

Исследование влияния движения подъемника на динамику неэкваториального космического лифта

Пикалов Р.С.

Самарский государственный аэрокосмический университет

имени академика С.П. Королева, СГАУ,

Московское шоссе 34, Самара, 443086, Россия

e-mail: pickalovrs@gmail.com

Аннотация

В работе исследована динамика неэкваториального космического лифта, с учетом движения подъемника. Трос моделируется парой неупругих нерастяжимых стержней, переменной длины и переменной площади поперечного сечения. Построена математическая модель, описывающая пространственное движение космического лифта. Проведено численное моделирование системы во время подъема груза, для случаев экваториального и неэкваториального лифта. Установлено, что движение подъемника приводит к возникновению поперечных колебания в тросе. Исследовано движение груза после отделения от лифта. Получена зависимость радиусов апогея и перигея от высоты отделения груза.

Ключевые слова: космический лифт, подъемник, трос, неэкваториальный, орбитальное движение, полезная нагрузка.

Введение

Задача доставки грузов на орбиту имеет большое практическое значение. На сегодняшний день единственным способом вывода груза являются ракеты-носители. К недостаткам этого способа транспортировки можно отнести высокую стоимость запуска, негативное экологическое влияние на атмосферу, засорение околоземного пространства космическим мусором. Альтернативой ракетному способу выведения может стать космический лифт, лишенный указанных недостатков [1-3]. Среди существующих проектов наиболее проработанным является минималистический лифт Bradley Edwards-а [3]. В рамках его концепции основу лифта составляет протяженный трос, длиной порядка 100-160 тыс. км. Он изготовлен из материала на основе углеродных нанотрубок. Этот материал обладает всеми свойствами необходимыми для строительства и функционирования космического лифта [4]. По тросу предполагается пустить один или несколько подъемников, которые смогут выводить груз на орбиту. До момента отделения энергия тратится на увеличение высоты, а разгон до космических скоростей получается автоматически, поскольку полезная нагрузка поднимаясь по тросу движется с угловой скоростью лифта, увеличивая тем самым свою линейную скорость.

Проблеме космического лифта посвящено много исследований. Большой вклад в данном направлении внесли Г.Г. Поляков [5] и J. Pearson [6]. Изучению влияния движения подъемника на динамику космического лифта, посвящены исследования [7-10]. Результаты показывают, что его движение приводит к раскачке лифта. После остановки подъемника лифт колеблется около своего положения

равновесия, колебания не затухают. В работах [7-9] предложены способы демпфирования колебаний. Предложенные схемы позволяют в разной степени уменьшить негативное влияние оказываемое движением подъемника. В рассмотренных работах исследовался экваториальный лифт, и не рассматривалась динамика неэкваториального лифта. То есть лифта у которого трос закреплен не на экваторе. Таким образом задача изучения динамики неэкваториального космического лифта во время подъема груза далека до завершения.

Целью данной работы является изучение динамики неэкваториального лифта, при подъеме груза на орбиту. Для этого разработана пространственная математическая модель неэкваториального космического лифта, учитывающая возможность изгиба троса. Данная работа является продолжением [10], где рассматривался случай экваториального космического лифта.

Математическая модель неэкваториального космического лифта

Для изучения динамики космического лифта используется два типа моделей: трос рассматривается как неупругий стержень [7, 8]; многоточечные модели, в которых трос разделен на n отрезков [9, 11]. В моделях первого типа не учитывается изгиб троса под действие сил инерции. Результаты, полученные с их помощью хорошо согласуются с результатами более сложных моделей. В [12] показано, что они могут быть использованы в качестве первого приближения для исследования динамики космического лифта. Модели второго типа позволяют

учитывать изгиб троса. Увеличивая число отрезков можно повысить точность расчетов. При этом с ростом их числа растут и затраты машинного времени.

В работе [10], была разработана модель позволяющая учесть изгиб троса, но не требующая больших вычислительных затрат. В рамках этой модели трос представлялся в виде двух стержней переменной длины. Первый соответствовал участку соединяющему точку крепления и движущейся по тросу подъемник, второй соединял подъемник и противовес, расположенный на конце троса. По мере восхождения подъемника длина первого участка троса растет, второго - уменьшается. Под действием различных возмущений стержни могут отклоняться в плоскости экватора от направления местной вертикали. Распространим идею на трехмерный случай.

Рассмотрим пространственную механическую систему состоящую из троса, противовеса и подъемника, рисунок 1. Трос разделен на два сегмента. Они моделируются как неупругие стержни переменной длины и площади поперечного сечения. Противовес и подъемник рассматриваются как материальные точки. Первый сегмент троса соединяет точку крепления А и подъемник В, второй - подъемник В и противовес С. Будем считать, что движение происходит в Ньютоновском гравитационном поле, влиянием атмосферы и других возмущающих факторов будем пренебрегать.

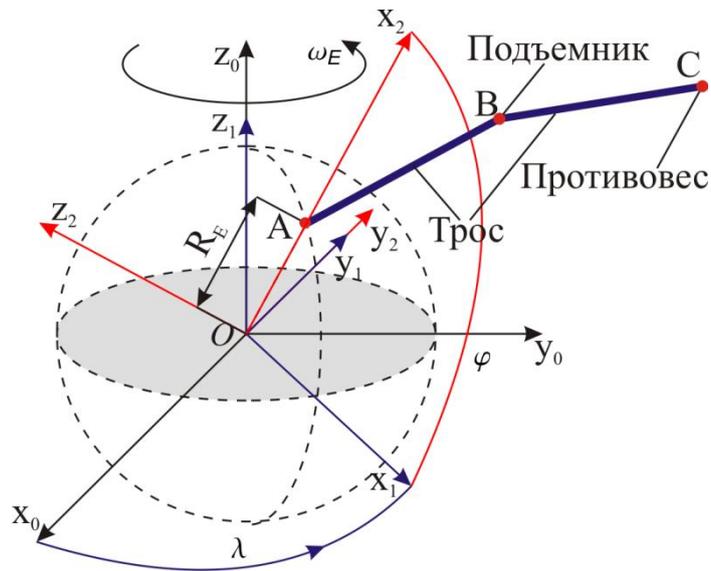


Рисунок 1 - Неэкваториальный космический лифт

Рассматриваемая система имеет 5 степеней свободы. В качестве обобщенных координат q_i выберем: α_1, α_2 - углы отклонения первого и второго сегмента троса от плоскости Ox_1x_2 , ϕ_1, ϕ_2 - углы отклонения первого и второго сегмента троса от плоскости Ox_0x_2 , r - расстояние от точки закрепления троса к Земле до подъемника(рисунок 2).

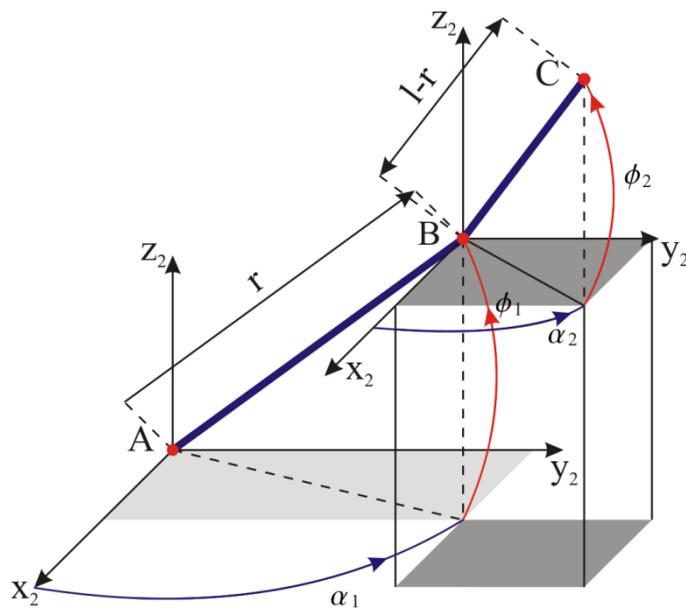


Рисунок 2

Введем системы координат: неподвижную $Ox_0y_0z_0$; подвижную $Ox_1y_1z_1$, вращающуюся вместе с Землей; подвижную систему $Ox_2y_2z_2$, полученную из $Ox_1y_1z_1$ путем ее поворота на угол φ вокруг оси Oy_1 (рисунок 1), где φ - широта точки крепления троса к Земле. Ось Ox_2 совпадает с направлением местной вертикали в точке А. Oy_2 совпадает с Oy_1 , Oz_2 дополняет систему до правой. Вращение $Ox_1y_1z_1$ происходит вокруг Oz_0 . Оси Oz_0 и Oz_1 совпадают.

Составим уравнения Лагранжа второго рода [13]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = 0, \quad (1)$$

где $L = T - P$ - Лагранжиан системы, T и P кинетическая и потенциальная энергия соответственно, определены формулами:

$$T = \frac{1}{2} m_B (\dot{\mathbf{R}}_B \cdot \dot{\mathbf{R}}_B) + \frac{1}{2} m_C (\dot{\mathbf{R}}_C \cdot \dot{\mathbf{R}}_C) + \frac{1}{2} \int_0^l \rho(s) (\dot{\mathbf{R}}(s) \cdot \dot{\mathbf{R}}(s)) ds, \quad (2)$$

$$P = - \frac{\mu m_B}{|\mathbf{R}_B|} - \frac{\mu m_C}{|\mathbf{R}_C|} - \mu \int_0^l \frac{\rho(s)}{|\mathbf{R}(s)|} ds, \quad (3)$$

где μ - гравитационный параметр Земли. \mathbf{R}_B , \mathbf{R}_C , $\mathbf{R}(s)$ - радиус-векторы подъемника, противовеса и точек троса соответственно. $\rho(s)$ - линейная плотность определяемая формулой [7, 10]:

$$\rho(s) = \bar{\rho} A_m \exp \left[\frac{\rho g_0 R_E^2}{\sigma R_G} \left(\frac{3}{2} - \frac{R_G}{s + R_E} - \frac{(s + R_E)^2}{2R_G^2} \right) \right], \quad (4)$$

где $\bar{\rho}$ - средняя плотность материала троса, A_m - максимальная площадь поперечного сечения троса, g_0 - значение ускорения свободного падения на уровне моря, σ - максимальное напряжение в тросе, R_G - радиус геостационарной орбиты.

Положение подъемника и противовеса в неподвижной системе координат $Ox_0y_0z_0$, определяется радиус-векторами:

$$\mathbf{R}_B = \mathbf{M}_{\lambda\varphi} \begin{pmatrix} R_E + r \cos \phi_1 \cos \alpha_1 \\ r \cos \phi_1 \sin \alpha_1 \\ r \sin \phi_1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{M}_{\lambda\varphi} \begin{pmatrix} R_E + r \cos \phi_1 \cos \alpha + (1-r) \cos \phi_2 \cos \alpha_2 \\ r \cos \phi_1 \sin \alpha_1 + (1-r) \cos \phi_2 \sin \alpha_2 \\ r \sin \phi_1 + (1-r) \sin \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где R_E - радиус Земли, l - длина всего троса, $\mathbf{M}_{\lambda\varphi}$ - матрица перехода от подвижной системы координат $Ox_2y_2z_2$ к неподвижной $Ox_0y_0z_0$

$$\mathbf{M}_{\lambda\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda & -\sin \lambda & -\cos \lambda \sin \varphi \\ \cos \varphi \sin \lambda & \cos \lambda & -\sin \lambda \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь $\lambda = \omega_E t$ - угол задающий положение системы $Ox_1y_1z_1$ относительно $Ox_0y_0z_0$.

ω_E - угловая скорость вращения Земли.

Запишем радиус-вектор точек троса. Возьмем на космическом лифте произвольную точку, находящуюся на расстоянии s от точки крепления А. Радиус-вектор этой точки будет определяться формулой:

$$\mathbf{R}(s) = \begin{cases} \mathbf{R}_{AB}(s), & s < r, \\ \mathbf{R}_{BC}(s), & s \geq r, \end{cases} \quad (8)$$

где $\mathbf{R}_{AB}(s)$ соответствует первому сегменту троса, $\mathbf{R}_{BC}(s)$ - второму, имеют следующий вид:

$$\mathbf{R}_{AB}(s) = \mathbf{M}_{\lambda\phi} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_E + s \cos \phi_1 \cos \alpha_1 \\ s \cos \phi_1 \sin \alpha_1 \\ s \sin \phi_1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\mathbf{R}_{BC}(s) = \mathbf{M}_{\lambda\phi} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_E + r \cos \phi_1 \cos \alpha + (s-r) \cos \phi_2 \cos \alpha_2 \\ r \cos \phi_1 \sin \alpha_1 + (s-r) \cos \phi_2 \sin \alpha_2 \\ r \sin \phi_1 + (s-r) \sin \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Подставляя формулы (5), (6), (8) в формулы (1)-(3) получим систему из пяти уравнений, описывающих поведение рассматриваемой системы.

Применим широко используемый в механике космического полета прием и перейдем в полученной системе уравнений движения от времени t к новой независимой переменной - углу истинной аномалии θ [14]. Для этого используем замену

$$\left\{ t = \frac{\theta}{\omega_E}, \dot{f}(t) = \omega_E f'(\theta), \ddot{f}(t) = \omega_E^2 f''(\theta) \right\}, \quad (11)$$

где $f(t)$ - произвольная функция времени.

В литературе рассматривается несколько законов управления движением подъемника по тросу. Воспользуемся простейшим законом [10], согласно которому в начале подъемник движется с ускорением 2 м/с^2 , до момента, когда его относительная скорость движения вдоль троса не достигнет значения 50 м/с . После это он движется с постоянной скоростью. На последнем этапе подъемник

тормозиться с ускорением -2 м/с^2 , до полной остановки. После подстановки закона движения в систему (1), число уравнений сокращается до четырех.

Анализ влияния движения подъемника на динамику лифта

Исследуем влияние подъемника на динамику космического лифта. Рассмотрим космический лифт, имеющий следующие параметры [7]: длина троса $l = 1.44 \times 10^8 \text{ м}$, максимальная площадь поперечного сечения $A_m = 10 \text{ мм}^2$, средняя плотность $\bar{\rho} = 1300 \text{ кг/м}^3$, предел прочности материала троса $\sigma = 35 \text{ ГПа}$. Масса противовеса $m_c = 30000 \text{ кг}$, масса подъемника $m_b = 100 \text{ кг}$. В качестве начальных условий выберем:

$$\alpha_1(0) = 0, \alpha_2(0) = 0.01, \phi_1(0) = 0.01, \phi_2(0) = 0.01, r(0) = 1, \\ \dot{\alpha}_1(0) = 0, \dot{\alpha}_2(0) = 0, \dot{\phi}_1(0) = 0, \dot{\phi}_2(0) = 0, \dot{r}(0) = 1.$$

Отметим, что полученная модель имеет особые точки $r = 0$ и $r = 1$, поэтому в начальных условиях оговаривается начальная высота расположения груза один метр, движение заканчивается за 1000 метров до станции противовеса.

Сравним случаи экваториального и неэкваториального лифта, для которого широта точки закрепления $\varphi = 5$ градусам. В обоих случаях будет наблюдаться пространственное движение, это обусловлено выбором начальных условий $\phi_1(0) \neq 0, \phi_2(0) \neq 0$.

На рисунках (3, 4, 6, 7), показаны графики зависимости углов $\alpha_1, \alpha_2, \phi_1, \phi_2$ от угла истинной аномалии θ . Каждый из рисунков содержит два графика, а и б.

Графики а соответствуют случаю экваториального лифта (угол $\varphi = 0$), б для не экваториального лифта.

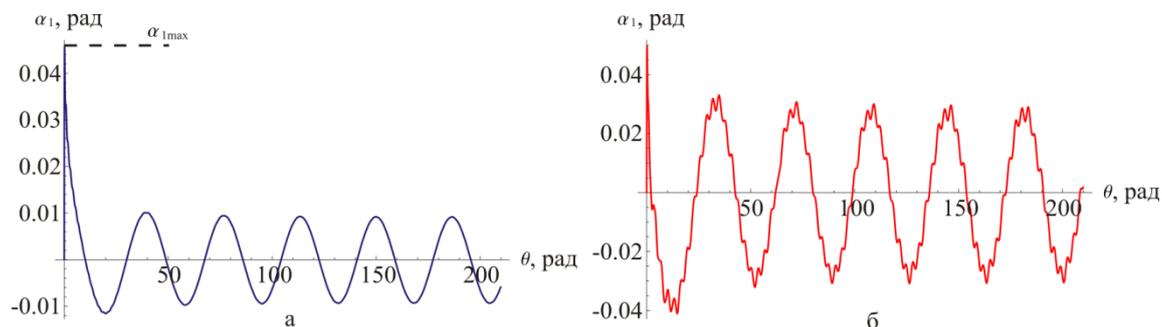


Рисунок 3 - Графики колебаний угла α_1 : (а) экваториальный; (б)

неэкваториальный лифт

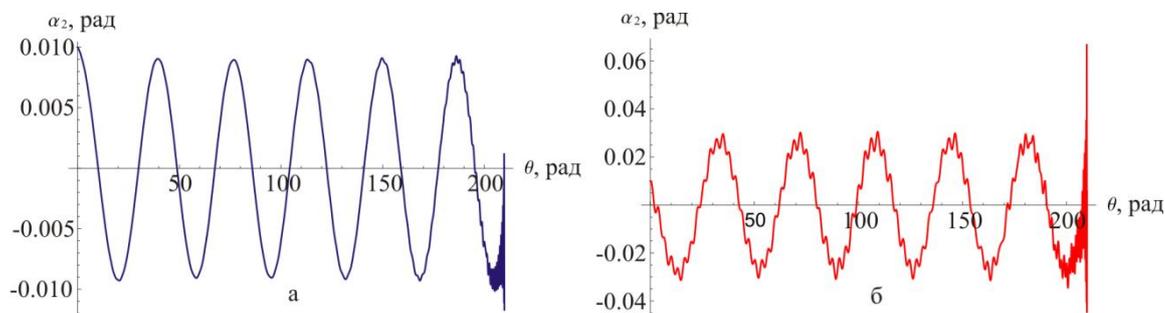


Рисунок 4 - Графики колебаний угла α_2 : (а) экваториальный; (б)

неэкваториальный лифт

Из рисунков 3-4 видно, что в случае не экваториального лифта, в колебаниях по углам α_1, α_2 появляется дополнительная гармоника, которая вносит существенный вклад в форму колебания троса. Амплитуда колебаний увеличивается. Из рисунка 3 видно, что на начальном этапе движения наблюдается резкое увеличение угла α_1 , что связано с малым начальным размером первого сегмента троса. Сравнительно небольшое отклонение угла α_1 , вызывает большое линейное отклонение от вертикали, рисунок 5.

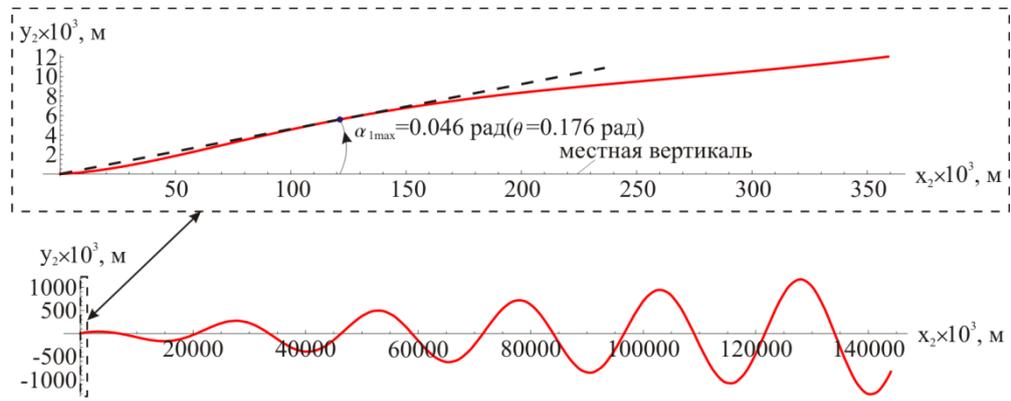


Рисунок 5 - Траектория движение подъемника в плоскости Ox_2y_2

На рисунке 5 изображена траектория движения подъемника в плоскости Ox_2y_2 , для случая экваториального лифта. Точкой $\alpha_{1max} = 0.0461$ рад, обозначен момент максимального отклонения угла α_1 от местной вертикали.

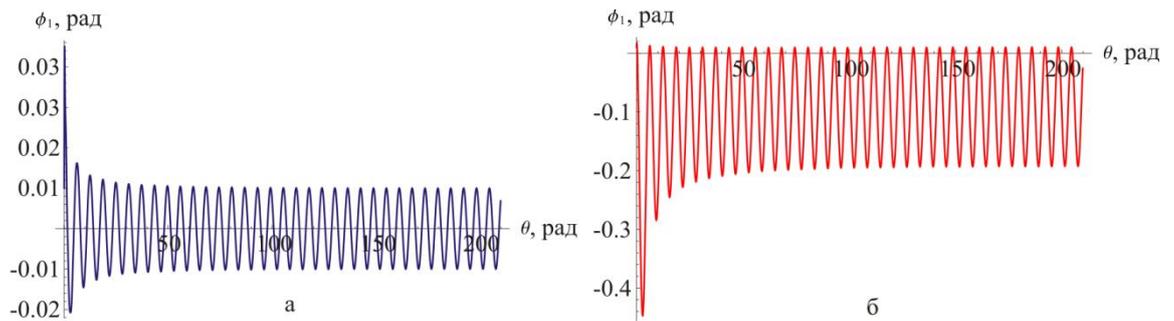


Рисунок 6 - Графики колебаний угла ϕ_1 : (а) экваториальный; (б)

неэкваториальный лифт

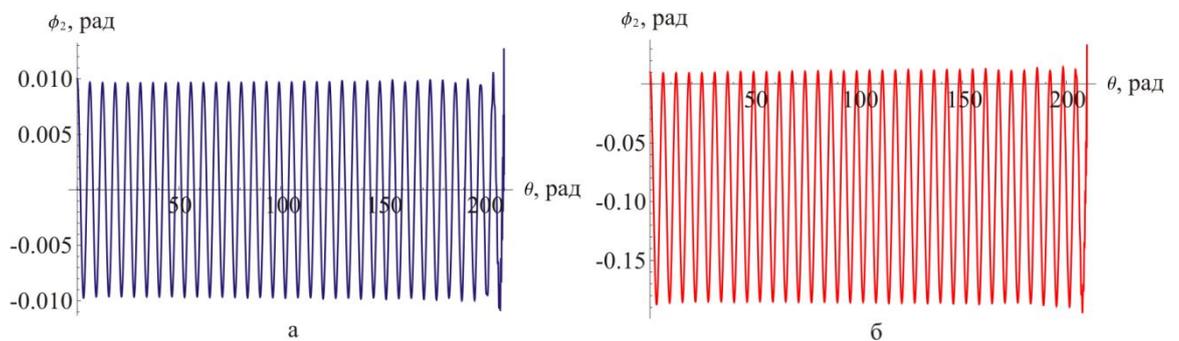


Рисунок 7 - Графики колебаний угла ϕ_2 : (а) экваториальный; (б)

неэкваториальный лифт

Из рисунков 6-7 видно что амплитуды колебаний по углам ϕ_1, ϕ_2 , для неэкваториального лифта, смещается в сторону отрицательных значений. Амплитуды колебаний для обоих случаев сопоставимы, имеют один порядок. Это означает что выход точки закрепления троса к Земле из плоскости экватора не меняет амплитуду по углам ϕ_1, ϕ_2 . Он лишь смещает колебания в сторону отрицательных значений обоих углов. Колебание происходит около некоторого стационарного положения, которое находится в отрицательной области значений углов ϕ_1, ϕ_2 .

Оценка параметров орбиты груза после отделения в случае экваториального лифта

Запишем уравнение движения полезного груза после отделения. Будем рассматривать плоское движение экваториального космического лифта. Отделение будет происходить в момент когда лифт находится в положение равновесия. Груз рассматривается как материальная точка. После отделения он перейдет на Кеплеровскую орбиту. Его движение будет описываться уравнением $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ [15], где e и p эксцентриситет и фокальный параметр орбиты соответственно.

Определим зависимость величины радиусов апогея r_α и перигея r_π от высоты на которой происходит отделение груза r_* .

Отметим что орбита груза будет эллиптической при выполнении условия:

$$0 \leq e < 1, \quad (12)$$

Величина e определяется как

$$e = \frac{|\lambda|}{\mu}, \quad (13)$$

здесь вектор $\lambda = -\left(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{V} + \frac{\mu \mathbf{r}}{r}\right)$ - интеграл Лапласа, где $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}$ производная радиус-вектора груза, $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{r} \times \mathbf{V}$ - интеграл площадей [15].

Подставляя λ в (13) и проводя алгебраические преобразования, получим

$$e = \frac{|\mu - \omega_E^2 (r_* + R_E)^3|}{\mu}. \quad (14)$$

Из формулы (14) и (12) видно, что тип орбиты груза после отделения зависит от величины r_* . Определим при каких значениях орбита будет эллиптической. Для этого подставим (14) в неравенство (12) и решая его получим, что для выполнения условия эллиптической орбиты r_* должна быть меньше $r_{*\max} = 53117.151$ км. Если $r_* = r_{*\max}$, то $e = 1$ - орбита груза будет параболической. При значении $r_* > r_{*\max}$, орбита будет гиперболической. Из решения неравенство получено что при значении $r_* = 42157.795$ км значение $e = 0$ орбита будет круговой. Отметим что данные результаты получены для случая когда лифт находится в состоянии покоя в положение равновесия.

Используя (14), запишем формулы определяющие зависимость радиусов в апогее и перигее от значения r_* :

$$r_\alpha(r_*) = \frac{\omega_E^2 r_*^4}{\mu - \sqrt{\mu - 2\mu\omega_E^2 r_*^{3/2} + r_*^6 \omega_E^4}}, \quad (15)$$

$$r_{\pi}(r_*) = \frac{\omega_E^2 r_*^4}{\mu + \sqrt{\mu - 2\mu\omega_E^2 r_*^{3/2} + r_*^6 \omega_E^4}}, \quad (16)$$

На рисунке 8 приведен график зависимости r_{α} , r_{π} от значения r_* .

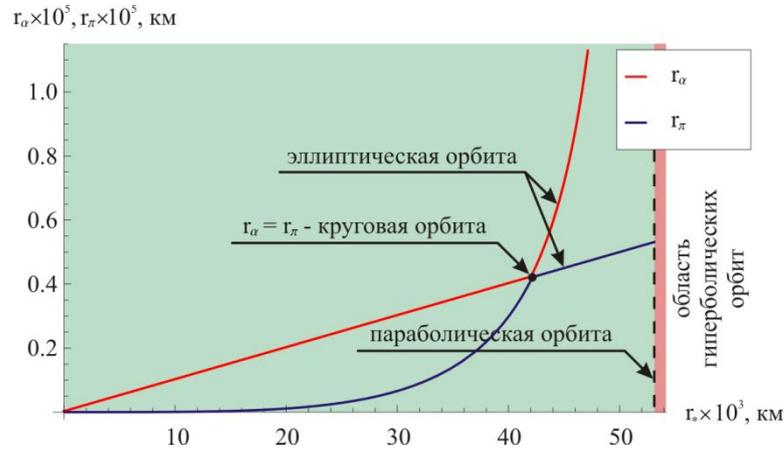


Рисунок 8 - График изменения радиусов в апогее и перигее

Начальным значением для r_* , выбрана граница атмосферы Земли 100 км, конечным величина r_{*max} . Как видно из рисунка 8, увеличение высоты отделения полезного груза приводит к увеличению радиусов апогея и перигея.

Заключение

В статье построена математическая модель неэкваториального космического лифта, позволяющая исследовать его поведение при подъеме груза на орбиту. Проведена серия численных экспериментов, с целью изучения влияния оказываемого движением подъемника. Результаты показывают, что равномерный подъем груза приводит к возникновению поперечных колебаний в тросе. Показано, что широта расположения точки крепления троса к Земле, влияет на колебания космического лифта. Исследовано движение груза после отделения от космического

лифта. Получен график зависимости радиусов апогея и перигея от высоты отделения полезного груза от космического лифта. Получено значение граничной высоты подъема груза для последующего его выведения на эллиптическую орбиту.

Представленные результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России №9.540.2014/К.

Библиографический список

1. Aslanov V.S., Ledkov A.S. Dynamics of the tethered satellite system. Cambridge: Woodhead Publishing Limited, 2012. 331 p.
2. Pelt M. Space tethers and space elevator. Springer, 2009. p.225.
3. Edwards B.C. The space elevator. NIAC Phase Final Report. 2003. 43 p.
4. Pugno N.M. Towards the Artsutanov's dream of the space elevator: the ultimate design of a 35 GPa strong tether to grapheme. // Acta Astronautica. 2013. Vol. 82. no. 2. P. 221-224.
5. Поляков Г.Г. Привязные спутники, космические лифты и кольца. - Астрахань: Изд-во Астраханского гос. пед. ун-та, 1999. - 579 с.
6. Pearson J. The orbital tower: a spacecraft launcher using the Earth's potential energy.// Acta Astronautica 2010. Vol. 2. no. 9-10. P. 785-799.
7. Williams P., Ockels W. Climber motion optimization for the tethered space elevator // Acta Astronautica. 2010. Vol.66. no. 9-10. P.1485-1467.

8. Cohen S.S., Misra A.K. The effect of climber transit on the, space elevator dynamics // Acta Astronautica. 2009. Vol. 64. no. 5-6. P. 538-553.
9. Woo P., Misra A.K. Dynamics of a partial space elevator with multiple climbers // Acta Astronautica. 2010. Vol. 67. no. 7-8. P.753-763.
- 10.Ледков А.С., Пикалов Р.С. Исследование влияния движения подъемника на динамику космического лифта // Наука и образование. 2014. №5. С. 206-216.
- 11.Aslanov V.S., Ledkov A.S., Misra A.K., Guerman A.D. Dynamics of space elevator after tether rupture // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 2013. Vol. 36. no. 4. P. 986-992.
- 12.Kojima H., Sugimoto Y., Furukawa Y. Experimental study on dynamics and control of tethered satellite systems with climber // Acta Astronautica. 2011. Vol. 69. no. 1-2. P. 96-108.
- 13.Маркеев А.П. Теоретическая механика. - М.:ЧеРо, 1999. - 569 с.
- 14.Белецкий В.В., Левин Е.М. Динамика космических тросовых систем. - М.: Наука, 1990. - 329 с.
- 15.Балк М.Б., Демин В.Г., Куницын А.Л. Сборник задач по небесной механике и космодинамике. - М.: Наука, 1972. - 336 с.