УДК: 539.123.17

Запаздывающее время не требуется.

Р. И. Храпко

Показано, что в случае переменных электромагнитных полей законы Ампера и Био-Савара-Лапласа должны использовать токи проводимости и токи смещения в единый для всего пространства момент времени.

Т. Чаритат и Ф. Гранер [1] применили закон Био-Савара-Лапласа (Б-С-Л)

$$\mathbf{B} = \int \frac{[\mathbf{j}'\mathbf{r}]dV'}{4\pi r^3} \tag{1}$$

и закон Ампера

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = I \tag{2}$$

для решения двумя разными способами простой задачи о магнитном поле $\mathbf{B}$, которое создается прямым конечным отрезком провода с током *I*. (Для простоты мы положили $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$ и не используем вектора $\mathbf{H}, \mathbf{D}$)

Естественно, авторы получили различные результаты. Для точки, находящейся в плоскости симметрии на расстоянии R от провода, закон Б-С-Л дает верное значение

$$B = \frac{I \sin\alpha}{2\pi R}, \tag{3}$$

а закон Ампера дает неправильное значение магнитного поля

$$B = I / 2\pi R \tag{4}$$

(α - угол между плоскостью симметрии и направлением на конец отреза провода).

Для исправления результата, полученного применением стандартного закона Ампера, авторы предложили исходить из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} + \partial_t \mathbf{E}. \tag{5}$$

Интегрирование уравнения (5) по поверхности, опирающейся на некоторый замкнутый контур Γ, приводит к обобщению закона Ампера (2) на случай переменного электрического поля:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = I + \partial_t \Phi, \tag{6}$$

где $\Phi = \int \mathbf{E}\, d\mathbf{a}$ - поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность.

Обобщение (6) необходимо использовать при решении рассматриваемой задачи, потому что ток *I*, протекающий по отрезку провода, создает на концах отрезка растущие во времени электрические заряды $\pm q, \quad \partial_t q = I$, и эти заряды порождают в пространстве возле провода переменное электрическое поле. Как подсчитали авторы, поток Φ через поверхность, опирающуюся на окружность радиуса R в плоскости симметрии, равен

$$\Phi = -(1-\sin\alpha)\, q\,. \qquad (7)$$

Используя этот результат, можно получить верное значение магнитного поля (3) не только с помощью закона Б-С-Л, но и как следствие обобщенного закона Ампера (6):

$$\oint \mathbf{B} d\mathbf{l} = I + \partial_t \Phi \quad \Rightarrow \quad 2\pi R B = I - (1-\sin\alpha)\partial_t q = I \sin\alpha\,, \qquad (8)$$

В. Хниздо в работе [2] указал, что применение закона Б-С-Л (1) ограничено случаем постоянного тока I или тока, изменяющегося во времени линейно, а для общего случая закон Б-С-Л был обобщен Джефименко [3 – 5] в виде

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} \int dV' \left[\left[\frac{\mathbf{J}(r',t')}{r^3} + \frac{\partial \mathbf{J}(r',t')}{r^2\,\partial t'} \right]_{t'=t-r/c} \mathbf{r} \right], \qquad (9)$$

где в интегранде использовано запаздывающее время $t' = t - r/c$. Это указание подтверждает правильность использования закона Б-С-Л (1) Чаритатом и Гранером, но оно никак не затрагивает использование ими обобщенного закона Ампера (6), который также приводит к правильному решению рассматриваемой задачи.

Обобщенный закон Ампера (6) представляется важным и интересным, потому что в нем используется единое время t наблюдения, а не запаздывающее время $t' = t - r/c$. Справедливость этого закона в самом общем случае несомненна, поскольку он получается чисто формально интегрированием уравнения Максвелла при фиксированном времени t. Проиллюстрируем здесь справедливость этого закона на примере волновой зоны диполя. Если координатные вектора координат r, φ, z составляют правую тройку векторов, то можно положить

$$B_\varphi = -E_z = \exp\{i(r-t)\}/r\,.$$

Убедимся, что, в соответствии с (6),

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = \partial_t \Phi$$

для плоского кольца, лежащего в экваториальной плоскости и ограниченного окружностями радиусов R_1, R_2. Имеем:

$$\oint_\Gamma \mathbf{B}\, d\mathbf{l} = 2\pi R_2 B(R_2) - 2\pi R_1 B(R_1) = 2\pi[\exp\{i(R_2 - t)\} - \exp\{i(R_1 - t)\}]\,,$$

$$\Phi = \int_{R_1}^{R_2} E 2\pi r dr = -\int_{R_1}^{R_2} 2\pi \exp\{i(r-t)\} dr = 2\pi i [\exp\{i(R_2 - t)\} - \exp\{i(R_1 - t)\}],$$

$$\partial_t \Phi = 2\pi [\exp\{i(R_2 - t)\} - \exp\{i(R_1 - t)\}],$$

что и требовалось показать.

Естественно, разрешая формально уравнение Максвелла (5) относительно $\mathbf{B}$, мы получим, вместо стандартного закона Б-С-Л (1), обобщенный закон Б-С-Л

$$\mathbf{B} = \int \frac{[(\mathbf{j}' + \partial_t \mathbf{E}')\,\mathbf{r}]dV'}{4\pi r^3} \tag{10}$$

в котором предполагается интегрирование по всему пространству в фиксированный момент времени. Таким образом, обобщение (10) закона Б-С-Л справедливо наравне с обобщением (9) этого закона.

Может, однако, возникнуть вопрос, почему Чаритат и Гранер получили правильное значение магнитного поля в рассматриваемой задаче, используя стандартную форму (1) закона Б-С-Л, не содержащую тока смещения, хотя этот ток присутствует вблизи провода по условию задачи? Другими словами, следует объяснить, почему

$$\partial_t \int \frac{[\mathbf{E}'\mathbf{r}]dV'}{4\pi r^3} = 0. \tag{11}$$

Объяснение этого обстоятельства содержится в работах [6, 7]. Это объяснение было также представлено в статье «Электромагнетизм в терминах источников и порождений», направленной в *УФН* 13 июня 1995 г. и отклоненной редакцией.

Дело в том, что электрическое поле $\mathbf{E}$ возле рассматриваемого провода является кулоновским полем, которое порождается электрическими зарядами концов провода по стандартной формуле

$$\mathbf{E} = \int \frac{\rho' \mathbf{r} dV'}{4\pi r^3}. \tag{12}$$

Другими словами, ρ порождает $\mathbf{E}$. Однако вторичное применение интегральной формулы типа (11), (12) всегда дает ноль. Т.е. $\mathbf{E}$, полученное по формуле (12) ничего не порождает, т.е.

$$\int \frac{[\mathbf{E}'\mathbf{r}]dV'}{4\pi r^3} = 0,$$

и выражение (11) есть нуль. Мы говорим, что порождение порождения равно нулю. Другими словами, порождение - в данном случае это $\mathbf{E}$ из (12) - всегда стерильно.

Таким образом, показано, что в случае переменных электромагнитных полей законы Ампера и Био-Савара-Лапласа должны использовать токи проводимости и токи смещения, причем в единый для всего пространства момент времени.

Список литературы

1. Charitat T. and Graner F. About the magnetic field of a finite wire. // European J. Phys. – 2003, **24.-** p.267-270

2. Hnizdo V. Comment on ‘About the magnetic field of a finite wire’ // European J. Phys. – 2003, **24.-** p.L15-L16

3. Jefimenko O. D. Electricity and Magnetism. - New York: Appleton-Century-Crofts, 1966.- 478p.

4. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. - Wiley, 1999.- 808p.

5. Griffiths D. J. Introduction to Electrodynamics. - Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1999.- 598p.

6. R.I. Khrapko. Violation of the gauge equivalence. - http://arXiv.org/abs/physics/0105031 (11.12.2001)

7. Р. И. Храпко. Силовые трубки и биповерхности в электромагнетизме. - http://www.mai.ru/projects/mai_works/articles/num4/article7/auther.htm (18.05.2001)