с методом компенсирующих нагрузок.

Приведен пример расчета нестационарной динамики сферического пояса. В виде графиков представлены результаты для нестационарных функций нормальных перемещений, углов поворотов и изгибающих моментов.

Примененный в работе метод компенсирующих нагрузок позволяет исследовать нестационарную динамику сферического пояса с промежуточными осесимметричными опорами, а также сферический сегмент.

Список источников

1. Ganapathi M., Varadan T. K. Dynamic Buckling of Laminated Anisotropic Spherical Caps // ASME Journal of Applied Mechanics, 1995, vol. 62 (1), pp. 13-19. DOI: [10.1115/1.2895879](https://doi.org/10.1115/1.2895879)

2. Zenkour A.M. Global structural behaviour of thin and moderately thick monoclinic spherical shells using a mixed shear deformation model // Archive of Applied Mechanics, 2004, vol. 74, pp. 262–276. DOI: [10.1007/s00419-004-0348-3](https://doi.org/10.1007/s00419-004-0348-3)
3. Narasimhan M.C. Dynamic-response of laminated orthotropic spherical shell // Journal of the acoustical society of America, 1992, vol. 91 (5), pp. 2714-2720. DOI: [10.1121/1.402953](https://doi.org/10.1121/1.402953)
4. Sundararajan N., Prakash T., Ganapathi M. Dynamic buckling of functionally graded spherical caps // AIAA Journal, 2006, vol. 44, no. 5. DOI: [10.2514/1.17320](https://doi.org/10.2514/1.17320)
5. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Shchekaturova T.V. Transitions from regular to chaotic vibrations of spherical and conical axially-symmetric shells // International journal of structural stability and dynamics, 2005, vol. 5, no. 3, pp. 359-385. DOI: [10.1142/S0219455405001623](https://doi.org/10.1142/S0219455405001623)
6. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Orlenko S.P. Numerical simulation of the dynamics of spherical sandwich shells reinforced with discrete ribs under a shock wave // International applied mechanics, 2020, vol. 56 (5), pp. 590-598. DOI: [10.1007/s10778-020-01037-3](https://doi.org/10.1007/s10778-020-01037-3)
7. Y. Nath, K. Sandeep. Effect of transverse shear on static and dynamic buckling of antisymmetrically laminated polar orthotropic shallow spherical shells // Composite Structures, 1997, vol. 40, no. 1, pp. 67-72. DOI: [10.1016/s0263-8223\(97\)00153-0](https://doi.org/10.1016/s0263-8223(97)00153-0)
8. Alexey A. Semenov. Models of Deformation of Stifened Orthotropic Shells under Dynamic Loading // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2016, vol. 9 (4), pp. 485-497. DOI: [10.17516/1997-1397-2016-9-4-485-497](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-4-485-497)
9. Чехов В.Н., Загора С.В. О влиянии поперечного сдвига на напряженное состояние в сферической оболочке с жестким включением, нагруженным усилиями //

Вестник Донецкого национального университета. Серия А: естественные науки. 2018. № 3-4. С. 92-101.

10. Ганеева М.С., Моисеева В.Е. Исследование устойчивости сферических оболочек под действием осесимметричного и неосесимметричного нагружения // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2012. Т. 9. № 4. С. 37-47.

11. Виноградов Ю.И. Расчет на прочность ортотропных локально нагруженных оболочек // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 3. С. 68-84. DOI: [10.7463/0315.0760049](https://doi.org/10.7463/0315.0760049)

12. Фирсанов В.В., Фам Винь Тхиен. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104174>

13. Фирсанов В.В., Фам Винь Тхиен, Чан Нгок Доан. Анализ напряженно-деформированного состояния многослойных композитных сферических оболочек на основе уточненной теории // Труды МАИ. 2020. № 114. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118893>. DOI: [10.34759/trd-2020-114-07](https://doi.org/10.34759/trd-2020-114-07)

14. Петров И.И., Сердюк Д.О., Скопинцев П.Д. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки // Труды МАИ. 2022. № 124. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=167066>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-11)

15. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Общая теория упругих оболочек. - М.: Изд-во МАИ, 2018. - 112 с.

16. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в сплошных средах. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

17. Венцель Э.С., Джан-Темиров К.Е., Трофимов А.М., Негольша Е.В. Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек. - Харьков: Б.и., 1992. - 92 с.
18. Koreneva E.V. Метод компенсирующих нагрузок для решения задачи об анизотропных средах // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018, vol. 14 (1), pp. 71–77.
19. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: Изд-во Иностранной литературы, 1952. – 476 с.
20. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований. – М.: Изд-во НАУКА, 1971. – 288 с.

References

1. Ganapathi M., Varadan T. K. Dynamic Buckling of Laminated Anisotropic Spherical Caps, *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1995, vol. 62 (1), pp. 13-19. DOI: [10.1115/1.2895879](https://doi.org/10.1115/1.2895879)
2. Zenkour A.M. Global structural behaviour of thin and moderately thick monoclinic spherical shells using a mixed shear deformation model, *Archive of Applied Mechanics*, 2004, vol. 74, pp. 262–276. DOI: [10.1007/s00419-004-0348-3](https://doi.org/10.1007/s00419-004-0348-3)
3. Narasimhan M.C. Dynamic-response of laminated orthotropic spherical shell, *Journal of the acoustical society of America*, 1992, vol. 91 (5), pp. 2714-2720. DOI: [10.1121/1.402953](https://doi.org/10.1121/1.402953)
4. Sundararajan N., Prakash T., Ganapathi M. Dynamic buckling of functionally graded spherical caps, *AIAA Journal*, 2006, vol. 44, no. 5. DOI: [10.2514/1.17320](https://doi.org/10.2514/1.17320)

5. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Shchekaturova T.V. Transitions from regular to chaotic vibrations of spherical and conical axially-symmetric shells, *International journal of structural stability and dynamics*, 2005, vol. 5, no. 3, pp. 359-385. DOI: [10.1142/S0219455405001623](https://doi.org/10.1142/S0219455405001623)
6. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Orlenko S.P. Numerical simulation of the dynamics of spherical sandwich shells reinforced with discrete ribs under a shock wave, *International applied mechanics*, 2020, vol. 56 (5), pp. 590-598. DOI: [10.1007/s10778-020-01037-3](https://doi.org/10.1007/s10778-020-01037-3)
7. Y. Nath, K. Sandeep. Effect of transverse shear on static and dynamic buckling of antisymmetrically laminated polar orthotropic shallow spherical shells, *Composite Structures*, 1997, vol. 40, no. 1, pp. 67-72. DOI: [10.1016/s0263-8223\(97\)00153-0](https://doi.org/10.1016/s0263-8223(97)00153-0)
8. Alexey A. Semenov. Models of Deformation of Stifened Orthotropic Shells under Dynamic Loading, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, 2016, vol. 9 (4), pp. 485-497. DOI: [10.17516/1997-1397-2016-9-4-485-497](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-4-485-497)
9. Chekhov V.N., Zakora S.V. *Vestnik Donetskogo natsional'nogo universiteta. Seriya A: estestvennye nauki*, 2018, no. 3-4, pp. 92-101.
10. Ganeeva M.S., Moiseeva V.E. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov ChES*, 2012, vol. 9, no. 4, pp. 37-47.
11. Vinogradov Yu.I. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana*, 2015, no. 3, pp. 68-84. DOI: [10.7463/0315.0760049](https://doi.org/10.7463/0315.0760049)
12. Firsanov V.V., Fam Vin' Tkhien. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104174>
13. Firsanov V.V., Fam Vin' Tkhien, Chan Ngok Doan. *Trudy MAI*, 2020, no. 114. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118893>. DOI: 10.34759/trd-2020-114-07

14. Petrov I.I., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=167066>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-11](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-11)
15. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. *Obshchaya teoriya uprugikh obolochek* (General theory of elastic shells), Moscow, Izd-vo MAI, 2018, 112 p.
16. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* (Waves in continuous media), Moscow, FIZMATLIT, 2004, 472 p.
17. Ventsel' E.S., Dzhan-Temirov K.E., Trofimov A.M., Negol'sha E.V. *Metod kompensiruyushchikh nagruzok v zadachakh teorii tonkikh plastinok i obolochek* (Compensation method for advanced studies of thin plates and shells), Khar'kov, B.i., 1992, 92 p.
18. Koreneva E.B. Metod kompensiruyushchikh nagruzok dlya resheniya zadachi ob anizotropnykh sredakh, *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2018, vol. 14 (1), pp. 71–77.
19. Gobson E.V. *Teoriya sfericheskikh i ellipsoidal'nykh funktsii* (Theory of spherical and ellipsoidal functions), Moscow, Izd-vo Inostrannoi literatury, 1952, 476 p.
20. Dech G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasya i Z-preobrazovaniy* (Guide to the practical application of the Laplace transform and Z-transforms), Moscow, Izd-vo NAUKA, 1971, 288 p.

Статья поступила в редакцию 21.05.2023

Одобрена после рецензирования 24.05.2023

Принята к публикации 28.08.2023

The article was submitted on 21.05.2023; approved after reviewing on 24.05.2023; accepted for publication on 28.08.2023