

## **Математическая модель для диагностирования работоспособности летательных аппаратов при неисправностях в виде трещин**

**Беляев Б.В.\*, Голиков И.О.\*, Добролюбов А.Н.\*, Лебедев А.С.\***

*Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,  
ул. Ждановская, 13, Санкт-Петербург, 197198, Россия*

*\*e-mail: [yka@mil.ru](mailto:yka@mil.ru)*

**Статья поступила 22.09.2020**

### **Аннотация**

Статья посвящена актуальной теме диагностики процесса функционирования герметичных отсеков летательных аппаратов, имеющих сквозные микротрещины. В статье получены выражения, позволяющие описывать закономерности изменения утечки рабочей среды через сквозные трещины в зависимости от их изменяющейся геометрии. Разработан алгоритм построения закономерностей изменения утечки рабочей среды из гермоотсеков (систем) при наличии в их оболочках развивающихся сквозных трещин. Приведены типовые закономерности изменения утечки рабочей среды во времени через сквозные трещины. Представлены результаты расчета времени разгерметизации отсека в зависимости от длины сквозной трещины, степени ее раскрытия, а также свободного объема гермоотсека. Результаты, представленные в статье, являются оригинальными. Они представляют значительный интерес и позволяют более корректно проводить диагностику отказов летательных аппаратов в условиях летной эксплуатации.

Полученные результаты позволяют решить и обратную задачу для приборных и обитаемых отсеков космических аппаратов. А именно, имея данные телеметрической информации о параметрах состояния газа (давлении и температуры) внутри отсека и изменении этих параметров в течение времени, появляется возможность диагностики в условиях орбитального полета характеристик микронеплотностей. Это в свою очередь позволяет оценивать резерв времени для локализации негерметичностей или принимать решение для аварийной посадки пилотируемого космического аппарата.

**Ключевые слова:** трещина, утечка, герметичность, диагностика, работоспособность, летательный аппарат, герметичный отсек, математическая модель, остаточный ресурс.

## Введение

Засорение космического пространства объектами естественного и искусственного происхождения представляет собой все возрастающую угрозу для безопасности функционирования орбитальных космических средств (ОКС) [1, 2].

Для многих важных элементов и систем ОКС (баллоны со сжатым газом, топливные баки, трубопроводы пневмогидравлических систем, жидкостный контур системы терморегулирования, герметичные отсеки) основным свойством, определяющим их работоспособное состояние, является герметичность. В условиях глубокого вакуума данное свойство становится определяющим.

### Постановка задачи

Как показали проведенные эксперименты и анализ существующих работ, во многих случаях следствием воздействия космического “мусора” (КМ) является появление в герметичных элементах конструкций ОКС повреждений в виде трещин [3].

Наличие повреждений в виде сквозных трещин в оболочках герметичных отсеков (ГО) и элементов систем ОКС может привести к нарушению их работоспособности и отказу ОКС в целом вследствие утечки рабочего вещества через эти трещины. В условиях орбитального полета утечка может изменяться с течением времени. Знание закономерностей изменения утечки во времени  $Q = f(\tau)$  позволяет прогнозировать длительность работоспособного состояния отсеков и систем и, следовательно, время активного функционирования ОКС по критерию "герметичность".

Течи типа трещин обычно моделируют в виде щелевых каналов вытянутого прямоугольного сечения высотой (раскрытием трещины)  $h$ , длиной на поверхности оболочки  $2l$  и протяженностью, равной толщине оболочки  $\delta$ . Причем раскрытие трещины предполагается намного меньшим ее длины ( $h \ll 2l$ ), а поперечное сечение – неизменным на всей протяженности канала.

Рабочей средой, находящейся внутри герметичного отсека (системы) может быть, как газ, так и жидкость.

### Теоретические исследования

Исходной зависимостью между характерным размером сквозной трещины и потоком газа  $Q_{\Gamma}$  через нее в общем случае молекулярно-вязкостного режима течения может служить уравнение [4, 22, 23]:

$$Q_{\Gamma} = \alpha_{\Gamma}^* h^3 + \beta^* h^2 \quad (1)$$

где  $\alpha_{\Gamma}^* = \frac{l}{12\eta_{\Gamma}\delta} (p_{\text{вх}}^2 - p_{\text{вых}}^2)$ ;  $\beta^* = \frac{4l}{3\delta} \bar{\theta} (p_{\text{вх}} - p_{\text{вых}})$ ;  $\eta_{\Gamma}$  – динамический коэффициент вязкости газа;  $\bar{\theta}$  – средняя тепловая скорость движения молекул газа.

Исходное уравнение расхода жидкости  $Q_{\text{ж}}$  через сквозную трещину имеет вид [5]:

$$Q_{\text{ж}} = \frac{lh^3}{6\eta_{\text{ж}}\delta} (p_{\text{вх}} - p_{\text{вых}}) \quad (2)$$

где  $\eta_{\text{ж}}$  – динамический коэффициент вязкости жидкости.

Так как давление окружающей среды в условиях орбитального полета чрезвычайно мало, то можно положить  $p_{\text{вых}} \cong 0$ , а давление  $p_{\text{вх}}$  равным давлению рабочей среды (газа или жидкости) в отсеке (системе).

Утечку удобнее выразить через один параметр, зависящий от геометрии сквозной трещины, а именно через ее длину. Максимальное раскрытие трещины задается соотношением [6, 11, 12, 17-21]:

$$h_{\text{max}} = 4\sigma l / E \quad (3)$$

где  $\sigma$  – напряжения, действующие на элемент ГО (системы) с трещиной;  $E$  – модуль

упругости конструкционного материала.

Необходимо отметить, что работоспособность отсека (системы), находящегося в режиме циклического нагружения, будет определяться не только наличием сквозных трещин в материале оболочки ГО (системы), но и их развитием. Если сквозная трещина попадает в область устойчивого развития, т.е. удовлетворяет критериям устойчивости и ненулевой скорости развития, то под действием циклического (термоциклического) нагружения она будет расти. Геометрия трещины ( $l$ ,  $h$ ) при этом с течением времени будет изменяться, что приведет к увеличению утечки из отсека (системы).

Так как для трещин малого размера в процессе их усталостного развития отношение раскрытия и длины остается постоянным [6, 10, 18-21]:

$$h(N) / l(N) = \text{const} = 4\sigma / E, \quad (4)$$

то будут справедливы следующие соотношения:

1. для жидкости и вязкостного режима истечения газа

$$\frac{q(\tau)}{q_0} = \left[ \frac{l(N)}{l_0} \right]^4, \quad (5)$$

2. для молекулярного режима истечения газа

$$\frac{q(\tau)}{q_0} = \left[ \frac{l(N)}{l_0} \right]^3, \quad (6)$$

где  $q_0$ ,  $q(\tau)$ ,  $l_0$ ,  $l(N)$  – начальные и текущие значения пропускной способности и длины трещины соответственно,  $N$  – число циклов нагружения.

Выполнение условия (4) позволяет с учетом (1) – (3) получить выражения, описывающие закономерности изменения утечки рабочей среды через сквозные трещины в зависимости от их изменяющейся геометрии:

$$1. \text{ для жидкости} \quad Q_{\text{ж}}(\tau) = \alpha_{\text{ж}} [l(N)]^4 p_{\text{ж}}, \quad (7)$$

$$2. \text{ для газа} \quad Q_{\text{г}}(\tau) = \alpha_{\text{г}} [l(N)]^4 p_{\text{г}}^2 + \beta [l(N)]^3 p_{\text{г}}, \quad (8)$$

где  $\alpha_{\text{ж}} = 32 \sigma^3 / (3E^3 \eta_{\text{ж}} \delta)$ ;  $\alpha_{\text{г}} = 16\sigma^3 / (3E^3 \eta_{\text{г}} \delta)$ ;  $\beta = 64\sigma^2 \sqrt{\frac{8R_0 T}{\pi M}} / (3E^2 \delta)$ ;  $R_0$  – универсальная газовая постоянная;  $T$  – температура газа в отсеке (системе);  $M$  – молекулярная масса газа.

Используя уравнение Париса для описания кинетики распространения сквозной трещины, систему уравнений для построения закономерностей изменения утечки во времени  $Q = f(\tau)$  можно представить в следующем виде:

$$Q_j(\tau) = \alpha_j [l(N)]^4 p_j^k + \beta [l(N)]^3 p_j; \quad (9)$$

$$\frac{dl}{dN} = C_2 [\Delta \sigma \sqrt{\pi l(N)} \cdot Y(l)]^{n_2}, \quad (10)$$

с начальными условиями

$$Q_j(\tau) \Big|_{l(N)=l_0} = Q_0, \quad (11)$$

$$l(N) \Big|_{N=0} = l_0, \quad (12)$$

где  $j$  – "для жидкости" или "для газа";  $k = 1; 2$ ;  $C_2, n_2$  – характеристики циклической трещиностойкости конструкционного материала в заданных условиях эксплуатации.

Однако, следует отметить, что развитие коротких трещин усталости существенно отличается от закономерностей, установленных для длинных трещин. Это характерно для тонкостенных элементов конструкций, а корпуса ГО (элементы систем) в конструктивном исполнении представляют собой тонкостенные оболочки.

Для учета особенностей распространения коротких трещин усталости разработан ряд формальных (искусственных) подходов, в основе которых лежит модель, базирующаяся на введении понятия эквивалентного размера трещины [6, 17-21]. Согласно этой модели, заложенную в материале дефектность моделируют эквивалентной трещиной размером  $l_3$ , который прибавляют к размеру реальной трещины при расчете коэффициента интенсивности напряжений (КИН):

$$\Delta K = \Delta \sigma \sqrt{\pi(l+l_3)} \cdot Y(l+l_3), \quad (13)$$

С учетом соотношения (13) выражение для КИН коротких усталостных трещин можно представить в следующем виде:

$$\Delta K = \Delta \sigma_{\kappa} \sqrt{\pi l} \cdot Y(l), \quad (14)$$

где  $\Delta \sigma_{\kappa} = \gamma \Delta \sigma$ ;  $\gamma = (1+l_3/l)^{1/2}$ .

Эквивалентный размер  $l_3$  определяется выражением [6]:

$$l_3 = \left[ \frac{\Delta K_{th}}{\sigma_{-1} \cdot Y(l)} \right]^2 \frac{1}{\pi},$$

Рассмотренные подходы дают возможность обоснованно подойти к решению задачи прогнозирования остаточного ресурса герметичных элементов конструкций со сквозными трещинами.

В общем случае временная зависимость  $Q(\tau)$  определяется как функция случайного аргумента  $Q(\tau) = f[l(N)]$ . Так как зависимость между  $Q$  и  $l$  существенно нелинейная, алгоритм получения реализаций  $Q(\tau)$  может быть представлен в следующей последовательности:

1. Построение зависимости длины сквозной трещины от числа циклов нагружения  $l=f(N)$  путем интегрирования уравнения (10), описывающего скорость ее распространения с учетом (14).

2. Расчет изменения пропускной способности сквозной трещины  $q$  в зависимости от ее длины по соотношениям (5), (6).

3. Построение функциональной зависимости  $Q = f[l(N)]$  по формулам (7) или (8).

4. Построение закономерностей изменения утечки  $Q$  во времени  $\tau$  в зависимости от развивающихся сквозных трещин.

5. Определение времени (или числа циклов нагружения) до нарушения работоспособного состояния отсеком (системой), которое соответствует моменту  $Q(\tau) > Q_{\text{пд}}$ , где  $Q_{\text{пд}}$  – предельно допустимое значение утечки.

Алгоритм расчета реализован в виде вычислительной программы для ПЭВМ.

По разработанной математической модели, а также на основе результатов проведенных экспериментальных исследований [7, 8, 13, 14], были выполнены расчеты времени функционирования ГО ОКС при наличии в их оболочках сквозных трещин заданных размеров.



На рисунке 1 показана зависимость утечки газа от характерных размеров сквозной трещины.

Типовые закономерности изменения утечки рабочей среды во времени через развивающиеся сквозные трещины приведены на рисунке 2.

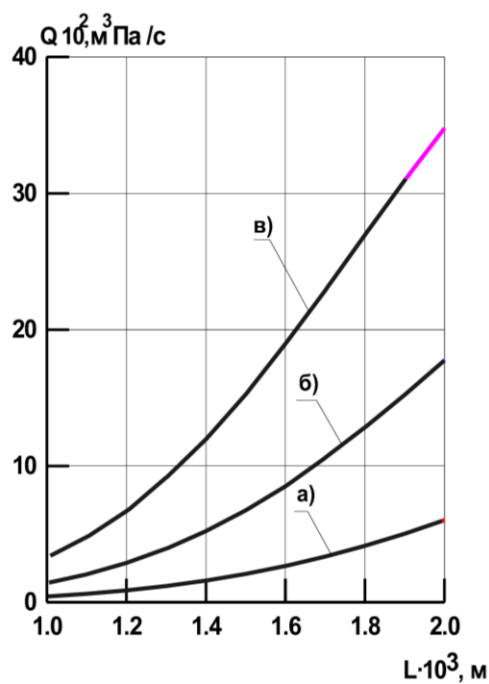


Рисунок 1. Зависимость утечки газа из гермоотсека от длины сквозной трещины и степени ее раскрытия  
а)  $h=1,0$ ; б)  $h=1,5$ ; в)  $h=2,0$ .

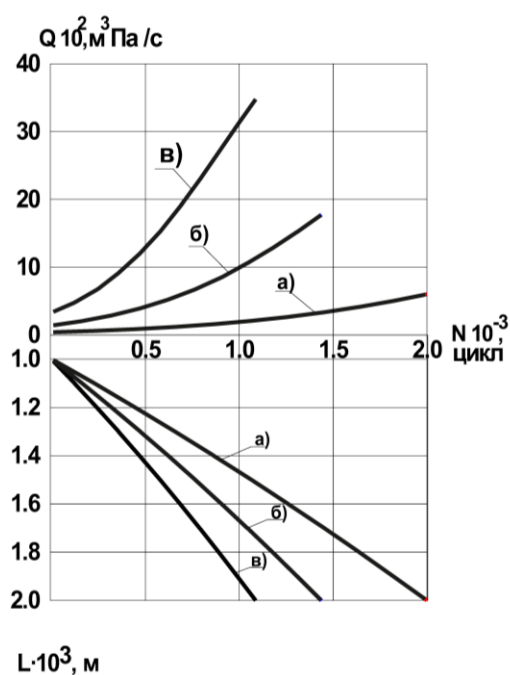


Рисунок 2. Зависимость изменения утечки газа во времени через развивающиеся сквозные трещины

а)  $\sigma = 1,0$ ; б)  $\sigma = 1,5$ ; в)  $\sigma = 2,0$ .

Зная закономерность изменения выходного параметра во времени  $Q(\tau)$ , можно определить изменение давления  $p_r$  в гермоотсеке (системе) объемом  $V_c$ , как функцию времени путем совместного решения системы уравнений (9) и (10) с учетом (14) и уравнения:

$$Q(\tau) = -V_c \frac{dp}{d\tau},$$

Если в гермоотсеке отсутствует система поддержания заданного давления, то в общем случае молекулярно-вязкостного режима истечения газа значение давления в ГО в заданный момент времени  $\tau$  будет находиться в интервале:

$$p_B(\tau) < p_{MB}(\tau) < p_M(\tau),$$

где

$$p_M(\tau) = p_o \exp\left[-\frac{Q_M(\tau)}{p_o V_c} \tau\right], \quad (15)$$

$$p_B(\tau) = \left[ \frac{p_o}{1 + \frac{Q_B(\tau)}{p_o V_c} \tau} \right], \quad (16)$$

где  $p_o$  – давление в ГО (системе) в момент появления сквозной трещины.

Выражение (15) соответствует изменению давления при молекулярном режиме истечения газа  $Q_M(\tau)$  через сквозную трещину, выражение (16) – при вязкостном режиме истечения  $Q_B(\tau)$ .

В случае, если исходная сквозная трещина попадает в область нулевых скоростей ( $dl/dN=0$ ), то алгоритм упрощается, и расчет проводится по формулам (7), (8), (15), (16) в соответствии с начальными условиями (11) и (12).

На рисунках 3, 4 представлены результаты расчета времени разгерметизации отсека в зависимости от длины сквозной трещины, степени ее раскрытия, а также свободного объема гермоотсека.

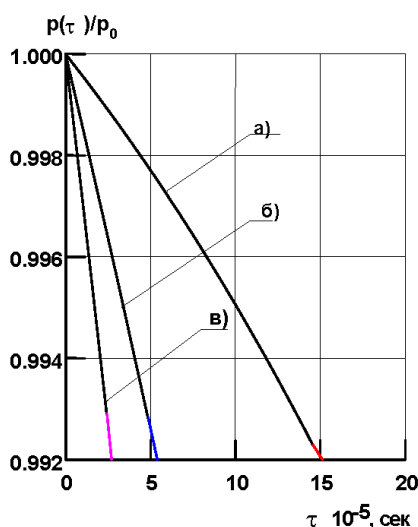


Рисунок 3. Зависимость времени разгерметизации отсека от его свободного объема  $L=10^{-3}$  м;  $h=1$  а)  $\sigma=1,0$ ; б)  $\sigma=1,5$ ; в)  $\sigma=2,0$ .



Рисунок 4. Зависимость времени разгерметизации отсека от свободного объема и начальных размеров исходных сквозных трещин  
а)  $V=1,5$  м,  $L=110$  м;  $h=1,0$ ; б)  $V=47$  м;  $L=210$  м;  $h=1,5$ ;  
в)  $V=3$  м;  $L=1,510$  м;  $h=1,0$ .

Из приведенных зависимостей видно, что значения утечки газа существенно зависят от степени раскрытия трещины, определяемой уровнем эксплуатационного нагружения. Аналогичные зависимости могут быть построены для различных условий нагружения и существенных для поврежденного элемента конструкции диапазонов воздействующих эксплуатационных факторов.

### **Заключение**

Таким образом, изложенные подходы позволяют более корректно обосновывать и прогнозировать сроки эксплуатации герметичных элементов конструкций, имеющих повреждения в виде сквозных трещин, что, в свою очередь, дает возможность определить основные направления работ, направленные на обеспечение безопасности функционирования ОКС в условиях воздействия космического мусора [9, 15-17].

### **Библиографический список**

1. Абдурахимов А.А., Скворцов Д.В. Методологические основы обеспечения живучести космических аппаратов // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2013. № 640. С. 7 - 19.
2. Баркова М.Е. Космический аппарат для утилизации космического мусора в околоземном пространстве // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35927>
3. Зинченко Л.В., Зинченко Д.А. Расчет ударных повреждений при высокоскоростном соударении осколочно-метеорных частиц с элементами конструкций космических аппаратов // Конструкции из композиционных материалов. 2018. № 1 (149). С. 3 - 6.
4. Фролов Е.С., Минайчев В.Е. Вакуумная техника: Справочник. – М.: Машиностроение, 1985. - 360 с.

5. Голубев А.И., Кондаков Л.А. Уплотнения и уплотнительная техника: Справочник. – М.: Машиностроение, 1986. - 464 с.
6. Механика разрушения и прочность материалов: Справочное пособие в 4 т. / Под общей ред. Панасюка В.В. – Киев: Наукова думка, 1990. Т. 4. – 679 с.
7. Гаркушин И.К., Лаврентьева О.В., Истомова М.А., Калмыкова О.Ю. Конструкционные материалы: состав, свойства, применение. – Самара: Самарский государственный технический университет, 2015. – 239 с.
8. Гецов Л.Б. О некоторых особенностях зарождения и развития трещин при усталостном и термоусталостном нагружении // Проблемы прочности. 1973. № 7. С. 61 - 63.
9. Зеленцов В.В. Защита космического аппарата от воздействия фрагментов мелкого космического мусора // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2015. № 6. С. 123 – 142.
10. Кузнецов Е.Б. Леонов С.С. Математическое моделирование чистого изгиба балки из авиационного материала в условиях ползучести // Труды МАИ. 2013. № 65. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35927>
11. Ендогур А.И. Кравцов В.А. Напряженное состояние композиционной панели в зоне отверстия // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=36558>
12. Голуб В.П., Плащинская А.В. О влиянии концевой пластической зоны на рост усталостных трещин в изотропных пластинках при одноосном растяжении-сжатии // Теоретическая и прикладная механика. 2003. № 38. С. 91 - 96.

13. Antunes F.V., Chegini F.G., Branco R., Camas D. A numerical study of plasticity induced crack closure under plane strain conditions // International Journal of Fatigue, 2015, no. 71, pp. 75 - 86. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2014.03.016](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2014.03.016)
14. Yates J.R., Zanganeh M., Tomlinson R.A., Brown M.W., Garrido F.A. Crack paths under mixed mode loading // Engineering Fracture Mechanics, 2008, no. 75, pp. 319 - 330.
15. Шакиртов М.М., Шабанов А.П., Корнев В.М. Построение диаграмм разрушения для пластин с трещиновидным дефектом на основе необходимых и достаточных критериев // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54. № 2. С. 163 - 170.
16. Шакиртов М.М. О влиянии коэффициента асимметрии цикла внешней нагрузки на характеристики цикла нагружения материала при вершине трещиновидного дефекта // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75559>
17. Шабанов А.П. О механизме роста усталостной трещины в поле внешних сжимающих напряжений // Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 6. С. 108 - 115.
18. Хохлов А.В. Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75559>
19. Кутовой В.П., Шабанов А.П., Шакиртов М.М. Исследование напряженно-деформированного состояния вершины усталостной трещины в головке рельса // Известия Транссиба. 2013. № 1 (13). С. 89 - 94.

20. Шабанов А.П. Возможная модель развития усталостной трещины в упрочняющихся материалах // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 5. С. 40 - 47.
21. Коцаньда С. Усталостное растрескивание металлов. - М.: Металлургия, 1990. - 623 с.
22. Трощенко В.Т. Сосновский Л.А. Сопротивление усталости металлов и сплавов: — Киев, Наукова думка, 1987. – 175 с.
23. Головин С.А., Пушкар А. Микропластичность и усталость металлов. - М.: Металлургия, 1980. - 240 с.



# Mathematical model for operability diagnosing of flying vehicles at crack-type faults

**Belyaev B.V.\*, Golicov I.O.\*, Dobrolyubov A.N.\*, Lebedev A.S.\***

*Military space Academy named after A.F. Mozhaisky,  
13, Zdanovskaya str., Saint Petersburg, 197198, Russia*

*\*e-mail: [yka@mil.ru](mailto:yka@mil.ru)*

## **Abstract**

Recently, the acute issue of the possibility of orbital space vehicles flight prolongation after colliding with the object of technogenic origin, which may lead to sealed structures damaging in the form of surface micro-cracks arises.

The urgency of this problem will enhance in the oncoming years due to the current tendency of near-Earth space contamination increasing by technogenic particles. In this regard, failures diagnostics of flying vehicles with the damages if the form of cracks becomes of vital importance, since it will allow substantiating terms of space vehicles staying in orbit to fulfill the set task.

The article studied the issues of diagnostics of the flying vehicles' sealed compartments with through micro-cracks functioning. The authors obtained equations allowing describe regularities of changing of the working medium leakage from sealed compartments through the through cracks, depending on their changing geometry. The algorithm of plotting regularities of the working medium leakage from the sealed compartments change in the presence of developing the through cracks in their shells was developed. The article presents typical regularities of the working medium leakage through the through cracks in time. Computational results of the compartment

depressurizing depending on the through crack length, the degree of its opening, as well as free volume of the sealed compartment are presented.

The results, obtained in this work, allow solving the inverse problem for the instrument and habitable spacecraft compartments. Having the telemetry data on the gas state parameters (pressure and temperature) inside the compartment and these parameters changes with time, a possibility of diagnosing micro-dents characteristics under conditions of the orbital flight emerges. This, in its turn, allows assessing the time margin for the leakiness localization, or taking decision on the emergency landing of manned spacecraft.

The results of this work allow more quick failures diagnostics of flying vehicles operating under conditions of of the near-Earth space clogging with objects of natural and artificial origin.

**Keywords:** crack, leak, air-tightness, diagnostics, operability, aircraft, sealed compartment, mathematical model, residual life.

### References

1. Abdurakhimov A.A., Skvortsov D.V. *Trudy VoЕННО-kosmicheskoi akademii imeni A.F. Mozhaiskogo*, 2013, no. 640, pp. 7 - 19.
2. Barkova M.E. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35927>
3. Zinchenko L.V., Zinchenko D.A. *Konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov*, 2018, no. 1 (149), pp. 3 - 6.

4. Frolov E.S., Minaichev V.E. *Vakuumnaya tekhnika: Spravochnik* (Vacuum technology: Reference book), Moscow, Mashinostroenie, 1985, 360 p.
5. Golubev A.I., Kondakov L.A. *Uplotneniya i uplotnitel'naya tekhnika: Spravochnik* (Seals and sealing techniques: Reference book), Moscow, Mashinostroenie, 1986, 464 p.
6. Panasyuka V.V. *Mekhanika razrusheniya i prochnost' materialov: Spravochnoe posobie* (Fracture mechanics and strength of materials: Reference guide), Kiev, Naukova dumka, 1990, vol. 4, 679 p.
7. Garkushin I.K., Lavrent'eva O.V., Istomova M.A., Kalmykova O.Yu. *Konstruktсионnye materialy: sostav, svoystva, primenenie* (Structural materials: composition, properties, application), Samara, Samarskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet, 2015, 239 p.
8. Getsov L.B. *Problemy prochnosti*, 1973, no. 7, pp. 61 - 63.
9. Zelentsov V.V. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.E. Baumana*, 2015, no. 6, pp. 123 – 142.
10. Kuznetsov E.B. Leonov S.S. *Trudy MAI*, 2013, no. 65. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35927>
11. Endogur A.I. Kravtsov V.A. *Trudy MAI*, 2013, no. 64. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=36558>
12. Golub V.P., Plashchinskaya A.V. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika*, 2003, no. 38, pp. 91 - 96.
13. Antunes F.V., Chegini F.G., Branco R., Camas D. A numerical study of plasticity induced crack closure under plane strain conditions, *International Journal of Fatigue*, 2015, no. 71, pp. 75 - 86. DOI: [10.1016/j.ijfatigue.2014.03.016](https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2014.03.016)

14. Yates J.R., Zanganeh M., Tomlinson R.A., Brown M.W., Garrido F.A. Crack paths under mixed mode loading, *Engineering Fracture Mechanics*, 2008, no. 75, pp. 319 - 330.
15. Shakirtov M.M., Shabanov A.P., Kornev V.M. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2013, vol. 54, no. 2, pp. 163 - 170.
16. Shakirtov M.M. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75559>
17. Shabanov A.P. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2005, vol. 46, no. 6, pp. 108 - 115.
18. Khokhlov A.V. *Trudy MAI*, 2016, no. 91. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75559>
19. Kutovoi V.P., Shabanov A.P., Shakirtov M.M. *Izvestiya Transsiba*, 2013, no. 1 (13), pp. 89 - 94.
20. Shabanov A.P. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*, 2010, no. 5, pp. 40 - 47.
21. Kotsan'da S. *Ustalostnoe rastreskivanie metallov* (Fatigue cracking of metals), Moscow, Metallurgiya, 1990, 623 p.
22. Troshchenko V.T. Sosnovskii L.A. *Soprotivlenie ustalosti metallov i splavov* (Fatigue resistance of metals and alloys), Kiev, Naukova dumka, 1987, 175 p.
23. Golovin C.A., Pushkar A. *Mikroplastichnost' i ustalost' metallov* (Microplasticity and fatigue of metals), Moscow, Metallurgiya, 1980, 240 p.