

Анализ методики измерения комплексов аэродинамических производных в условиях требуемых углов атаки и скольжения.

М. А. Захаров.

Проведен анализ методики измерения динамических угловых производных C^α , C^β , а также комплексов вращательных и нестационарных производных ($C_{в.к.}^{\bar{\omega}_x}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_z}$), подготовленных к последующему их разделению, в условиях требуемых углов атаки (α_0) и скольжения (β_0). Установлено, что измерение при $\beta_0 = \mp 90^\circ$ является неверным, а вычисления производной C^β и комплексов $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_z}$ производятся по ошибочным формулам. Приведены новые формулы для определения C^β , $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_z}$. Предложены колебательные эксперименты при положениях оси колебаний, проходящей через оси OZ и OY модели. В результате проведения этих экспериментов (вместе с экспериментами, связанными с колебаниями вокруг оси OX) неразделенные комплексы $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_x}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_z}$ могут измеряться непосредственно без вычислительных операций приведения осей.

Известны методы измерения комплексов производных (для получения аэродинамических характеристик продольного и бокового движения) в аэротрубах при постоянном потоке воздуха и колебаниях модели относительно какой-либо из осей OX , OY , OZ , связанных с моделью [1, 2]. При этом измерения проводятся с требуемой постоянной составляющей угла атаки α_0 , но при постоянной составляющей угла скольжения $\beta_0 = 0^\circ$. Известна также методика [3] измерения динамических угловых производных и неразделенных комплексов вращательных и нестационарных производных $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_x}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_z}$ при любых углах α_0 и β_0 . Комплексы $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_x}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{в.к.}^{\bar{\omega}_z}$ являются комплексами производных, подготовленными к последующему их разделению [4], т.е. к нахождению отдельных вращательных производных $C^{\bar{\omega}_x}$, $C^{\bar{\omega}_y}$, $C^{\bar{\omega}_z}$ после замеров нестационарных производных C^α , C^β другими методами. Методика [3] предполагает, что ось OX модели в начальном положении и вектор постоянной скорости воздуха находятся в горизонтальной плоскости. Проводят эксперименты с колебаниями модели в трех положениях оси ее колебаний, когда эта ось проходит: 1) через вертикальную ось; 2) через горизонтальную ось, перпендикулярную OX ; 3) через ось OX . Причем при колебаниях модели вокруг первой оси измеряют коэффициенты $C_1^{\omega_z}$, $C_2^{\omega_z}$, а при колебаниях вокруг второй - коэффициенты $C_1^{\omega_y}$, $C_2^{\omega_y}$.

После чего проводят вычислительные операции приведения результатов к осям Y, Z , с использованием синусов и косинусов углов установки модели по крену. То есть динамические угловые производные C^α, C^β и комплексы $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y}, C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$ определяют по формулам:

$$C^\alpha = C_1^{\omega_z} \cdot \cos(\gamma) - C_1^{\omega_y} \cdot \sin(\gamma); \quad C^\beta = C_1^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) + C_1^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma);$$

$$C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y} = \frac{2b_A}{l} \cdot C_2^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) + C_2^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma); \quad C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z} = C_2^{\omega_z} \cdot \cos(\gamma) - \frac{l}{2b_A} C_2^{\omega_y} \cdot \sin(\gamma),$$

где: γ - угол установки модели по крену [рад]; C^α, C^β - динамические угловые производные коэффициентов аэродинамических сил и моментов [рад⁻¹], $C^\alpha = C_y^\alpha, C_z^\alpha, m_x^\alpha, m_y^\alpha, m_z^\alpha$, $C^\beta = C_y^\beta, C_z^\beta, m_x^\beta, m_y^\beta, m_z^\beta$; l - длина крыла [м]; b_A - аэродинамическая хорда крыла [м].

Однако, как следует из настоящего анализа, эта методика верна не для всех возможных углов β_0 ; при определении угловой производной C^β и комплексов $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y}, C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$ по указанным формулам возникают значительные ошибки, а при определении комплексов $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y}, C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$ требуются дополнительные операции (приведения результатов замеров $C_2^{\omega_y}, C_2^{\omega_z}$ к осям Y, Z).

Таким образом, задачей настоящего анализа является определение недопустимых углов β_0 , получение правильных формул подсчета $C^\beta, C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y}, C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$, нахождение дополнительных положений оси колебаний модели, при которых в результате проведения колебательных экспериментов непосредственно без вычислительных операций приведения к осям Y, Z (с использованием $\sin(\gamma), \cos(\gamma)$) измеряют коэффициенты, пропорциональные комплексам вращательных и нестационарных производных, подготовленным к последующему их разделению.

Примем основные обозначения углов из [3] и рассмотрим относительное движение летательного аппарата (ЛА) в воздухе и модели ЛА в аэродинамической трубе с постоянным потоком воздуха.

Как известно [1] проекции вектора $V_{\text{лв}\infty}$ (скорости центра масс ЛА относительно частиц невозмущенного воздуха) на оси, связанные с ЛА, равны:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{\text{лв}\infty} \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha); \\ V_y &= -V_{\text{лв}\infty} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha); \\ V_z &= V_{\text{лв}\infty} \cdot \sin(\beta). \end{aligned} \tag{1}$$

где: $V_{\text{лв}}$ - модуль вектора [м · с⁻¹], α - мгновенный угол атаки [рад], β - мгновенный угол скольжения [рад].

Пусть в аэротрубе действует вектор $V_{\text{вм}\infty}$ скорости воздуха относительно Земли (а также центра вращения модели ЛА). Соответственно вектор $V_{\text{мв}\infty}$ скорости центра вращения модели относительно воздуха (с модулем $V_{\text{мв}\infty}$ [м · с⁻¹]) выражается: $V_{\text{мв}\infty} = -V_{\text{вм}\infty}$. Поскольку в

аэротрубе происходит имитация полета, то принимаем, что $V_{MB\infty} = V_{LB\infty}$. Поэтому из (1) проекции вектора $V_{MB\infty}$ на оси, связанные с моделью равны:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{MB\infty} \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) ; \\ V_y &= -V_{MB\infty} \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) ; \\ V_z &= V_{MB\infty} \cdot \sin(\beta) , \end{aligned} \tag{2}$$

где за углы α , β - принимаются углы атаки и скольжения модели.

Эксперименты по данной методике [3] проводятся таким образом, что вектор скорости $V_{MB\infty}$ всегда находится в горизонтальной плоскости (см. рис. 1-3). В горизонтальной плоскости лежит также ось O_0X_0 земной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$. Точка O_0 совпадает с центром вращения модели. При колебаниях модели оси O_0X , O_0Y , O_0Z , связанные с ней, в нулевой момент времени и далее периодически соответственно совпадают с осями O_0X_0 , O_0Y_0 , O_0Z_0 . Так что условимся углы атаки и скольжения модели, соответствующие начальному моменту времени, обозначать индексом "0". (α_0 , β_0)

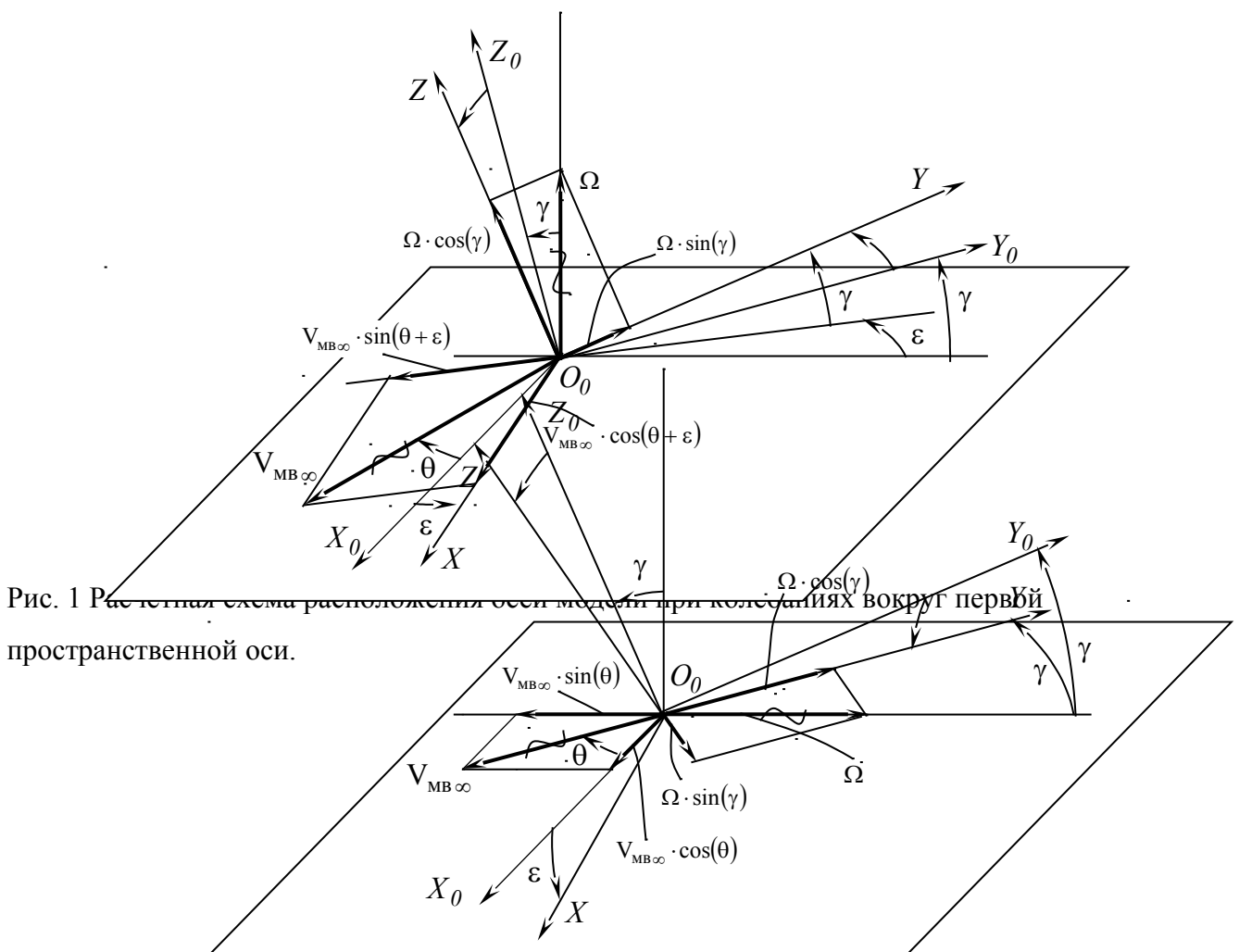


Рис. 1 Расчетная схема расположения осей модели при колебаниях вокруг первой пространственной оси.

Рис. 2 Расчетная схема расположения осей модели при колебаниях вокруг второй пространственной оси.

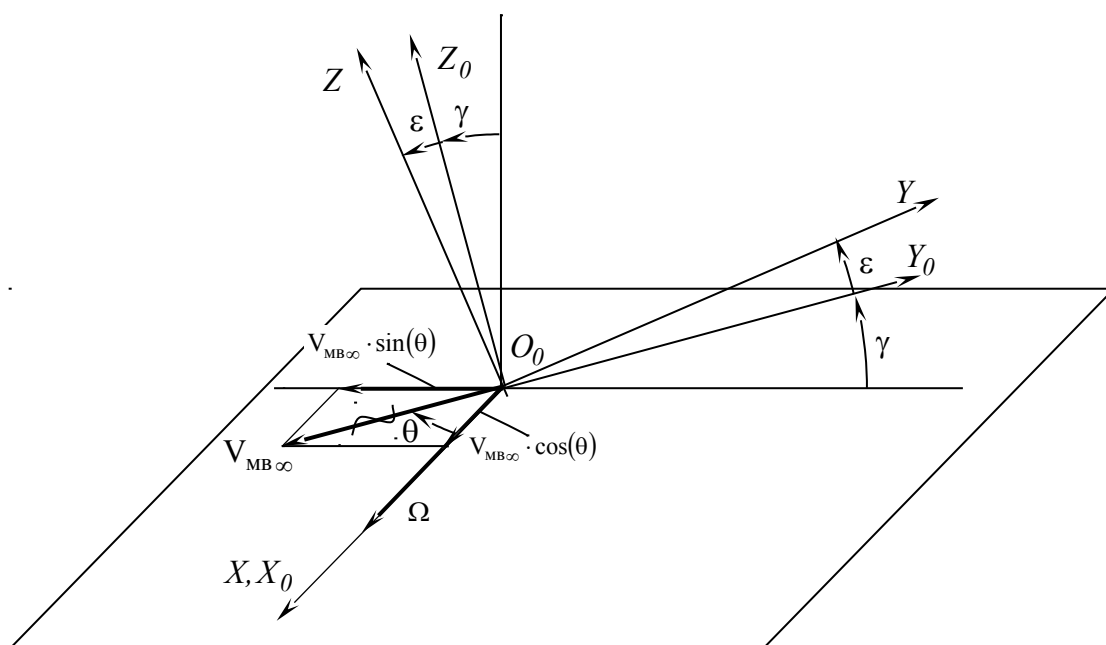


Рис. 3 Расчетная схема расположения осей модели при колебаниях вокруг третьей пространственной оси.

Вектор $\mathbf{V}_{MB\infty}$ отстоит от оси O_0X_0 на угол θ (по часовой стрелке, если смотреть сверху). Угол между осью O_0Y_0 и горизонтальной плоскостью в направлении угла крена равен γ . На данной установке модель колеблется по углу ϵ с малой амплитудой (с угловой скоростью Ω) вокруг одной из трех ортогональных пространственных осей. Через эти оси на рис. 1-3 проходят векторы Ω , причем колебания производятся последовательно: вокруг вертикальной (первой) оси (рис. 1); вокруг горизонтальной (второй) оси, перпендикулярной O_0X_0 (рис.2); вокруг горизонтальной (третьей) оси, проходящей через ось O_0X (рис.3).

Угловое перемещение ε и угловая скорость Ω соответственно равны:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon_M \cdot \sin(\omega t) ; \\ \Omega(t) &= \frac{d\varepsilon}{dt} = \omega \cdot \varepsilon_M \cdot \cos(\omega t) .\end{aligned}\quad (3)$$

где: ω - угловая частота колебаний [с^{-1}], ε_M - амплитуда угловых колебаний [рад], $\varepsilon_M < 0.1$.

Для нулевого момента времени (из (3) при $t = 0$, $\varepsilon = 0$) проекции вектора скорости $V_{\text{MB}\infty}$ на оси O_0X_0 , O_0Y_0 , O_0Z_0 из рис. 2, 3 равны:

$$\begin{aligned}V_x &= V_{\text{MB}\infty} \cdot \cos(\theta) ; \\ V_y &= -V_{\text{MB}\infty} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) ; \\ V_z &= V_{\text{MB}\infty} \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) .\end{aligned}\quad (4)$$

Совместное решение (2) и (4) дает связь параметров γ и θ с начальными (стационарными) углами атаки α_0 и скольжения β_0 :

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0) ; \\ -\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) &= -\cos(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) ; \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) &= \sin(\beta_0) .\end{aligned}\quad (5)$$

Откуда получаем зависимости для определения начальных (средних значений) углов атаки и скольжения:

$$\begin{aligned}\text{tg}(\alpha_0) &= \text{tg}(\theta) \cdot \cos(\gamma) ; \\ \sin(\beta_0) &= \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) ; \\ \text{tg}(\beta_0) &= \text{tg}(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) .\end{aligned}\quad (6)$$

Зависимости (5), (6) углов α_0 , β_0 , от θ и γ удобно представлены в номограмме [3].

Для текущего момента времени проекции вектора $V_{\text{MB}\infty}$ на оси O_0X , O_0Y , O_0Z можно выразить через параметры θ , γ , ε (соответственно для рис. 1-3, считая ε - малым углом):

$$\begin{aligned}V_x &= V_{\text{MB}\infty} \cdot \cos(\theta + \varepsilon) ; \\ V_y &= -V_{\text{MB}\infty} \cdot \sin(\theta + \varepsilon) \cdot \cos(\gamma) ; \\ V_z &= V_{\text{MB}\infty} \cdot \sin(\theta + \varepsilon) \cdot \sin(\gamma) .\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}V_x &= V_{\text{MB}\infty} \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varepsilon) = V_{\text{MB}\infty} \cdot \cos(\theta) ; \\ V_y &= V_{\text{MB}\infty} \cdot (\cos(\theta) \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma)) = V_{\text{MB}\infty} \cdot (\varepsilon \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma)) ; \\ V_z &= V_{\text{MB}\infty} \cdot (\cos(\theta) \cdot \sin(\varepsilon) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma)) = V_{\text{MB}\infty} \cdot (\varepsilon \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma)) .\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}V_x &= V_{\text{MB}\infty} \cdot \cos(\theta) ; \\ V_y &= -V_{\text{MB}\infty} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma + \varepsilon) ; \\ V_z &= V_{\text{MB}\infty} \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon) .\end{aligned}\quad (9)$$

Производные углов атаки и скольжения в экспериментах с учетом (3):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \cdot \Omega(t) ; \\ \dot{\beta} &= \frac{d\beta}{d\varepsilon} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\beta}{d\varepsilon} \cdot \Omega(t) .\end{aligned}\tag{10}$$

Будем считать далее, что приращения углов атаки $\Delta\alpha$, скольжения $\Delta\beta$, перемещения

$\Delta\varepsilon$ соответственно равны:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \alpha - \alpha(t=0) = \alpha - \alpha_0 ; \\ \Delta\beta &= \beta - \beta(t=0) = \beta - \beta_0 ; \\ \Delta\varepsilon &= \varepsilon - \varepsilon(t=0) = \varepsilon - 0 = \varepsilon .\end{aligned}\tag{11}$$

При этом приращения $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ зависят от $\Delta\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &\approx \frac{d\alpha}{d\varepsilon} \cdot \Delta\varepsilon ; \\ \Delta\beta &\approx \frac{d\beta}{d\varepsilon} \cdot \Delta\varepsilon .\end{aligned}\tag{12}$$

Определим параметры движения для каждой пространственной оси колебаний. При

нахождении производных $\frac{d\alpha}{d\varepsilon}$, $\frac{d\beta}{d\varepsilon}$, в связи с малостью приращений $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, будем принимать

значения α , β равными их средним значениям α_0 , β_0 .

1) Для рис.1.

Решаем совместно (7) и (2)

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \varepsilon) &= \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) ; \\ -\sin(\theta + \varepsilon) \cdot \cos(\gamma) &= -\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) ; \\ \sin(\theta + \varepsilon) \cdot \sin(\gamma) &= \sin(\beta) .\end{aligned}\tag{13}$$

Находим:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha) &= \operatorname{tg}(\theta + \varepsilon) \cdot \cos(\gamma) ; \\ \sin(\beta) &= \sin(\theta + \varepsilon) \cdot \sin(\gamma) ; \\ \operatorname{tg}(\beta) &= \operatorname{tg}(\gamma) \cdot \sin(\alpha) .\end{aligned}\tag{14}$$

Откуда $\alpha = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\theta + \varepsilon) \cdot \cos(\gamma))$; $\beta = \operatorname{arcsin}(\sin(\theta + \varepsilon) \cdot \sin(\gamma))$.

Проводим дифференцирование этих выражений, а также упрощение с учетом (5), (6), (13), (14):

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\varepsilon} &= \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(\theta + \varepsilon) \cdot \cos(\gamma))^2} \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\cos^2(\theta + \varepsilon)} = \frac{\cos(\gamma)}{\cos^2(\beta)} = \frac{\cos(\gamma)}{1 - \sin^2(\gamma) \cdot \sin^2(\theta)} = \cos(\gamma) \cdot \\ &\cdot (1 + \operatorname{tg}^2(\beta)) = \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\beta) \approx \cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) ; \\ \frac{d\beta}{d\varepsilon} &= \frac{\sin(\gamma) \cdot \cos(\theta + \varepsilon)}{\sqrt{1 - (\sin(\theta + \varepsilon) \cdot \sin(\gamma))^2}} = \frac{\sin(\gamma) \cdot \cos(\theta + \varepsilon)}{\sin^2(\beta)} = \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha) \approx \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) .\end{aligned}\tag{15}$$

Из (12), (15) находим:

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= \Delta\varepsilon \cdot (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0)) = \Delta\varepsilon \cdot \frac{\cos(\gamma)}{1 - \sin^2(\gamma) \cdot \sin^2(\theta)} ; \\ \Delta\beta &= \Delta\varepsilon \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) .\end{aligned}\tag{16}$$

Значение $|\Delta\beta|$ не может превысить $|\Delta\varepsilon|$. Значение $|\Delta\alpha|$ максимально при $\theta = \mp 90^\circ$ и равно:

$$\Delta\alpha(\theta = \mp 90^\circ) = \Delta\varepsilon \cdot \frac{\cos(\gamma)}{1 - \sin^2(\gamma)} = \frac{\Delta\varepsilon}{\cos(\gamma)} .$$

При этом, в соответствии с (6) необходимо, чтобы $\gamma \rightarrow \mp 90^\circ$ (для реализации угла $\beta_0 \rightarrow \mp 90^\circ$).

Соответственно $|\Delta\alpha| \rightarrow \infty$. Т. е. измерения при $\beta_0 \approx \mp 90^\circ$ будут неверны.

Из (10) с учетом (15):

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0)) \cdot \Omega(t) ; \\ \dot{\beta} &= \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \Omega(t) . \end{aligned} \quad (17)$$

Компоненты угловой скорости из рис. 1:

$$\begin{aligned} \omega_x &= 0 ; \\ \omega_y &= \Omega(t) \cdot \sin(\gamma) ; \\ \omega_z &= \Omega(t) \cdot \cos(\gamma) . \end{aligned} \quad (18)$$

2) Для рис. 2.

Решаем совместно (8) и (2)

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) ; \\ \varepsilon \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\gamma) - \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) &= -\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) ; \\ \varepsilon \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) &= \sin(\beta) . \end{aligned} \quad (19)$$

Находим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha) &= \operatorname{tg}(\theta) \cdot \cos(\gamma) - \varepsilon \cdot \sin(\gamma) ; \\ \sin(\beta) &= \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) + \varepsilon \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma) . \end{aligned} \quad (20)$$

Откуда:

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\theta) \cdot \cos(\gamma) - \varepsilon \cdot \sin(\gamma)) ; \quad \beta = \operatorname{arcsin}(\sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) + \varepsilon \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma)) .$$

Дифференцируем эти выражения и упрощаем с учетом (5), (6), (19), (20):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varepsilon} &= \frac{-\sin(\gamma)}{1 + (\operatorname{tg}(\theta) \cdot \cos(\gamma) - \varepsilon \cdot \sin(\gamma))^2} = -\sin(\gamma) \cdot \cos^2(\alpha) = -\sin(\gamma) \cdot (1 - 1 + \cos^2(\alpha)) = -\sin(\gamma) + \\ &+ \sin(\gamma) \cdot (1 - \cos^2(\alpha)) \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\gamma)} = -(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) \cdot \operatorname{tg}(\gamma) \cdot \sin^2(\alpha)) \approx -\sin(\gamma) + \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) ; \\ \frac{d\beta}{d\varepsilon} &= \frac{\cos(\theta) \cdot \cos(\gamma)}{\sqrt{1 - (\sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) + \varepsilon \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\gamma))^2}} = \frac{\cos(\theta) \cdot \cos(\gamma)}{\cos(\beta)} \approx \frac{\cos(\theta) \cdot \cos(\gamma)}{\cos(\beta_0)} = \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) . \end{aligned} \quad (21)$$

Из (12) с учетом (21) находим:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\Delta\varepsilon \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos^2(\alpha) \approx \Delta\varepsilon \cdot (-\sin(\gamma) + \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0)) ; \\ \Delta\beta &= \Delta\varepsilon \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) . \end{aligned} \quad (22)$$

Значения $|\Delta\alpha|$ и $|\Delta\beta|$ не могут превысить $|\Delta\varepsilon|$. Производные углов атаки и скольжения из (10), (21):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -(\sin(\gamma) - \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0)) \cdot \Omega(t) ; \\ \dot{\beta} &= \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \Omega(t) .\end{aligned}\quad (23)$$

Компоненты угловой скорости из рис. 2:

$$\begin{aligned}\omega_x &= 0 ; \\ \omega_y &= \Omega(t) \cdot \cos(\gamma) ; \\ \omega_z &= -\Omega(t) \cdot \sin(\gamma) .\end{aligned}\quad (24)$$

3) Для рис. 3

Решаем совместно (9) и (2):

$$\begin{aligned}\cos(\theta) &= \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) ; \\ -\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma + \varepsilon) &= -\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) ; \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon) &= \sin(\beta) .\end{aligned}\quad (25)$$

Находим:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha) &= \operatorname{tg}(\theta) \cdot \cos(\gamma + \varepsilon) ; \\ \sin(\beta) &= \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon) ; \\ \operatorname{tg}(\theta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon) &= \frac{\operatorname{tg}(\beta)}{\cos(\alpha)} ; \\ \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma + \varepsilon)}{\cos(\beta)} &= \sin(\alpha) .\end{aligned}\quad (26)$$

Откуда из первых двух выражений (26):

$$\alpha = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\theta) \cdot \cos(\gamma + \varepsilon)) ; \quad \beta = \operatorname{arcsin}(\sin(\theta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon)) .$$

Дифференцируем эти выражения и упрощаем с учетом (5), (6), (25), (26):

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha}{d\varepsilon} &= \frac{-\operatorname{tg}(\theta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon)}{1 + (\operatorname{tg}(\theta) \cdot \cos(\gamma + \varepsilon))^2} = -\operatorname{tg}(\theta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon) \cdot \cos^2(\alpha) = -\operatorname{tg}(\beta) \cdot \cos(\alpha) \approx -\operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0) ; \\ \frac{d\beta}{d\varepsilon} &= \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma + \varepsilon)}{\sqrt{1 - (\sin(\theta) \cdot \sin(\gamma + \varepsilon))^2}} = \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma + \varepsilon)}{\cos(\beta)} = \sin(\alpha) \approx \sin(\alpha_0) .\end{aligned}\quad (27)$$

Из (12) с учетом (27) находим приращения $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$.

$$\begin{aligned}\Delta\alpha &= -\Delta\varepsilon \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0) ; \\ \Delta\beta &= \Delta\varepsilon \cdot \sin(\alpha_0) .\end{aligned}\quad (28)$$

Приращения $|\Delta\alpha| \rightarrow \infty$ при $\beta_0 \rightarrow \mp 90^\circ$ (измерение с $\beta_0 \rightarrow \mp 90^\circ$ недопустимо). Значение $|\Delta\beta|$ не может превысить $|\Delta\varepsilon|$. Производные углов атаки и скольжения из (10) с учетом (27):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -\operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \Omega(t) ; \\ \dot{\beta} &= \sin(\alpha_0) \cdot \Omega(t) .\end{aligned}\quad (29)$$

Компоненты угловой скорости из рис. 3:

$$\begin{aligned}
\omega_x &= \Omega(t) ; \\
\omega_y &= 0 ; \\
\omega_z &= 0 .
\end{aligned} \tag{30}$$

В линейном приближении коэффициенты сил и моментов при колебаниях модели можно представить в следующем виде [3, 5]:

$$C = C_0(\alpha_0, \beta_0) + C^\alpha \cdot \Delta\alpha + C^\beta \cdot \Delta\beta + C^{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\alpha} + C^{\bar{\beta}} \cdot \bar{\beta} + C^{\bar{\omega}_x} \cdot \bar{\omega}_x + C^{\bar{\omega}_y} \cdot \bar{\omega}_y + C^{\bar{\omega}_z} \cdot \bar{\omega}_z . \tag{31}$$

где: C - коэффициенты аэродинамических сил и моментов: $C = C_y, C_z, m_x, m_y, m_z, \bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ - безразмерные угловые скорости; $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ - безразмерные производные; $\Delta\alpha, \Delta\beta$ - приращения углов атаки и скольжения [рад]; $C_0(\alpha_0, \beta_0)$ - постоянная составляющая коэффициента C .

Обозначим также через V модуль скорости воздуха в аэротрубе ($V = V_{\text{вм}\infty} = V_{\text{мб}\infty}$).

При колебаниях в соответствии с рис. 1 аэродинамические коэффициенты (39) (с учетом (11), (17), (19)- (21) и выражений безразмерных производных и угловых скоростей [5]) равны:

$$\begin{aligned}
C &= C_0(\alpha_0, \beta_0) + C^\alpha \cdot \Delta\varepsilon \cdot (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\beta_0)) + C^\beta \cdot \Delta\varepsilon \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) + \\
&+ C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \Omega \cdot (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\beta_0)) + C^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \Omega \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \Omega \cdot \\
&\cdot \sin(\gamma) + C^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \Omega \cdot \cos(\gamma) = C_0(\alpha_0, \beta_0) + \left[C^\alpha \cdot (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\beta_0)) + \right. \\
&+ C^\beta \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) \left. \right] \cdot \varepsilon + \left[\left(C^{\bar{\omega}_z} + C^{\bar{\alpha}} \right) \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \cos(\gamma) + \left(C^{\bar{\omega}_y} + C^{\bar{\beta}} \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{2b_A}{l} \cdot \right. \right. \\
&\left. \left. \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\beta_0) \right) \cdot \frac{l}{2V} \cdot \sin(\gamma) \right] \cdot \Omega .
\end{aligned}$$

Соответственно найденному выражению C каждый канал тензовесов при малых колебаниях ε выдает постоянный сигнал, пропорциональный среднему значению $C_0(\alpha_0, \beta_0)$, и переменный сигнал, содержащий составляющую в фазе с опорным сигналом $\varepsilon(t)$ и составляющую в фазе с сигналом $\Omega(t) = \dot{\varepsilon}(t)$. Составляющая сигнала в фазе с опорным сигналом пропорциональна измеряемому коэффициенту:

$$C_1^{\omega_z} = C^\alpha \cdot (\cos(\gamma) + \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\beta_0)) + C^\beta \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) . \tag{32}$$

Составляющая сигнала в фазе с угловой скоростью (опережение по фазе на $\frac{\pi}{2}$)

пропорциональна другому измеряемому коэффициенту:

$$\begin{aligned}
C_2^{\omega_z} &= \left(C^{\bar{\omega}_z} + C^{\bar{\alpha}} \right) \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \cos(\gamma) + \left(C^{\bar{\omega}_y} + C^{\bar{\beta}} \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{2b_A}{l} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\beta_0) \right) \cdot \\
&\cdot \frac{l}{2V} \cdot \sin(\gamma) .
\end{aligned} \tag{33}$$

При колебаниях в соответствии с рис 2. аэродинамические коэффициенты (31) с учетом (11), (27)-(30) равны:

$$C = C_0(\alpha_0, \beta_0) + \left[C^\alpha \cdot (-\sin(\gamma) + \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0)) + C^\beta \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) \right] \cdot \varepsilon + \\ + \left[-\left(C^{\bar{\omega}_z} + C^{\bar{\alpha}} \right) \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \sin(\gamma) + \left(C^{\bar{\omega}_y} + C^{\bar{\beta}} \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{2b_A}{l} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{l}{2V} \cdot \cos(\gamma) \right] \cdot \Omega .$$

По аналогии с измерениями по рис. 1 каждый канал тензососов также формирует постоянный сигнал среднего значения $C_0(\alpha_0, \beta_0)$ и переменный сигнал, содержащий составляющую в фазе с опорным сигналом $\varepsilon(t)$ (пропорциональную измеряемому коэффициенту $C_1^{\omega_y}$) и составляющую в фазе с сигналом $\Omega(t) = \dot{\varepsilon}(t)$ (пропорциональную измеряемому коэффициенту $C_2^{\omega_y}$):

$$C_1^{\omega_y} = C^\alpha \cdot (-\sin(\gamma) + \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0)) + C^\beta \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) . \quad (34)$$

$$C_2^{\omega_y} = -\left(C^{\bar{\omega}_z} + C^{\bar{\alpha}} \right) \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \sin(\gamma) + \left(C^{\bar{\omega}_y} + C^{\bar{\beta}} \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{2b_A}{l} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \right) \cdot \\ \cdot \frac{l}{2V} \cdot \cos(\gamma) . \quad (35)$$

Используя выражения (32) и (34), решаем систему уравнений для нахождения динамических угловых производных C^α и C^β , получаем:

$$C^\alpha = C_1^{\omega_z} \cdot \cos(\gamma) - C_1^{\omega_y} \cdot \sin(\gamma) .$$

$$C^\beta = \frac{1}{\cos(\alpha_0)} \cdot \left(C_1^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) + C_1^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma) - C^\alpha \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \right) = \frac{1}{\cos(\alpha_0)} \cdot \left(C_1^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) + \right. \\ \left. C_1^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma) - C_1^{\omega_z} \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) + C_1^{\omega_y} \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \right) = \frac{1}{\cos(\alpha_0)} \cdot \\ \cdot \left[C_1^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) \cdot \left(1 - \frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \right) + C_1^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma) \cdot \left(1 + \frac{\sin(\gamma)}{\cos(\gamma)} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \right) \right] = \\ = \frac{1}{\cos(\alpha_0)} \cdot \left[C_1^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) \cdot \left(1 - \frac{\cos(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0)}{\sin(\beta_0)} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \right) + C_1^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma) \cdot \right. \\ \left. \left(1 + \frac{\sin(\beta_0)}{\cos(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0)} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \right) \right] = \frac{1}{\cos(\alpha_0)} \cdot \left[C_1^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos^2(\alpha_0) + C_1^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma) \cdot \right. \\ \left. \cdot \frac{1}{\cos^2(\beta_0)} \right] = C_1^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) + C_1^{\omega_y} \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\alpha_0) \cdot \cos^2(\beta_0)} .$$

Теперь можно найти комплексы $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$ и $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y}$ производных, подготовленные для разделения [4]:

$$C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y} = C^{\bar{\omega}_y} + C^{\bar{\beta}} \cdot \cos(\alpha) + C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{2b_A}{l} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) ; \\ C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z} = C^{\bar{\omega}_z} + C^{\bar{\alpha}} . \quad (36)$$

При этом из (33), (35), (36) имеем:

$$\begin{aligned} C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y} &= \frac{2V}{l} \cdot \left(C_2^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) + C_2^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma) \right) ; \\ C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z} &= \frac{V}{b_A} \cdot \left(C_2^{\omega_z} \cdot \cos(\gamma) - C_2^{\omega_y} \cdot \sin(\gamma) \right) . \end{aligned} \quad (37)$$

Таким образом, обрабатывая совместно результаты эксперимента при колебаниях вокруг первой и второй осей, можно найти все необходимые комплексы вращательных и нестационарных производных вида (36) при заданных средних значениях углов атаки и скольжения.

При колебаниях вокруг третьей пространственной оси (в соответствии с рис. 3) будем определять третий необходимый комплекс $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_x}$, подготовленный к разделению [4]:

$$C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_x} = C^{\bar{\omega}_x} + C^{\bar{\beta}} \cdot \sin(\alpha_0) - C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{2b_A}{l} \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\beta_0) . \quad (38)$$

Соответственно аэродинамические коэффициенты (31) с учетом (11), (28)-(30):

$$\begin{aligned} C &= C_0(\alpha_0, \beta_0) + C^\alpha \cdot (-\Delta\varepsilon \cdot \text{tg}(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0)) + C^\beta \cdot \Delta\varepsilon \cdot \sin(\alpha_0) + C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \Omega \cdot \\ &\cdot (-\text{tg}(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0)) + C^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \Omega + C^{\bar{\omega}_x} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \Omega = C_0(\alpha_0, \beta_0) + \\ &+ \left[-C^\alpha \cdot \text{tg}(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0) + C^\beta \cdot \sin(\alpha_0) \right] \cdot \varepsilon + \left[-C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{2b_A}{l} \cdot \text{tg}(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0) + \right. \\ &\left. + C^{\bar{\beta}} \cdot \sin(\alpha_0) + C^{\bar{\omega}_x} \right] \cdot \frac{l}{2V} \cdot \Omega . \end{aligned}$$

В результате данного эксперимента измеряются значения коэффициентов пропорциональности $C_1^{\omega_x}$ (в фазе с опорным сигналом) и $C_2^{\omega_x}$ (составляющей сигнала тензовесов, опережающей по фазе на $\frac{\pi}{2}$ опорный сигнал). Коэффициент $C_1^{\bar{\omega}_x}$ представляет собой комплекс динамических угловых производных

$$C_1^{\omega_x} = -C^\alpha \cdot \text{tg}(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_0) + C^\beta \cdot \sin(\alpha_0) , \quad (39)$$

а коэффициент $C_2^{\bar{\omega}_x}$ - коэффициент, полученный при измерении, вида:

$$C_2^{\omega_x} = \left[C^{\bar{\omega}_x} + C^{\bar{\beta}} \cdot \sin(\alpha_0) - C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{2b_A}{l} \cdot \cos(\alpha_0) \cdot \text{tg}(\beta_0) \right] \cdot \frac{l}{2V} ,$$

пропорционален комплексу $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_x}$ (38), подготовленному к разделению. Т.е. $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_x}$ определяется непосредственно в процессе измерений (без вычислений подобных (37)):

$$C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_x} = C_2^{\omega_x} \cdot \frac{2V}{l} .$$

Таким образом найдены все необходимые комплексы вращательных и нестационарных производных (36), (38), подготовленные к последующему их разделению и нахождению отдельных производных.

Комплексы (36) можно также получить без вычислений по формулам (37), а непосредственно из результатов экспериментов. При этом рама установки должна занимать положения, при которых ось колебаний в экспериментах соответственно проходит через оси OZ_0 и OY_0 модели (колебания вокруг 4-ой и 5-ой пространственных осей, см. соответственно рис. 4 и 5). Определим параметры движения модели при этих колебаниях.

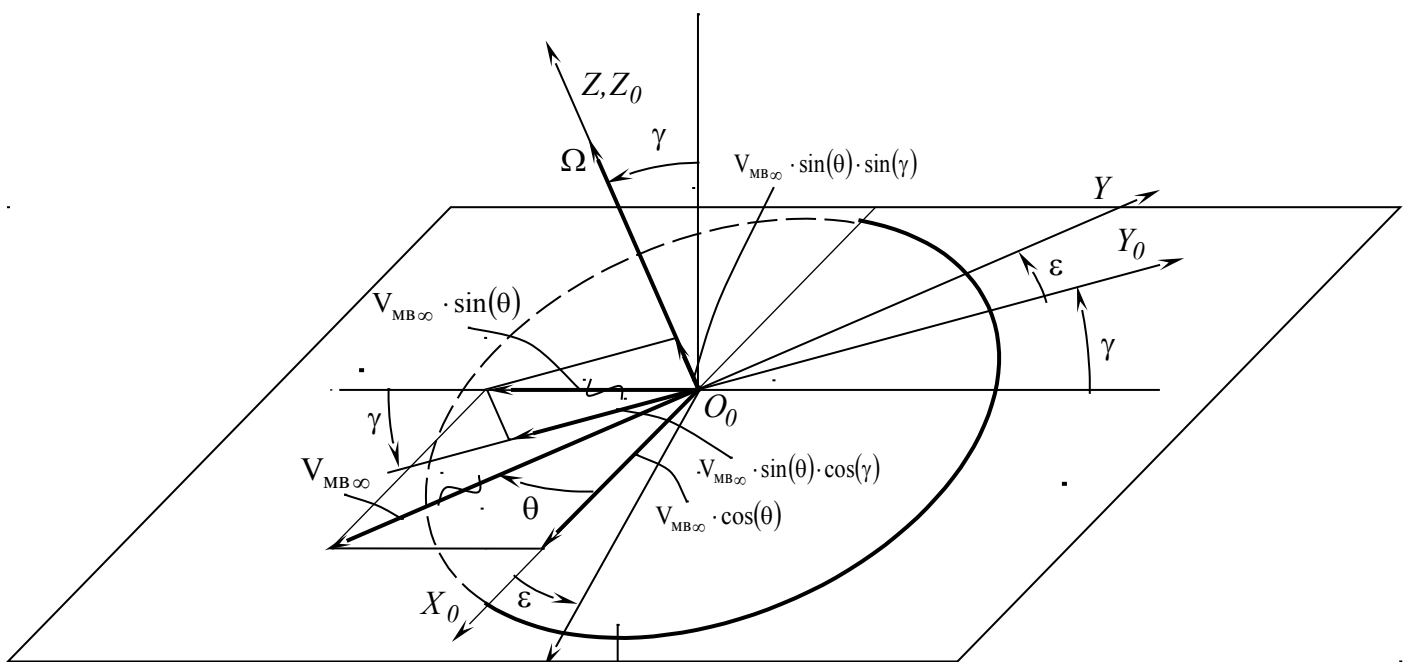


Рис. 4 Расчетная схема расположения осей модели при колебаниях вокруг четвертой пространственной оси.

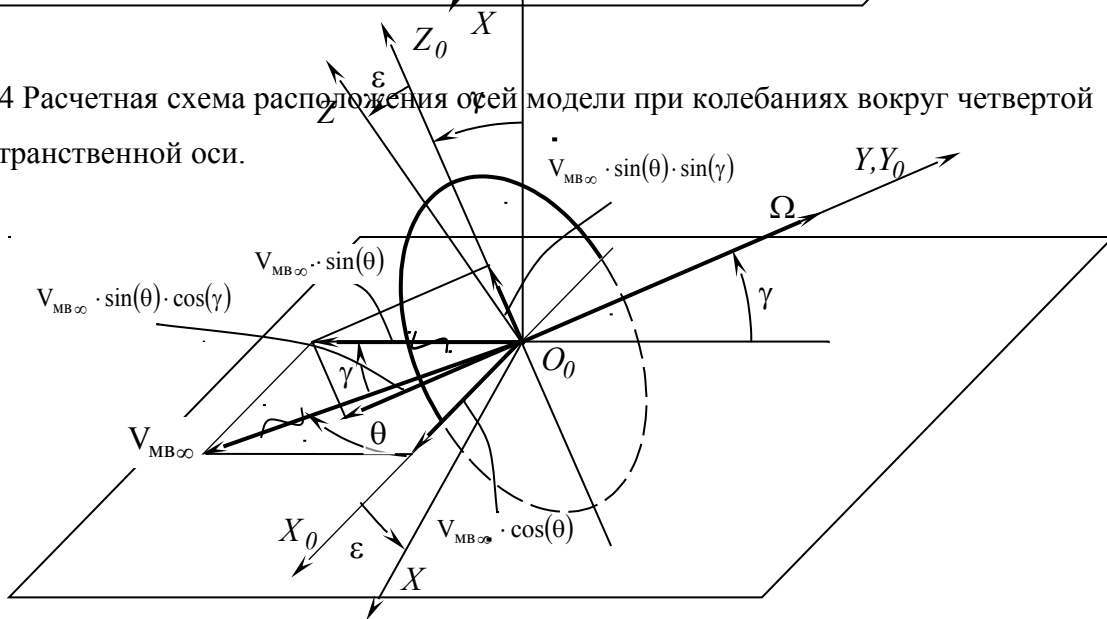


Рис. 5 Расчетная схема расположения осей модели при колебаниях вокруг пятой пространственной оси.

4) Для рис. 4.

Уравнение проекций вектора $\mathbf{V}_{\text{МБ}\infty}$:

$$\begin{aligned} V_x &= V_{\text{МБ}\infty} \cdot (-\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon) + \cos(\theta) \cdot \cos(\varepsilon)) = V_{\text{МБ}\infty} \cdot (-\varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\theta)) ; \\ V_y &= V_{\text{МБ}\infty} \cdot (-\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(\varepsilon) - \cos(\theta) \cdot \sin(\varepsilon)) = V_{\text{МБ}\infty} \cdot (-\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) - \varepsilon \cdot \cos(\theta)) ; \\ V_z &= V_{\text{МБ}\infty} \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) . \end{aligned} \quad (40)$$

Решаем совместно (40) и (2)

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\theta) &= \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) ; \\ -\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) - \varepsilon \cdot \cos(\theta) &= -\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) ; \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) &= \sin(\beta) . \end{aligned} \quad (41)$$

После чего находим:

$$\begin{aligned} \text{tg}(\alpha) &= \frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \varepsilon \cdot \cos(\theta)}{-\varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\theta)} ; \\ \sin(\beta) &= \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) . \end{aligned} \quad (42)$$

Откуда:

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \varepsilon \cdot \cos(\theta)}{-\varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\theta)}\right) ; \quad \beta = \text{arcsin}(\sin(\theta) \cdot \sin(\gamma)) .$$

Дифференцируем полученные выражения и упрощаем с учетом (5), (6), (41), (42) (пренебрегая ε после взятия производной):

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varepsilon} &= \frac{\cos(\theta) \cdot (-\varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\theta)) + \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) \cdot (\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \varepsilon \cdot \cos(\theta))}{\left[1 + \left(\frac{\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \varepsilon \cdot \cos(\theta)}{-\varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\theta)}\right)^2\right] \cdot (-\varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) + \cos(\theta))^2} \approx \\ &\approx \cos^2(\alpha) \cdot \frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \cdot \cos^2(\gamma)}{\cos^2(\theta)} = \cos^2(\alpha) \cdot (1 + \text{tg}^2(\theta) \cdot \cos^2(\gamma)) \approx \cos^2(\alpha_0) \cdot (1 + \text{tg}^2(\alpha_0)) = 1 ; \end{aligned} \quad (43)$$

$$\frac{d\beta}{d\varepsilon} = 0 .$$

Из (12), (43) приращения:

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \Delta\varepsilon ; \\ \Delta\beta &= 0 . \end{aligned} \quad (44)$$

Значения $|\Delta\alpha|$ и $|\Delta\beta|$ не превышают $|\Delta\varepsilon|$.

Из (10) с учетом (43):

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= \Omega(t) ; \\ \dot{\beta} &= 0 .\end{aligned}\tag{45}$$

Компоненты угловой скорости из рис. 5

$$\begin{aligned}\omega_x &= 0 ; \\ \omega_y &= 0 ; \\ \omega_z &= \Omega(t) .\end{aligned}\tag{46}$$

Аэродинамические коэффициенты (31) с учетом (11), (44)-(46):

$$\begin{aligned}C &= C_0(\alpha_0, \beta_0) + C^\alpha \cdot \Delta\varepsilon + C^\beta \cdot 0 + C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \Omega + C^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot 0 + C^{\bar{\omega}_z} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \Omega = \\ &= C_0(\alpha_0, \beta_0) + C^\alpha \cdot \varepsilon + \left[C^{\bar{\alpha}} + C^{\bar{\omega}_z} \right] \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \Omega .\end{aligned}$$

В результате эксперимента могут быть определены составляющие сигнала в фазе с опорным сигналом $\varepsilon(t)$ (коэффициент $C_1^{\omega_{z4}} = C^\alpha$) и в фазе с угловой скоростью $\Omega(t)$

(коэффициент $C_2^{\omega_{z4}} = \left[C^{\bar{\omega}_z} + C^{\bar{\alpha}} \right] \cdot \frac{b_A}{V}$, пропорциональный $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$ (36)) для данных α_0, β_0 . Так что с

учетом (36) следует:

$$C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z} = C_2^{\omega_{z4}} \cdot \frac{V}{b_A} .$$

5) Для рис. 5.

Уравнения проекций $V_{\text{мб}\infty}$ на оси, связанные с моделью:

$$\begin{aligned}V_x &= V_{\text{мб}\infty} \cdot (\cos(\theta) \cdot \cos(\varepsilon) - \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(\varepsilon)) = V_{\text{мб}\infty} \cdot (\cos(\theta) - \varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma)) ; \\ V_y &= -V_{\text{мб}\infty} \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) ; \\ V_z &= V_{\text{мб}\infty} \cdot (\cos(\theta) \cdot \sin(\varepsilon) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\varepsilon)) = V_{\text{мб}\infty} \cdot (\varepsilon \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma)) .\end{aligned}\tag{47}$$

Решаем совместно (47) и (2):

$$\begin{aligned}\cos(\theta) - \varepsilon \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) &= \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha) ; \\ -\sin(\theta) \cdot \cos(\gamma) &= -\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) ; \\ \varepsilon \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) &= \sin(\beta) .\end{aligned}\tag{48}$$

Находим:

$$\begin{aligned}\text{ctg}(\alpha) &= \left(\frac{\text{ctg}(\theta)}{\cos(\gamma)} - \varepsilon \cdot \text{tg}(\gamma) \right) ; \\ \sin(\beta) &= \varepsilon \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma) .\end{aligned}\tag{49}$$

Откуда:

$$\alpha = \text{arccctg} \left(\frac{\text{ctg}(\theta)}{\cos(\gamma)} - \varepsilon \cdot \text{tg}(\gamma) \right) ; \quad \beta = \text{arcsin}(\varepsilon \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma)) .$$

Дифференцируем полученные выражения и упрощаем с учетом (5), (6), (48), (49):

$$\frac{d\alpha}{d\varepsilon} = -\frac{\operatorname{tg}(\gamma)}{1 + \left(\frac{\operatorname{ctg}(\theta)}{\cos(\gamma)} - \varepsilon \cdot \operatorname{tg}(\gamma) \right)^2} = \operatorname{tg}(\gamma) \cdot \sin^2(\alpha) \approx \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) ;$$

$$\frac{d\beta}{d\varepsilon} = \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1 - (\varepsilon \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \sin(\gamma))^2}} = \frac{\cos(\theta)}{\cos(\beta)} \approx \cos(\alpha_0) .$$
(50)

Из (12), (50) находим приращения:

$$\Delta\alpha = \Delta\varepsilon \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) ;$$

$$\Delta\beta = \Delta\varepsilon \cdot \cos(\alpha_0) .$$
(51)

Значение $|\Delta\beta|$ меньше $|\Delta\varepsilon|$. $|\Delta\alpha| \rightarrow \infty$ при $\beta_0 \rightarrow \mp 90^\circ$. Следовательно нельзя проводить измерения при $\beta_0 = \mp 90^\circ$, т.к. $\Delta\alpha$ должна оставаться малой величиной.

Из (10) с учетом (50):

$$\dot{\alpha} = \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \Omega(t) ;$$

$$\dot{\beta} = \cos(\alpha_0) \cdot \Omega(t) .$$
(52)

Компоненты угловой скорости из рис.5:

$$\omega_x = 0 ;$$

$$\omega_y = \Omega(t) ;$$

$$\omega_z = 0 .$$
(53)

Аэродинамические коэффициенты (31) с учетом (11), (51)-(53)

$$C = C_0(\alpha_0, \beta_0) + C^\alpha \cdot \Delta\varepsilon \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) + C^\beta \cdot \Delta\varepsilon \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\alpha}} \cdot \frac{b_A}{V} \cdot \Omega \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) +$$

$$+ C^{\bar{\beta}} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \Omega \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\omega}_y} \cdot \frac{l}{2V} \cdot \Omega = C_0(\alpha_0, \beta_0) + \left[C^\alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) + C^\beta \cdot \cos(\alpha_0) \right] \cdot \varepsilon +$$

$$+ \left[C^{\bar{\alpha}} \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \frac{2b_A}{l} + C^{\bar{\beta}} \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\omega}_y} \right] \cdot \frac{l}{2V} \cdot \Omega .$$

В результате эксперимента с колебаниями вокруг 5-ой оси могут быть определены составляющие сигнала с опорным сигналом $\varepsilon(t)$ (коэффициент

$$C_1^{\omega_{y5}} = \left[C^\alpha \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) + C^\beta \cdot \cos(\alpha_0) \right] \quad (54)$$

и в фазе с угловой скоростью $\Omega(t)$ (коэффициент

$$C_2^{\omega_{y5}} = \left[C^{\bar{\alpha}} \cdot \operatorname{tg}(\beta_0) \cdot \sin(\alpha_0) \cdot \frac{2b_A}{l} + C^{\bar{\beta}} \cdot \cos(\alpha_0) + C^{\bar{\omega}_y} \right] \cdot \frac{l}{2V}, \text{ пропорциональный } C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y} \text{ (36)) для}$$

данных α_0, β_0 . Так что:

$$C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y} = C_2^{\omega_{y5}} \cdot \frac{2V}{l} .$$

Используя измеренные комплексы $C_1^{\omega_x}$, $C_1^{\omega_{y5}}$ производных из экспериментов рис. 3 (39) и рис. 5 (54), находим динамическую угловую производную C^β для данных α_0 , β_0 :

$$C^\beta = C_1^{\omega_x} \cdot \sin(\alpha_0) + C_1^{\omega_{y5}} \cdot \cos(\alpha_0) .$$

Выводы.

1. В результате анализа методики [3] измерения динамических угловых производных и неразделенных комплексов вращательных и нестационарных производных $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_x}$, $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$ в условиях требуемых углов атаки и скольжения установлено:

- определение угловых производных и комплексов $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_x}$, $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$, при $\beta_0 \cong \mp 90^\circ$ является неверным,
- определение производной C^β и комплексов $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y}$, $C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z}$ проводится по ошибочным формулам приведения к соответствующим осям.

2. Для устранения ошибок формулы приведения должны быть следующие:

$$C^\beta = C_1^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(\alpha_0) + C_1^{\omega_y} \cdot \frac{\cos(\gamma)}{\cos(\alpha_0) \cdot \cos^2(\beta_0)} ;$$

$$C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_y} = \frac{2V}{l} \cdot \left(C_2^{\omega_z} \cdot \sin(\gamma) + C_2^{\omega_y} \cdot \cos(\gamma) \right) ;$$

$$C_{\text{в.к.}}^{\bar{\omega}_z} = \frac{V}{b_A} \cdot \left(C_2^{\omega_z} \cdot \cos(\gamma) - C_2^{\omega_y} \cdot \sin(\gamma) \right) .$$

3. Предложены колебательные эксперименты при положениях оси колебаний, проходящей через оси O_0Z и O_0Y модели. В результате проведения этих экспериментов (вместе с экспериментами, связанными с колебаниями вокруг оси O_0X) непосредственно (без вычислительных операций) измеряют необходимые комплексы вращательных и нестационарных производных, подготовленные к последующему их разделению. При этом динамическая угловая производная C^α непосредственно измеряется в эксперименте с осью колебаний, проходящей через O_0Z , а производная C^β вычисляется по результатам экспериментов с осью колебаний, проходящей через оси O_0X и O_0Y .

Список литературы.

1. Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В. Аэродинамика самолета: Динамика продольного и бокового движения. – М.: Машиностроение, 1979. –352 с.
2. Курьянов А. И., Столяров Г. И., Тотиашвили Л. Г., Тюнин Н. Н. Экспериментальное исследование вращательных и нестационарных производных самолета в аэродинамических трубах на дозвуковых скоростях. – Труды ЦАГИ, 1985, вып. 2290.
3. Беговщиц В. Н., Жук А. Н., Колинко К. А., Храбров А. Н. Исследование влияния угла скольжения на нестационарные аэродинамические производные. //Ученые записки ЦАГИ. -1996, Том 27, № 3-4. - с. 22-29.
4. Виноградов Ю. А., Жук А. Н., Колинко К. А., Миатов О. Л., Храбров А. Н. К вопросу о разделении нестационарных и вращательных аэродинамических производных по результатам динамических испытаний. //Ученые записки ЦАГИ. – 2003, Том 34, № 3-4. - с. 84-90.
5. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов. /Под редакцией Бюшгенса Г. С. – М.: Наука, 1998. – 816 с.

Захаров Михаил Александрович, аспирант кафедры динамики и управления летательных аппаратов Московского авиационного института (государственного технического университета).