

УДК: 521; 521.1; 521.1:523.03; 521.2; 521.3; 531.3

Исследование резонансных колебаний в фотогравитационной задаче Ситникова

В. О . Калас

Аннотация

Рассматривается задача о движении пассивно гравитирующей точки в поле притяжения двух одинаковых массивных тел, излучающих световую энергию. Считается, что масса гравитирующей точки много меньше массы притягивающих тел, поэтому ее влиянием на движение основных тел можно пренебречь. Траектории движения основных тел относительно общего центра масс – кеплеровские эллипсы.

В окрестности устойчивого тривиального равновесия исследуются одномерные колебания точки вдоль оси Z , перпендикулярной плоскости орбиты главных тел и проходящей через центр масс системы. Получены уравнения колебаний с точностью до членов четвертого порядка малости по отклонениям. Получены условия существования параметрического резонанса 1:2. Методом усреднения исследованы резонансные колебания точки как при строгом резонансе, так и в окрестности резонанса: выведены усредненные уравнения, показано, что они допускают первый интеграл, построен фазовый портрет колебаний в окрестности резонанса (и при строгом резонансе). Результаты исследований дублируются в разных системах координат.

Примером описываемой задачи является система из двух одинаковых по массе и излучению звезд, между которыми сосредоточены облака из пылевых частиц, подверженных влиянию как сил светового давления (парусный эффект), так и сил гравитации.

Ключевые слова: фотогравитационная задача ситникова; равновесие; параметрический резонанс; окрестность резонанса; фазовый портрет; бифуркационное значение параметра.

1. Общая постановка задачи и основные определения

Рассмотрим задачу о движении пассивно гравитирующей точки C , находящейся в поле притяжения двух массивных тел одинаковой массы $m_1 = m_2$, излучающих световую энергию. В этом случае точка C испытывает, помимо гравитационного притяжения, световое давление со стороны тел m_1, m_2 . Предполагается, что точка C массы m движется вдоль оси Oz , проходящей через центр масс притягивающих тел, перпендикулярно плоскости их движения. Одномерное движение вдоль оси Oz возможно в силу симметрии задачи (см. рис. 1). Считается, что масса гравитирующей точки много меньше массы притягивающих тел, т.е. $m \ll m_1$, поэтому ее влиянием на движение основных тел можно пренебречь (ограниченная постановка задачи). Траектории движения основных тел относительно общего центра масс – кеплеровские эллипсы эксцентриситета e .

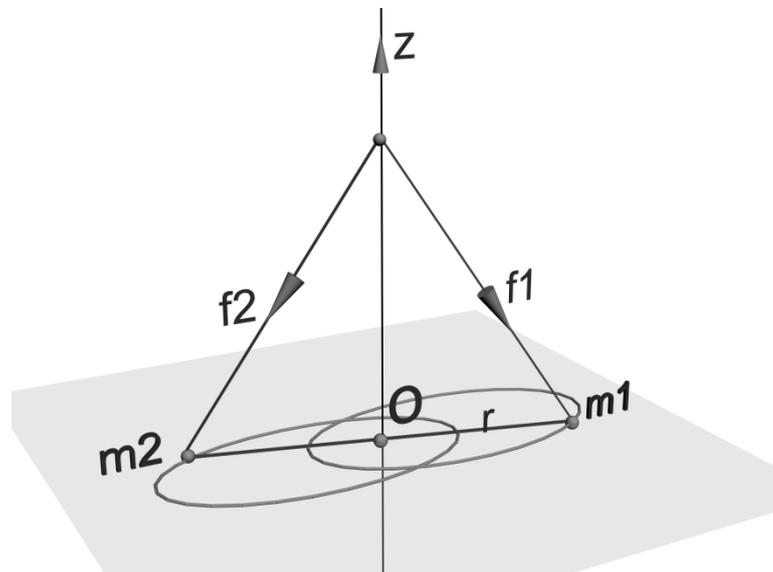


Рис. 1.1. Система трех тел

В классическом случае, когда световое давление равно нулю, задачу о движении пассивно гравитирующей точки C вдоль оси Z в поле притяжения двух массивных тел одинаковой массы $m_1 = m_2$ принято называть задачей Ситникова.

Известно, что задача Ситникова связана с проблемой классификации финальных движений в задаче трех тел. Полную классификацию различных типов финальных движений дал Шази [1], постулируя наличие осциллирующих решений, которым отвечают неограниченные колебания координаты z , при условии, что z не стремится к бесконечности со временем. В 1954 году А.Н. Колмогоров предложил изучить частный случай задачи трех тел на предмет исследования топологии некоторых подмножеств фазового пространства, порождающих разные типы финальных движений. К.А. Ситников [2] доказал для этого случая существование осциллирующих движений, для которых координата z испытывает

бесконечное число выбросов на произвольно большие расстояния, однако всегда возвращается в начало координат. Позднее, В.М. Алексеев [3] исследовал хаотические движения в задаче Ситникова методами символьной динамики и показал, что при определенных условиях в этой задаче реализуются все возможные комбинации финальных движений по Шази, доказал также существование осциллирующих и гиперболических решений, меняющих свой финальный тип за счет явления «полного захвата». Mozer J. познакомил западных исследователей с задачей Ситникова, читая лекции по небесной механике в Принстонском университете в начале 70-ых и публикуя результаты своих исследований этой задачи в виде монографии [4]. Впоследствии появилось множество работ, посвященных задаче Ситникова, в основном зарубежных авторов. Например, в работах [5-9] исследовались регулярные (периодические) орбиты, работы [10-13] посвящены вопросам хаотической динамики.

Если световое давление отлично от нуля, задачу о движении точки C будем называть фотогравитационной задачей Ситникова.

Получим уравнения движения точки массы m вдоль оси Oz . Пусть $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ – силы, действующие со стороны масс m_1, m_2 соответственно. Эти силы будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{F}_1 = f \frac{qmm_1}{R_1^2}, \quad \mathbf{F}_2 = f \frac{qmm_2}{R_2^2},$$

где $R_1 = R_2 = \sqrt{z^2 + r^2}$. Здесь q – коэффициент редукции массы частицы. Он меньше единицы, так как обусловлен воздействием светового потока на частицу C , а это воздействие направлено в сторону, прямо противоположную силе притяжения (см. [14]).

Тогда уравнение движения точки C будет таким

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

Проектируем это уравнение на ось Oz и, учитывая, что

$$F_{jz} = -|F_{jz}| \cos \alpha = -|F_{jz}| \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}}, \quad |F_{1z}| = |F_{2z}| = f \frac{qmm_1}{z^2 + r^2},$$

имеем уравнение второго порядка

$$\ddot{z} = -\frac{\mu qz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Здесь $\mu = f(m_1 + m_2)$, $2r$ – расстояние между притягивающими телами, зависящее от эксцентрической аномалии E по формуле

$$2r = a(1 - e \cos E) \quad (1.1)$$

Параметр a – большая полуось орбиты. Аномалия E зависит от времени t в силу уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = n(t - \tau),$$

где $n = \mu^{1/2} a^{-3/2}$ – среднее движение притягивающих тел, τ – один из кеплеровских элементов орбиты (1.1), представляющий собой время прохождения перицентра.

Будем считать, без ограничения общности, что $f = 1$, $m_1 + m_2 = 1$, $a = 1$. Этого можно добиться с помощью выбора единиц измерения времени, расстояния и массы притягивающих тел. В этом случае $\mu = 1$, $n = 1$, поэтому период обращения основных тел будет равен 2π . Уравнения движения примут следующий вид:

$$\ddot{z} + \frac{q \cdot z}{(z^2 + r^2(t))^{3/2}} = 0 \quad (1.2)$$

Очевидно, что $z = 0$ – частное решение этого уравнения.

Ниже приводится известная в небесной механике формула решения $E(t)$ уравнения Кеплера в виде ряда по e , сходящегося при $e \leq 0.662\dots$:

$$E(e, \zeta) = \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}(\sin^n \zeta)}{d\zeta^{n-1}} e^n, \quad \zeta = (t - \tau) \quad (1.3)$$

2. Нахождение параметрического резонанса для системы первого приближения

Разложим второе слагаемое уравнения (1.2) в ряд Тейлора относительно z

$$\ddot{z} + \frac{q}{r^3} z - \frac{3q}{2r^5} z^3 + O(z^5) = 0$$

С точностью до членов четвертого порядка относительно z имеем

$$\ddot{z} + \frac{q}{r^3} z - \frac{3q}{2r^5} z^3 = 0 \quad (2.1)$$

Используя уравнение (1.1), разложим сомножители $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$ в ряд относительно эксцентриситета e

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} \left(8 + (24 \cos E)e + (48 \cos^2 E)e^2 + (80 \cos^3 E)e^3 + \dots \right)$$

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{a^5} \left(32 + (160 \cos E)e + (480 \cos^2 E)e^2 + (1120 \cos^3 E)e^3 + \dots \right)$$

Используя разложение в ряд (1.3), получим следующие выражения для $\frac{1}{r^3}$, $\frac{1}{r^5}$:

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} (8 + 24e \cos \zeta + e^2 (12 + 36 \cos 2\zeta) + e^3 (27 \cos \zeta + 53 \cos 3\zeta)) \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{r^5} = \frac{1}{a^5} (32 + 160e \cos \zeta + e^2 (160 + 320 \cos 2\zeta) + e^3 (540 \cos \zeta + 580 \cos 3\zeta)) \quad (2.3)$$

Учитывая, что параметр $a=1$ и предполагая, не ограничивая общности, что $\tau=0$, запишем уравнение (2.1) в следующем виде

$$\ddot{z} + q \cdot \omega^2 z = q \cdot g(t)z + q \cdot h(t)z^3 \quad (2.4)$$

где

$$\omega = \sqrt{(8 + 12e^2)},$$

$$g(t) = -(24e \cos t + e^2 (36 \cos 2t) + e^3 (27 \cos t + 53 \cos 3t)),$$

$$h(t) = (48 + 240e \cos t + e^2 (240 + 480 \cos 2t) + e^3 (810 \cos t + 870 \cos 3t))$$

Оставляя члены до второго порядка относительно z и относительно e , из (2.4) получим следующее уравнение

$$\ddot{z} + 8q(1 + 3e \cos t)z = 0 \quad (2.5)$$

Положим $w^2 = 8q$. Тогда уравнение (2.5) примет вид

$$\ddot{z} + w^2(1 + 3e \cos t)z = 0 \quad (2.6)$$

Рассмотрим задачу о нахождении резонанса в уравнении (2.6). Здесь w – собственная частота колебаний, а параметрическая частота колебаний равна единице (сомножитель перед переменной t). С помощью стандартной замены переменных

$$z = x \cos y_1, \quad \dot{z} = -xw \sin y_1$$

это уравнение сводится к одночастотной неавтономной системе. Вводим новую быструю переменную $y_2 = t$, исключая время t из правой части. Тогда уравнения колебаний предстанут в виде двухчастотной автономной системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 3ewx \sin y_1 \cos y_1 \cos y_2 \\ \dot{y}_1 = w + 3ew \cos^2 y_1 \cos y_2 \\ \dot{y}_2 = 1 \end{cases} \quad (2.7)$$

Вычислим временное среднее от правой части уравнения для медленной переменной x вдоль быстрых решений $y_1 = wt + y_{10}$, $y_2 = t$ невозмущенной задачи

$$\bar{X}(x, y_{10}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T 3wx \sin(wt + y_{10}) \cos(wt + y_{10}) \cos t \, dt$$

Проводя интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \bar{X}(x, y_{10}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3wx}{4T} & \left(\frac{4w \cos 2y_{10} + (1-2w) \cos(2(wT + y_{10}) + T)}{(2w+1)(2w-1)} \right) - \\ & - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3wx}{4T} \left(\frac{(1+2w) \cos(2(wT + y_{10}) - T)}{(2w+1)(2w-1)} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Учитывая положительность w , можно сделать вывод, что при $w = \frac{1}{2}$ присутствует неопределенность типа $0/0$, которая ведет к разрыву среднего в окрестности резонанса. Этот резонанс представляет собой главный параметрический резонанс. Других резонансов, проявляющих себя в первом приближении метода усреднения, нет.

Найдем параметр q , соответствующий данному резонансу.

$$q = \frac{w^2}{8} = \frac{1}{32}.$$

Итак, мы исследовали уравнение на наличие резонансов в первом приближении и нашли коэффициент редукции массы частицы q , при котором присутствует резонанс.

3. Нахождение параметрического резонанса для системы в нелинейном приближении

Рассмотрим уравнение (2.4):

$$\ddot{z} + q \cdot \omega^2 z = q \cdot g(t)z + q \cdot h(t)z^3.$$

Предположим, что величина z является малой величиной порядка ε . Делая замену переменных

$$z = \varepsilon y, \quad \dot{z} = \varepsilon \dot{y},$$

где $\varepsilon \sim 1$, после чего сокращая левую и правую часть уравнения на ε , получим

$$\ddot{y} + q\omega^2 y = qg(t)y + qh(t)\varepsilon^2 y^3$$

$$\ddot{y} + q\omega^2 y = q(-24e \cos t - 36e^2 \cos 2t)y + q(48 + 240e \cos t)\varepsilon^2 y^3$$

Положим $\varepsilon^2 = e$. С точностью до членов второго порядка малости по e будем иметь:

$$\ddot{y} + 8qy = e((-24q \cos t)y + 48qy^3).$$

Пусть $w^2 = 8q$. Тогда уравнение будет иметь следующий вид:

$$\ddot{y} + w^2 y = e \left((-24q \cos t) y + 48q y^3 \right) \quad (3.1)$$

Исследуем параметрические колебания этого уравнения. Преобразуем (3.1), используя замену переменных Ван-дер-Поля:

$$\begin{aligned} y &= x_1 \cos wt - x_2 \sin wt \\ \dot{y} &= x_1 w \sin wt - x_2 w \cos wt \end{aligned} \quad (3.2)$$

В новых переменных x_1, x_2 уравнение (3.1) примет вид стандартной по Боголюбову системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{e \sin wt}{w} \left((-24q \cos t)(x_1 \cos wt - x_2 \sin wt) + 48q(x_1 \cos wt - x_2 \sin wt)^3 \right) \\ \dot{x}_2 = -\frac{e \cos wt}{w} \left((-24q \cos t)(x_1 \cos wt - x_2 \sin wt) + 48q(x_1 \cos wt - x_2 \sin wt)^3 \right) \end{cases} \quad (3.3)$$

Эту систему можно рассматривать как систему с двумя быстрыми переменными t и wt . Таким образом, уравнение (3.1) эквивалентно следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{e \sin y_1}{w} \left((-24q \cos y_2)(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1) + 48q(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1)^3 \right) \\ \dot{x}_2 = -\frac{e \cos y_1}{w} \left((-24q \cos y_2)(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1) + 48q(x_1 \cos y_1 - x_2 \sin y_1)^3 \right) \\ \dot{y}_1 = w \\ \dot{y}_2 = \gamma \end{cases} \quad (3.4)$$

при условии, что начальные значения быстрых переменных y_1, y_2 равны нулю $y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$. Здесь $\gamma = 1$. Вектор частот будет таким: $\bar{w} = (w, \gamma) = (w, 1)$. Система (3.4) содержит две медленные и две быстрые переменные.

Вычисляя временное среднее от правой части уравнений (3.3), получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = e \frac{18qv_2(4w^2 - 1)}{w(2w - 1)(2w + 1)} (v_1^2 + v_2^2) \\ \dot{v}_2 = -e \frac{18qv_1(4w^2 - 1)}{w(2w - 1)(2w + 1)} (v_1^2 + v_2^2) \end{cases} \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что при $w = 0, \pm \frac{1}{2}$ числители и знаменатели правых частей системы (3.5) обращаются в ноль, хотя прохождение параметра w через значения $\pm \frac{1}{2}$ не ведет к разрыву временного среднего, поскольку $4w^2 - 1 \equiv (2w - 1)(2w + 1)$. Тем не менее, частоты

$w = \pm \frac{1}{2}$ являются резонансными, так как вид усредненных уравнений резко меняется, когда w принимает указанные значения. Отбрасывая нулевые и отрицательные значения частоты w , получим резонансные значения частоты собственных колебаний:

$$w = \frac{1}{2}.$$

Отсюда $q = \frac{1}{32}$. Заметим, что коэффициент q получился таким же, как и в случае линейного приближения.

4. Исследование системы в нелинейном приближении при строгом резонансе и в окрестности резонанса

Исследуем колебания системы при резонансе $w \approx \frac{1}{2}$. В этом случае разность частот $\Delta = w - \frac{1}{2} \gamma$ есть величина порядка ε , если $\delta \approx 1$: $\Delta = \varepsilon \delta$.

Вводим новую медленную переменную $\theta = y_1 - \frac{1}{2} y_2$. Выражая отсюда $y_1 = \theta + \frac{1}{2} y_2$, получим новый вид уравнений (3.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -e \frac{\sin\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right)}{\frac{1}{2} + \Delta} (-24q \cos y_2) \left(x_1 \cos\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right) - x_2 \sin\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right) \right) - \\ - e \frac{\sin\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right)}{\frac{1}{2} + \Delta} 48q \left(x_1 \cos\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right) - x_2 \sin\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right) \right)^3 \\ \dot{x}_2 = -e \frac{\cos\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right)}{\frac{1}{2} + \Delta} (-24q \cos y_2) \left(x_1 \cos\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right) - x_2 \sin\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right) \right) - \\ - e \frac{\cos\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right)}{\frac{1}{2} + \Delta} 48q \left(x_1 \cos\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right) - x_2 \sin\left(\theta + \frac{1}{2} y_2\right) \right)^3 \\ \dot{\theta} = e\delta \\ \dot{y}_2 = 1 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Система уравнений (4.1) замкнута относительно переменных x_1, x_2, θ, y_2 и не имеет резонансов, поскольку вектор частот $\bar{w} = (\gamma) = (1)$ не является резонансным. Она содержит три медленных и одну быструю переменные. Это значит, что мы можем усреднить ее как в нерезонансном случае с обычной гарантией точности приближения.

Усредняем уравнения (4.1) по быстрой переменной y_2 на периоде 2π :

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{12eq}{1+2\Delta} (3u_1^2 u_2 + 3u_2^3 - u_2 + 2u_1 \sin \theta \cos \theta + 2u_2 (\cos \theta)^2) \\ \dot{u}_2 = \frac{12eq}{1+2\Delta} (2u_1 \cos^2 \theta - 2u_2 \sin \theta \cos \theta - u_1 - 3u_1^3 - 3u_1 u_2^2) \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\theta = e\delta t$. Таким образом, колебания в окрестности резонанса $w \approx \frac{1}{2}$ описываются уравнениями (4.2), содержащими медленно меняющийся со временем параметр θ .

Исследуем поведение решений системы уравнений (4.2), когда частота собственных колебаний $w = \frac{1}{2}$ строго. Тогда величина δ равна нулю и $\theta = e\delta t = 0$. Усредненные уравнения (4.2) примут более простой вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 12eq (3u_1^2 u_2 + 3u_2^3 + u_2) \\ \dot{u}_2 = -12eq (3u_1 u_2^2 + 3u_1^3 - u_1) \end{cases} \quad (4.3)$$

Для простоты введем обозначение $eq = \varepsilon$. Тогда система (4.3) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = 12\varepsilon (3u_1^2 u_2 + 3u_2^3 + u_2) \\ \dot{u}_2 = -12\varepsilon (3u_1 u_2^2 + 3u_1^3 - u_1) \end{cases} \quad (4.4)$$

Легко видеть, что уравнения (4.4) можно записать в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{q} = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q} \quad (4.5)$$

если переменную u_1 считать обобщенной координатой q , а u_2 – обобщенным импульсом p .

Заметим, что в уравнениях Гамильтона переменная q выступает в качестве обобщенной координаты и не имеет ничего общего с коэффициентом редукции массы частицы.

Функция Гамильтона $H(q, p)$ будет такой:

$$H = 9(p^2 + q^2)^2 + 6(p^2 - q^2)$$

Учитывая, что функция Гамильтона не зависит явно от времени t , приходим к выводу, что уравнения (4.5) допускают первый интеграл

$$H(q, p) = \text{const}$$

В исходных переменных этот интеграл имеет форму

$$3(u_1^2 + u_2^2)^2 + 2(u_2^2 - u_1^2) = C \quad (4.6)$$

Для получения параметрического представления фазовых кривых, описываемых интегралом (4.6), положим

$$u_1 = \pm\sqrt{v}, \quad u_2 = \pm\sqrt{w}.$$

Подставим эти выражения в уравнение (4.6). Получим квадратное уравнение относительно v .

$$v^2 + \left(2w - \frac{2}{3}\right)v + w^2 + \frac{2}{3}w - \frac{1}{3}C = 0$$

Решение уравнения будет таким:

$$v_{1,2} = -\left(w - \frac{1}{3}\right) \pm \frac{1}{3}\sqrt{1 - 12w + 3C}$$

На рисунке 4.1 представлен фазовый портрет резонансных колебаний, рассчитанный на основе параметрического представления кривых.

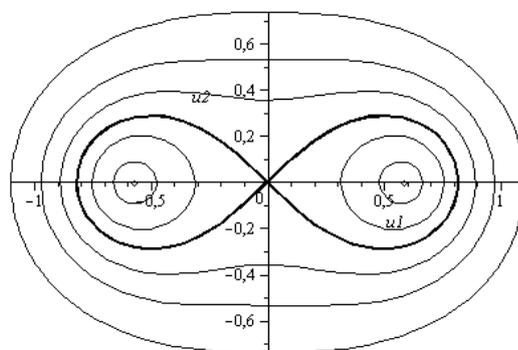


Рис.4.1. Фазовый портрет резонансных колебаний

Сепаратриса колебаний выделена жирным черным цветом, она проходит через неустойчивое положение равновесия $u_1 = u_2 = 0$, отвечающее константе $C=0$. В окрестности

стационарных значений $u_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}, u_2 = 0$, соответствующих константе $C = -\frac{1}{3}$,

изображающая точка описывает замкнутые кривые. Амплитуда колебаний растет с приближением константы C к нулю, поэтому замкнутые кривые заполняют всю область, ограниченную сепаратрисой. Дальнейшее возрастание константы C , когда постоянная

интегрирования принимает положительные значения, ведет к появлению замкнутых периодических решений, охватывающих начало координат, сепаратрису и движения вблизи равновесия $u_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, $u_2 = 0$.

Заметим, что положение равновесия $u_1 = u_2 = 0$ является устойчивым при $\varepsilon = 0$. Однако при сколь угодно малом ε , отличным от нуля, это равновесие неустойчиво, что можно легко проверить, используя теорему об устойчивости по первому приближению. Это значит, что в системе наблюдается явление параметрического резонанса, то есть нарастание амплитуды колебаний при малых возмущениях в начальных условиях, выводящих систему из равновесия. Амплитуда таких колебаний – величина порядка единицы, независимо от величины малого параметра ε .

Теперь проведем исследования в окрестности резонанса $w = \frac{1}{2}$. Уравнения (4.2) допускают неавтономный первый интеграл. Но пользоваться им неудобно, поэтому исследование окрестности резонанса $w = \frac{1}{2}$ будем проводить в переменных амплитуда (α) – фаза (β). В этом случае фазовые переменные уравнения (3.1) имеют следующее представление:

$$y = \alpha \cos \beta, \dot{y} = -\alpha w \sin \beta$$

Для простоты в уравнении (3.1) положим $\varepsilon = \varepsilon q$. Тогда оно примет вид:

$$\ddot{y} + w^2 y = \varepsilon \left((-24 \cos t) y + 48 y^3 \right) \quad (4.7)$$

Уравнение движения в новых переменных будет таким:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos t) \alpha \cos \beta + 48 \alpha^3 \cos^3 \beta \right) \sin \beta \\ \dot{\beta} = w - \frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos t) \cos \beta + 48 \alpha^2 \cos^3 \beta \right) \cos \beta \end{cases} \quad (4.8)$$

Вводя новую быструю переменную $y_1 = t$, получаем многочастотную систему

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos y_1) \alpha \cos \beta + 48 \alpha^3 \cos^3 \beta \right) \sin \beta \\ \dot{\beta} = w - \frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos y_1) \cos \beta + 48 \alpha^2 \cos^3 \beta \right) \cos \beta \\ \dot{y}_1 = 1 \end{cases} \quad (4.9)$$

Для преобразования этой системы в окрестности резонанса $w = \frac{1}{2}$ введем медленную фазу $\psi = \beta - \frac{1}{2} y_1$. После подстановки быстрой переменной $\beta = \psi + \frac{1}{2} y_1$ в систему (4.9) получим

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = -\frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos y_1) \alpha \cos \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) + 48 \alpha^3 \cos^3 \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) \right) \sin \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) \\ \dot{\psi} = \Delta - \frac{\varepsilon}{w} \left((-24 \cos y_1) \cos \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) + 48 \alpha^2 \cos^3 \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) \right) \cos \left(\psi + \frac{1}{2} y_1 \right) \\ \dot{y}_1 = 1 \end{cases} \quad (4.10)$$

После последующего усреднения по времени вдоль быстрых движений $y_1 = t$, получим усредненные уравнения:

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = 6 \frac{\varepsilon}{w} v_1 \sin 2v_2 \\ \dot{v}_2 = \Delta + 6 \frac{\varepsilon}{w} (\cos 2v_2 - 3v_1^2) \end{cases} \quad (4.11)$$

Здесь v_1, v_2 имеют смысл переменных α, ψ соответственно, $\Delta = w - \frac{1}{2}$ – резонансная расстройка, порядок малости которой равен ε : $\Delta = \varepsilon \delta$.

Перейдем к полярным координатам

$$u = v_1 \cos v_2, \quad v = v_1 \sin v_2$$

Усредненные уравнения (4.11) примут вид:

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{6\varepsilon}{w} v \left[3(u^2 + v^2) + 1 - \frac{w}{6\varepsilon} \Delta \right] \\ \dot{v} = -\frac{6\varepsilon}{w} u \left[3(u^2 + v^2) - 1 - \frac{w}{6\varepsilon} \Delta \right] \end{cases} \quad (4.12)$$

Несложно видеть, что эти уравнения допускают автономный первый интеграл

$$u^2 \left(1 + \frac{\Delta w}{6\varepsilon} \right) - v^2 \left(1 - \frac{\Delta w}{6\varepsilon} \right) - \frac{3}{2} (u^2 + v^2)^2 = C_1, \quad (4.13)$$

который гораздо проще неавтономного интеграла усредненной задачи, представленного в переменных u_1, u_2 . Учитывая, что $\Delta = \varepsilon \delta$ и полагая $a = \frac{\delta w}{3}$, представим интеграл (4.13) в следующем виде:

$$3(u^2 + v^2)^2 + 2(v^2 - u^2) - a(u^2 + v^2) = C \quad (4.14)$$

Варьируя значения параметра a , можно проследить за качественным изменением фазового портрета в зависимости от выбора данного параметра. Ниже представлены фазовые портреты для различных областей параметра a .

1) $a \leq -2$.

В этом случае коэффициенты $(2-a) > 0$, $(2+a) \leq 0$ при членах v^2 , u^2 соответственно.

На рис. 4.2 представлен фазовый портрет для этого случая, $a = -4$.

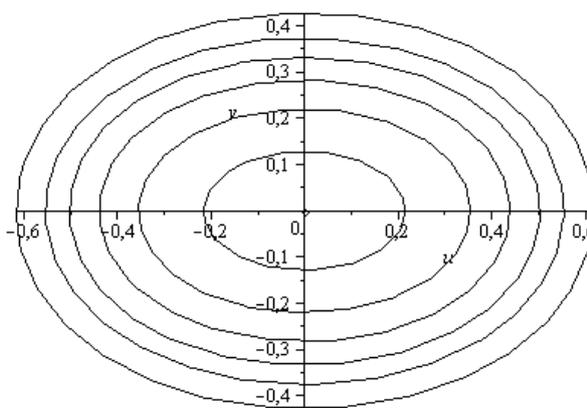


Рис.4.2. Фазовый портрет при $a \leq -2$

Как видно из графика, здесь есть одна устойчивая особая точка в начале координат.

2) $-2 < a \leq 2$.

В этом случае $(2-a) \geq 0$, $(2+a) > 0$. Ниже представлен фазовый портрет при $a = 1$.

Сепаратриса проходит через неустойчивое положение равновесия $u = v = 0$, отвечающее константе $C = 0$. Также есть две устойчивые особые точки.

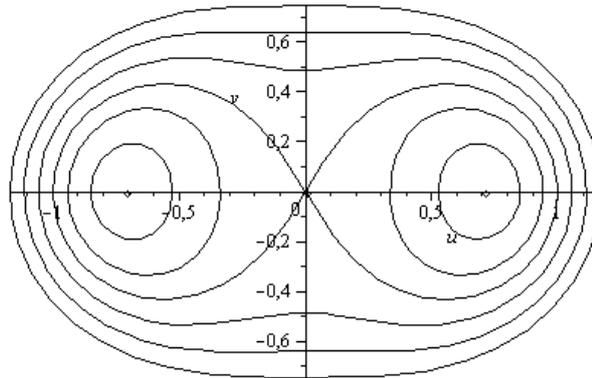


Рис.4.3. Фазовый портрет при $-2 < a \leq 2$

3) $a > 2$.

Коэффициенты $(2-a) < 0$, $(2+a) > 0$.

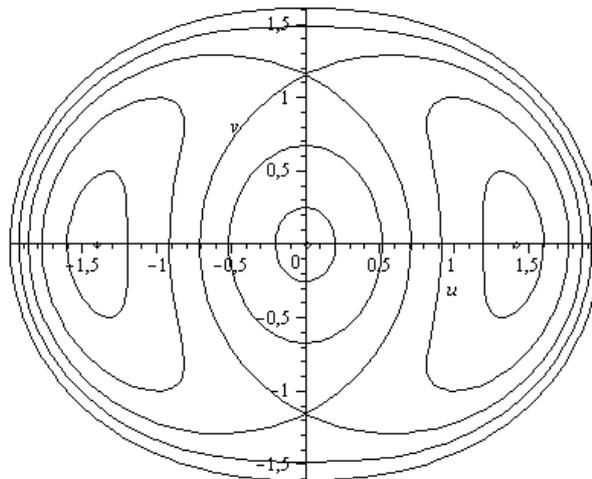


Рис.4.4. Фазовый портрет при $a > 2$

Рисунок 4.4 соответствует значению $a=10$. В этом случае имеем три устойчивых положения равновесия и два неустойчивых, через которые проходит сепаратриса.

Итак, мы имеем три качественно различных фазовых портрета, соответствующих интервалам $a \leq -2$, $-2 < a \leq 2$ и $a > 2$. Значения параметра $a = \pm 2$ являются

бифуркационными, при которых наблюдается изменение топологического типа фазового портрета колебаний.

5. Выводы

Основным результатом работы является описание параметрических резонансных колебаний в нелинейном приближении. Получены условия параметрического резонанса 1:2 для системы первого приближения и для системы в нелинейном приближении. Методом усреднения исследованы резонансные колебания точки как при строгом резонансе, так и в окрестности резонанса: выведены усредненные уравнения, показано, что они допускают первый интеграл, построен фазовый портрет колебаний. Найдено бифуркационное значение параметра a ($a=2$), при котором наблюдается изменение топологического типа фазового портрета колебаний. Результаты исследований дублируются в разных системах координат.

Примером описываемой задачи является система из двух одинаковых по массе и излучению звезд, между которыми сосредоточены облака из пылевых частиц, подверженных влиянию как сил светового давления (парусный эффект), так и сил гравитации.

Библиографический список

1. J. Chazy. *Surl'allurefinaldumouvementdansleproblèmedestrioscorsquant le temps croitindéfiniment*. Annales de l'Ecole Norm. Sup., 3 ser., 39,1922, P. 29-130
2. К.А. Ситников *Существование осциллирующих движений в задаче трех тел*. ДАН, 1960, Т. 133, № 2, С. 303-306
3. В.М. Алексеев *Квазислучайные динамические системы* I, II, III. Матем. сб.,1968, 76:1, с. 72-134; 1968, 77:4, с. 545-601; 1969, 78:1, с. 3-50
4. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973
5. E. Belbruno, J. Llibre, and M. Olle, *On the families of periodic orbits which bifurcate from the circular Sitnikov motions*, Celestial Mech. and Dynam. Astronom., 1994, 60 , p. 99-129.
6. M. Corbera and J. Llibre, *Periodic orbits of the Sitnikov problem via a Poincare map*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., 2000, 77 , p. 273-303
7. L. Jiménez-Lara, A. Escalona-Buendía, *Symmetries and bifurcations in the Sitnikov problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., 2001, 79 97-117
8. J. Llibre, R. Ortega, *On the families of periodic orbits of the Sitnikov problem*, SIAM J. Applied Dynamical Systems, 2008, 7, p. 561-576

9. J Hagel *A new analytic approach to the Sitnikov problem*, *Celes. Mech.*, 1992,53, p. 267–292.
10. T. Kovács and B. Érdi *The structure of the extended phase space of the Sitnikov problem* *Astron. Nachr.*, 2007, AN 328, No. 8, p. 801 – 804
11. Jie Liu, Yi-Sui Sun *On the Sitnikov problem*, *Celes. Mech.*, 1990,49, p. 285–302.
12. M. A. Jalali S. H. Pourtakdoust *Regular and Chaotic Solutions of the Sitnikov Problem near the 3/2 Commensurability* *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 1997, 68, 151-162
13. Clark Robinson *Uniform subharmonic orbits for Sitnikov problem* *Discrete and continuous dynamical systems, Series S*, 2008 Vol. 1, No 4, p. 647–652
14. Радзиевский В.В. *Астрономический журнал*, Т. 27, 1950, стр. 250
15. Д.Р. Меркин, *Введение в теорию устойчивости движения* (М., «Наука», 1976), с. 319
16. В.Н. Тхай *ПММ*, **70**, № 5, 813 (2006)
17. А.М. Ляпунов *Общая задача об устойчивости движения* (М.-Л., ГИТТЛ, 1950), с. 471

Сведения об авторах

Калас Вячеслав Олегович, студент Московского авиационного института (государственного технического университета);

тел.: 7-906-100-20-30; e-mail: sss@mail.ru