УДК 05.13.01

Применение целочисленных отсечений при решении задач планирования технического обслуживания воздушных судов

А. О. Махорин

Аннотация

В данной статье рассмотрены классы отсечений, находящие применение при практическом решении задач упорядочения работ с учетом использования дизъюнктивных ресурсов на базе смешанно-целочисленной модели в рамках метода ветвей и границ.

Ключевые слова

задача упорядочения работ; дизъюнктивный ресурс; смешанно-целочисленное линейное программирование; метод ветвей и отсечений

1. Введение

Задачи упорядочения работ [1] играют важнейшую роль при оптимизации целенаправленной деятельности в различных областях. Основной особенностью данного класса задач является наличие так называемых дизъюнктивных (неразделяемых) ресурсов, где отдельная единица такого ресурса в каждый момент времени может использоваться для выполнения не более, чем одной работы, вследствие чего такие ресурсы являются основным фактором, сдерживающим распараллеливание работ во времени.

Примером задачи, где возникает необходимость упорядочения работ, может служить задача планирования периодического технического обслуживания (ТО) воздушных судов [2]. В этой задаче для заданного множества самолетов, которые нуждаются в ТО с выводом из расписания в течение заданного периода, указаны наиболее поздние сроки начала ТО, а также длительность ТО, определяемые текущим состоянием самолета и соответствующим регламентом. Для проведения работ самолет должен быть помещен в ангар, причем число ангаров и их вместимость (число ангаро-мест) ограничены. Требуется сформировать план ТО, т. е. для каждого самолета определить номер ангара и плановую дату начала работ. Роль дизъюнктивного ресурса в данном случае играют отдельные ангаро-места.

Среди существующих методов практического решения задач упорядочения работ одно из основных мест занимает метод ветвей и границ, использующий смешанно-целочисленную линейную модель (см., например, [1]). Основная особенность указанной модели состоит в том, что оптимальные решения релаксированных линейных подзадач, решаемых в рамках метода ветвей и границ, находятся очень далеко от искомого допустимого или оптимального целочисленного решения, поэтому решение задач упорядочения даже небольшой размерности требует очень больших вычислительных затрат.

Основной подход, используемый в настоящее время для повышения эффективности поиска методом ветвей и границ, основан на включении в решаемые подзадачи так называемых отсечений — дополнительных ограничений, которые сохраняют неизменным множество допустимых целочисленных решений, сокращая при этом множество допустимых решений релаксированных подзадач [3, 4]. При этом практическая эффективность такого метода ветвей и отсечений существенно зависит от классов используемых отсечений.

Заметим, что любая задача упорядочения работ включает в себя подструктуру (подмодель) типа "упорядочения" [5], которую можно использовать для определения некоторых классов отсечений, рассматриваемых в данной статье.

2. Подструктура типа "упорядочение" и ее целочисленное описание

Рассмотрим базовый случай. Пусть задано множество работ J, причем выполнение каждой работы $j \in J$ требует одной единицы дизъюнктивного ресурса в течение времени $p_j \geq 0$ (время выполнения работы j), которое считается заданным. При этом доступна всего одна единица дизъюнктивного ресурса.

Множество решений данной задачи можно параметризовать, используя в качестве переменных время начала каждой работы $x_j \geq 0$, $j \in J$. Поскольку доступна всего одна единица дизъюнктивного ресурса, то для любого допустимого решения отрезки времени, в течение которых ресурс используется отдельными работами, не должны пересекаться. Таким образом, множество допустимых решений данной задачи определятся дизъюнктивными условиями: для каждой пары работ $i, j \in J$, $i \neq j$, либо работа i предшествует работе j, либо работа j предшествует работе i:

$$x_i + p_i \leq x_j \quad \text{ИЛИ} \quad x_j + p_j \leq x_i. \tag{1}$$

Если бы порядок следования работ во времени был известен, то система ограничений (1) представляла бы собой систему ограничений ЛП-задачи с полностью унимодулярной матрицей, и в этом случае отыскание оптимального решения было бы тривиальным независимо от вида целевой функции. Заметим также, что в данном случае порядок следования работ является линейным, поэтому число вариантов упорядочения работ равно $n!$, где $n = | J |$ — общее число работ.

Для перехода к целочисленному описанию множества допустимых решений, удовлетворяющих условию (1), введем вспомогательные двоичные переменные y_{ij}, где:

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } i \text{ предшествует работе } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{2}$$

Тогда в соответствии с (1) получим:

$$\text{если } y_{ij} = 1, \text{ то } x_i - x_j \le -p_i, \tag{3}$$

$$\text{если } y_{ij} = 0, \text{ то } x_i - x_j \le +M, \tag{4}$$

где M — константа (так называемое «большое M»), определяющая верхнюю границу разности $x_i - x_j$ для любого допустимого решения. С учетом двоичности y_{ij} условия (3) и (4) эквивалентны следующему условию:

$$x_i - x_j \le -p_i y_{ij} + M(1 - y_{ij}),$$

или окончательно

$$x_i - x_j + (p_i + M)y_{ij} \le M. \tag{5}$$

Таким образом, ограничения-неравенства (5) вместе с условиями неотрицательности $x_j \ge 0$ и двоичности $y_{ij} \in \{0, 1\}$ полностью определяют множество допустимых решений рассматриваемой задачи.

3. Отсечения, определяемые свойствами линейного порядка

Очевидно, что матрица двоичных переменных $Y = (y_{ij})$ по определению является матрицей отношения строгого линейного порядка на множестве работ J, которое обладает следующими свойствами:

1. *Иррефлексивность* (никакая работа не может предшествовать самой себе):

$$y_{jj} = 0 \quad \text{для всех } j \in J. \tag{6}$$

2. *Транзитивность* (если работа i предшествует работе j и работа j предшествует работе k, то работа i предшествует работе k):

$$(y_{ij} = 1) \,\&\, (y_{jk} = 1) \supset (y_{ik} = 1) \quad \text{для всех } i, j, k \in J.$$

Для приведения этого условия к виду линейного неравенства воспользуемся вначале тождеством $(p \supset q) \equiv (\neg p \vee q)$:

$$\neg[(y_{ij} = 1) \,\&\, (y_{jk} = 1)] \vee (y_{ik} = 1) \;\Leftrightarrow$$

$$(y_{ij} = 0) \vee (y_{jk} = 0) \vee (y_{ik} = 1) \Leftrightarrow$$

$$(1 - y_{ij} = 1) \vee (1 - y_{jk} = 1) \vee (y_{ik} = 1).$$

Последнее условие означает, что хотя бы одна из двоичных переменных $(1 - y_{ij})$, $(1 - y_{jk})$, y_{ik} должна быть равна единице, поэтому:

$$(1 - y_{ij}) + (1 - y_{jk}) + y_{ik} >= 1 \Leftrightarrow$$

$$y_{ij} + y_{jk} - y_{ik} <= 1 \tag{7}$$

3. *Полнота* (либо работа i предшествует работе j, либо работа j предшествует работе i):

$$(y_{ij} = 1) \vee (y_{ji} = 1) \quad \text{для всех } i, j \in J, i \neq j.$$

Это условие можно записать в виде следующего линейного неравенства:

$$y_{ij} + y_{ji} >= 1. \tag{8}$$

4. *Асимметричность* (если работа i предшествует работе j, то работа j не может предшествовать работе i):

$$(y_{ij} = 1) \supset (y_{ji} = 0) \quad \text{для всех } i, j \in J.$$

(Заметим, что асимметричность является следствием иррефлексивности и транзитивности.) Поскольку это условие эквивалентно условию

$$(y_{ij} = 0) \vee (y_{ji} = 0),$$

означающему, что переменные y_{ij} и y_{ji} не могут быть одновременно равны единице, то его можно записать в виде следующего эквивалентного линейного неравенства:

$$y_{ij} + y_{ji} <= 1. \tag{9}$$

5. Из свойств полноты (8) и асимметричности (9) следует

$$y_{ij} + y_{ji} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y_{ij} = 1 - y_{ji}, \tag{10}$$

что позволяет исключить половину двоичных переменных из задачи.

Уместно отметить, что все условия вида (6)—(10) не являются какими-либо дополнительными ограничениями рассматриваемой задачи, а непосредственно следуют из условия (5) и условия двоичности переменных y_{ij}. Например, условие иррефлексивности (6) можно получить из условия (5), полагая $j = i$:

$$x_j - x_j + (p_j + M)y_{jj} <= M \Leftrightarrow y_{jj} <= M / (p_j + M) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y_{jj} < 1 \Leftrightarrow y_{jj} = 0.$$

Пусть $Y \subseteq J \times J$ — строгий линейный порядок. Известно, что в этом случае существует единственная нумерация работ $J = \{j_1, j_2, ..., j_n\}$ такая, что $(j_p, j_q) \in Y$ тогда и только тогда, когда $p < q$. Другими словами, что для любой матрицы строгого линейного порядка $Y = (y_{ij})$ существует единственная перестановочная матрица $P = (p_{ij})$ такая, что матрица

$$PYP^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

является верхней треугольной матрицей с нулевой диагональю и единичными наддиагональными элементами. Так как всякая перестановочная матрица P является (0, 1)-матрицей и однозначно определяет соответствующую матрицу строгого линейного порядка Y, ее также можно использовать для параметризации порядка на множестве J. Соответствующее целочисленное описание имеет следующий вид:

$$\sum_{i \in J} p[i, j] = 1 \quad \forall j \in J$$

$$\sum_{i \in J} p[i, j] = 1 \quad \forall i \in J$$

$$p[i, j] \in \{0, 1\}$$

Данное целочисленное описание соответствует задаче о полном паросочетании в двудольном графе и имеет полностью унимодулярную матрицу коэффициентов ограничений, поэтому условие двоичности переменных является избыточным до тех пор, пока нет каких-либо дополнительных ограничений, приводящих к нарушению унимодулярности. Полное паросочетание в данном случае можно понимать как биекцию $J \leftrightarrow \{1, 2, ..., n\}$ между множеством работ и множеством порядковых номеров, определяющих порядок выполнения работ.

4. Отсечения, определяемые парой работ

Рассмотрим произвольную пару работ $i, j \in J$, $i \neq j$. Соответствующее этой паре дизъюнктивное ограничение (1) показано на рис. 1, из которого можно видеть, что никакая допустимая точка (x_i, x_j) не может находиться ниже прямой, проходящей через точки p_i и p_j. Поэтому соответствующее неравенство:

$$p_i x_i + p_j x_j \geq p_i p_j \tag{11}$$

является отсечением для рассматриваемой задачи.

В более общем случае, когда имеются явные или неявные нижние границы для времен начала работ $x_j \geq E_j$ (неявные границы могут быть следствием дополнительных ограничений), отсечение, определяемое парой работ $i, j \in J$, может быть усилено (рис. 2). Соответствующее неравенство выводится аналогично и имеет вид:

$$(p_i + E_i - E_j)x_i + (p_j + E_j - E_i)x_j \geq p_i\, p_j + E_i\, p_j + E_j\, p_i. \qquad (12)$$

5. Отсечения, определяемые подмножеством работ

Отсечения, определяемые парой работ, которые были рассмотрены в предыдущем подразделе, можно обобщить на произвольное подмножество работ следующим образом.

Пусть $S \subseteq J$ — произвольное (непустое) подмножество работ, $j \in S$ — некоторая работа. Понятно, что для любого допустимого решения (плана выполнения работ) имеет место разбиение

$$S = S' \cup \{ j \} \cup S'', \qquad (13)$$

где S' — множество работ, предшествующих работе j; S'' — множество работ, следующих за работой j. Поскольку работа j не может быть начата до того, как будут выполнены все работы $i \in S'$, то:

$$x_j \geq \sum_{i \in S'} p_i\,. \qquad (14)$$

Заметим далее, что по определению $y_{ij} = 1$ для всех $i \in S'$ и $y_{ij} = 0$ для $i = j$ и всех $i \in S''$. С учетом (13) это позволяет записать неравенство (14) следующим образом:

$$x[j] \geq \sum_{i \in S} p[i]y[i, j]\,. \qquad (15)$$

Чтобы исключить вспомогательные двоичные переменные y_{ij}, построим неравенство, которое является неотрицательной линейной комбинацией неравенств (15) для всех $j \in S$, используя в качестве коэффициентов $p_j > 0$:

$$\sum_{j \in S} p_j x_j \geq \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} p_i\, p_j\, y_{ij}\,. \qquad (16)$$

Так как

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} p_i\, p_j\, y_{ij} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} p_i\, p_j\, y_{ji}\,, \qquad (17)$$

то имеем

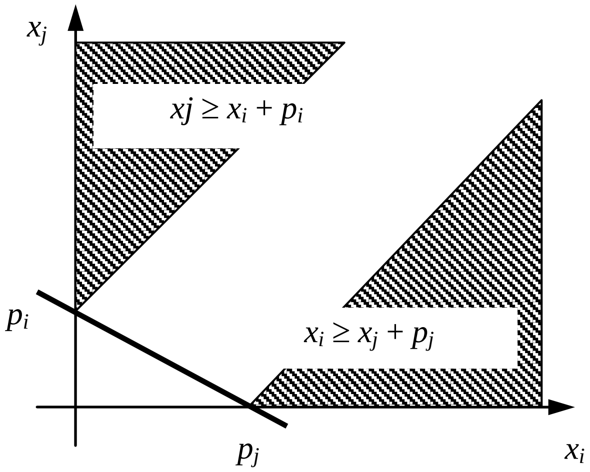

Рис. 1. Дизъюнктивное ограничение для пары работ $i, j \in J$.

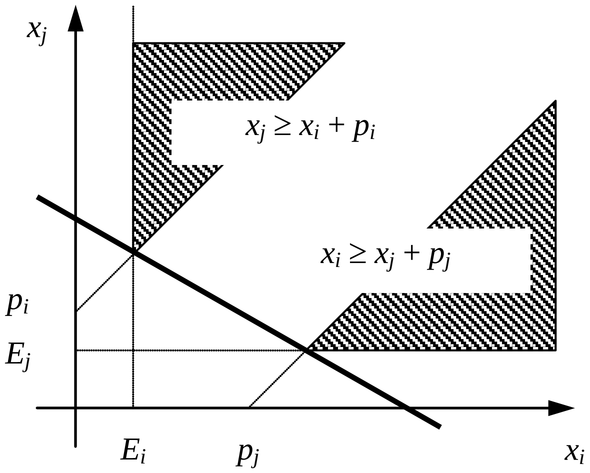

Рис. 2. Дизъюнктивное ограничение для пары работ $i, j \in J$ при наличии нижних границ E_i и E_j.

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} p_i p_j y_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} p_i p_j y_{ij} + \sum_{i\in S}\sum_{j\in S} p_i p_j y_{ji}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} p_i p_j (y_{ij} + y_{ji}).$$

Из свойств иррефлексивности и асимметричности отношения линейного порядка (см. разд. 3) следует, что:

$$y_{ij} + y_{ji} = 1 - \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Подставляя (17) в (16) получим искомое неравенство (отсечение) в окончательном виде:

$$\sum_{j\in S} p_j x_j \ge \frac{1}{2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} p_i p_j (1-\delta_{ij}). \qquad (18)$$

Можно заметить, что неравенство (11) является частным случаем неравенства (18) для $J = \{i, j\}$.

Как и в случае пары работ неравенство (18) можно усилить, если имеются нижние границы для времен начала работ $x_j \ge E_j$. Пусть

$$E_S = \min_{j\in S} E_j.$$

Тогда, очевидно,

$$x_j \ge E_S + \sum_{i\in S} p_i y_{ij},$$

что является усилением неравенства (15). Используя ту же линейную комбинацию, что и ранее, получим следующее неравенство (отсечение):

$$\sum_{j\in S} p_j x_j \ge E_S \sum_{j\in S} p_j + \frac{1}{2}\sum_{i\in S}\sum_{j\in S} p_i p_j (1-\delta_{ij}), \qquad (19)$$

которое является усилением неравенства (21).

Заключение

Рассмотренные классы отсечений (7), (11), (12), (18) и (19) были использованы при решении ряда задач планирования периодического технического обслуживания (ТО) воздушных судов [2]. В большинстве случаев использование указанных отсечений в рамках метода ветвей и границ позволило сократить время поиска допустимых и субоптимальных целочисленных решений в 5–10 раз.

Список литературы

1. Теория расписаний и вычислительные машины. Под ред. *Э. Г. Коффмана*.— М.: Наука, 1984.

2. *А. О. Махорин.* Смешанно-целочисленная модель планирования периодического технического обслуживания пассажирских самолетов.— Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2011, с. 209–214.

3. *E. Balas*. On the Facial Structure of Scheduling Polyhedra. Mathematical Programming Study 24, 179-218 (1985).

4. *M. Queyranne M., A. S. Schulz.* Polyhedral approaches to machine scheduling. Discrete Applied Mathematics 26, 1990.

5. *А. Кофман, А. Анри-Лабордер.* Методы и модели исследования операций.— М.: Мир, 1977.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Махорин Андрей Олегович, доцент Московского авиационного института (национального исследовательского университета), к.т.н.;
МАИ, Волоколамское ш., д. 4, г.Москва ГСП-3, 125993.
тел.: 8-499-158-45-30, e-mail: mao@gnu.org