

## **Определение параметров дифференциального уравнения математической модели механического вращения ротора при отключении электродвигателя от сети**

**Лисов А.А.\*, Чернова Т.А.\*\*, Горбунов М.С.\*\*\***

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия*

*\*e-mail: [3141220@mail.ru](mailto:3141220@mail.ru)*

*\*\*e-mail: [chernova3244@gmail.com](mailto:chernova3244@gmail.com)*

*\*\*\*e-mail: [sgorbunov@aport.ru](mailto:sgorbunov@aport.ru)*

### **Аннотация**

Предложена методика количественной оценки параметров дифференциального уравнения состояния электродвигателя по кинетике вращения ротора при «выбеге». Проведено моделирование процессов в электромеханическом преобразователе как звене II-го порядка. Механическое вращение ротора в режиме выбега описывает обыкновенное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Определены параметры этого дифференциального уравнения по эмпирической функции вращения ротора в режиме выбега. Установлена взаимосвязь между значениями параметров дифференциального уравнения модели и параметрами эмпирической функции «выбега». Для обеспечения требуемой точности вычислений параметров уравнения использован метод двойного пересчета Рунге.

**Ключевые слова:** дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний ротора электродвигателя, моделирование деградационных изменений, математические методы диагностики состояния, эксплуатационная надежность.

В решении задач эксплуатационной надежности особо ответственных, многокомпонентных, сложных электротехнических объектов, необходим анализ их предотказного состояния в зависимости от условий их функционирования и деградационных изменений. Рассматривая причины и характер отказов электромеханических преобразователей, следует отметить, что в электромеханических машинах наиболее слабыми узлами являются: щеточно-коллекторный узел, обмотки и опоры (или подшипниковый узел).

Приступая к исследованию деградационных процессов электрической машины и планируя обеспечение её безотказной работы, прогноз остаточного ресурса, целесообразно выявить удельный вес в отказах различных её элементов. Ресурс зависит от их типа, габаритов, угловой скорости, подводимого напряжения и качества технологического процесса при изготовлении. Так, в машинах очень малых габаритов с тонким обмоточным проводом наибольшее число отказов возникает из-за обмотки; в высокоскоростных двигателях интенсивность отказов обуславливают подшипники качения; в машинах с контактными или щеточно-коллекторными узлами отказы обуславливают такие узлы.

Этим вопросам посвящено много работ. Среди них можно выделить определенные научные школы. По надёжности и проектированию электрических

машин важнейшей является школа МАИ под руководством Гольдберга О.Д. [1, 2]. В работах этой школы приведен глубокий вероятностно-статистический анализ надёжности электрических машин, методы испытаний. Однако, исследования по теории и практике электрических машин подробно рассматривают режимы запусков, работы при нагрузке и только на уровне замечаний отмечают режимы выбега, завершающие рабочий цикл. В настоящей работе, в рамках сложившегося направления, будем рассматривать «выбег» не как заключительный этап каждого из циклов работы асинхронного электродвигателя (ЭД), а как источник значительной итоговой информации ЭД по рассматриваемому циклу на данный период времени.

В работе [1] приведены результаты систематического наблюдения за эксплуатацией 600 асинхронных двигателей в различных отраслях промышленности. Кривая распределения интенсивности отказов асинхронных двигателей при эксплуатации в реальном масштабе времени показана на рисунке (рис. 1).

На рисунке хорошо видны первые 2 участка кривой распределения отказов: периоды приработки и начала периода нормальной эксплуатации. Третий участок кривой, характеризующий износ электродвигателей, связанный с их старением, до конца ещё не выявлен, так как приведенное время наблюдения за эксплуатацией электродвигателей недостаточно для получения отказов из-за старения и износа. И кроме того деградационный износ каждого электродвигателя индивидуален, зависит от его индивидуальных особенностей и индивидуальных особенностей эксплуатации.



Рис. 1. Зависимость интенсивности отказов от времени эксплуатации двигателя.

Рассмотрим вопросы моделирования и математические методы диагностики деградационного износа электродвигателя при разрушении подшипникового узла, который является одним из важнейших по частоте отказов и по значимости их последствий. В [1] отмечено, что из-за отказов подшипникового узла происходит до 5% отказов электродвигателей. Основные виды отказов подшипникового узла: заклинивание подшипника, разрушение сепаратора. Основные причины отказов: испарение смазки из подшипника, попадание в подшипник посторонних абразивных примесей, коррозия.

Таким образом, деградационные процессы в электрической машине сложны, важны, требуют практически непрерывного контроля, диагностики состояния. Однако, непрерывный контроль и диагностика технически сложны, экономически дорогостоящи и для каждого вида электрической машины, эксплуатируемой в определенных условиях, проблемы её деградации решаются практически индивидуально [3].

Можно предположить, что в процессе эксплуатации даже в ЭД закрытого исполнения в результате трения металлических поверхностей активные поверхности статора и ротора загрязняются, больше перегреваются, активные сопротивления обмоток увеличиваются, из-за трения в подшипниках момент сопротивления увеличивается, потери электрические и магнитные увеличиваются и т.д. Выполнив статистический анализ с привлечением факторного анализа, можно установить зависимость числовых параметров функции затухания скорости ротора при выбеге от перечисленных факторов и составить прогноз на поведение исследуемого ЭД в процессе эксплуатации [4].

### **Физическая сущность механических колебаний электродвигателей в режиме выбега**

Для разработки математической модели рассматриваемых в электродвигателе процессов, рассмотрим *свободные затухающие механические* колебания подвижных частей электродвигателя и электромагнитных колебаний в его обмотках. Всякий электродвигатель и как механическая система, и как электромагнитная система является упругой колебательной системой.

*Любые колебания представляют собой движение с переменным ускорением.* Для них характерна периодичность, изменение фазы  $\varphi$ , угловой частоты  $\omega$ , и мгновенного ускорения  $\alpha$ . Колебания инерционных систем можно разделить на вынужденные и свободные. Вынужденные колебания обусловлены действием внешних периодических вынуждающих сил: механических или

электрических. А потому и их характеристики (частота, периодичность, амплитуда, фаза) определяются внешними возмущениями.

Колебания, возникающие в том случае, когда колебательная система после исключения внешних возмущений колеблется в дальнейшем сама по себе, т.е. *свободные колебания*, с течением времени затухают (исчезают) из-за рассеяния запасённой в колебательной системе энергии. В механических колебательных системах убывание энергии обусловлено потерями её при трении в опорах, при трении подвижного ротора о воздух и превращении её в тепло. В электромагнитных колебательных контурах потери энергии обусловлены преобразованием её в тепло в активных сопротивлениях и излучением электромагнитных волн.

Механические колебания подвижных частей электродвигателя и электромагнитные колебания в его обмотках представляют собой свободные затухающие колебания. В режиме выбега при отключенной сети питания, при исключении действия мощных внешних источников энергии, уровни токов и магнитных полей снижаются, насыщение ферромагнитных участков уменьшается. А потому параметры электродвигателя можно считать постоянными, не зависящими от уровней токов и напряжений. Колебательные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства, остаются неизменными в ходе всего процесса затухания - *линейные*.

В линейных электромагнитных системах активное сопротивление, индуктивность и ёмкость не зависят ни от протекающих через них токов, ни от приложенных к ним напряжений. В линейных механических колебательных

системах геометрические размеры и формы, распределение масс остаётся постоянным в течение всего процесса затухания.

Линейные колебательные системы описывают, как правило, линейные дифференциальные уравнения. Причём, *различные по своей природе колебательные системы описывают аналогичные дифференциальные уравнения.* Последнее даёт основания к исследованию колебаний различной физической природы, к *их моделированию с единых позиций, едиными методами,* в том числе и к моделированию на ЭВМ.

Пусть в нормальном режиме работы под нагрузкой при стабильном номинальном питании ротор электродвигателя имел стабильную вынужденную частоту вращения  $\omega_{в}$ . В некоторый момент времени ( $t = 0$ ) происходит одновременное отключение всех фаз обмотки статора от сети. Ток статора предшествующего установившегося режима  $I_{сн}$  весьма быстро (в течение электромагнитной постоянной времени) обращается в ноль. Допуская, что при отсутствии тока статора в короткозамкнутой обмотке ротора не индуцируются ЭДС и токи, т.е. пренебрегая учётом электромагнитных переходных процессов, рассмотрим только механические процессы.

При внезапном нарушении установившегося нормального режима работы (отключение напряжения на зажимах) возникают механические колебания во вращении ротора. Ротор начинает тормозиться, уменьшать частоту вращения, но не с постоянным замедлением, а с переменным, иногда с вибрациями. Вибрации возникают в упругих механических системах, в которых действуют инерционные

силы, при всяких возмущениях, выводящих эту систему из положения равновесия. В положении равновесия упругие силы равны нулю.

При «сбросе» питания исчезает вращающий электромагнитный момент  $M_3$ , ротор должен тормозиться, его частота вращения (и скорость) падают. Но силы инерции стремятся препятствовать изменению скорости движения ротора в целом и пропорциональны ускорениям механических масс. Когда под воздействием упругой силы система подходит к положению равновесия, то вследствие инерции она через это положение переходит. При этом направление упругой силы изменяется на обратное, система вновь начинает приближаться к положению равновесия, но под влиянием инерции переходит его и т.д. Во время колебаний упругие и инерционные силы непрерывно изменяются по величине и по знаку. При колебаниях ротор попеременно движется то быстрее, то медленнее.

### **Моделирование механических колебаний электродвигателей в режиме выбега**

Исследования возникающих при выбеге свободных затухающих колебаний будем проводить на основе обобщённого электродвигателя с эквивалентной схемой, представляющей двухполюсную, двухфазную симметричную электрическую машину, имеющую по две взаимно перпендикулярные обмотки на статоре и роторе. Обобщённый электродвигатель является звеном второго порядка, его характеристику выбега описывает однородное дифференциальное уравнение вида [5, 6]:

$$J \frac{d^2 \omega(t)}{dt^2} + R \frac{d\omega(t)}{dt} + D\omega(t) = 0,$$



где  $J, R, D$  - коэффициенты исходного уравнения:  $J$ -момент инерции вращающихся частей,  $R$  –коэффициент вязкости,  $D$  –угловая жесткость ротора,  $\omega(t)$  – затухающая круговая частота вращения ротора.

Для решения «прямой» задачи, т.е. для нахождения решения исходного дифференциального уравнения представим его в приведенной форме:

$$\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} + 2\beta \frac{d\omega(t)}{dt} + \omega_0^2\omega(t) = 0,$$

где  $\beta = \frac{1R}{2J}$  – коэффициент затухания,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}}$  – собственная циклическая частота свободных незатухающих колебаний ротора. Заменяя  $\omega(t)$  на  $y(t)$ , запишем это уравнение в общепринятом виде:

$$y'' + ay' + by = 0,$$

где  $a$  и  $b$  - коэффициенты приведенного дифференциального уравнения. Его характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2 + ak + b = 0.$$

Если дискриминант этого уравнения больше нуля, его корни  $k_1$  и  $k_2$  действительны и различны. При этом решение приведенного дифференциального уравнения  $y(t)$  представляет собой сумму экспоненциальных функций:

$$y(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  находят из начальных условий задачи [6].

Имея лишь заданную табличную зависимость  $\omega(t)$  с целью определения значений коэффициентов этой зависимости  $A_1$  и  $A_2$ ,  $k_1$  и  $k_2$  решим вначале «обратную» задачу для приведённого дифференциального уравнения. То есть, о эмпирической табличной зависимости  $\omega(t)$  найдём коэффициенты  $a$  и  $b$  на основе

решения задачи Коши для однородного дифференциального уравнения, используя неявные формулы Эйлера 1-го порядка численного интегрирования дифференциальных уравнений [7]. Поскольку уравнение может быть «жестким», для его представления целесообразен неявный метод Эйлера, который достаточно устойчив к величине шага интегрирования  $h$ .

Преобразуем приведенное дифференциальное уравнение в систему 2-х уравнений 1-го порядка, для чего введем обозначения  $z(t) = y'(t)$ ,  $z'(t) = y''(t)$  и запишем систему:

$$\begin{cases} z' + a z + b y = 0 \\ y' = z \end{cases}$$

Разрешим эту систему относительно производных функций  $z'$  и  $y'$ , тогда неявные формулы Эйлера будут представлены в виде:

$$\begin{cases} z_{i+1} = z_i + h[-az_{i+1} - by_{i+1}] \\ y_{i+1} = y_i + h[z_{i+1}] \end{cases}$$

Для производных  $z(t) = y'(t)$ , составим расчетные формулы по правилам численного дифференцирования [7]:  $z_{i+1} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$  — внутри заданного временного интервала,

т.е., например,  $z_3 = \frac{y_4 - y_2}{2h}$ ;  $z_4 = \frac{y_5 - y_3}{2h}$ , и на границах этого

интервала:  $z_0 = \frac{-3y_1 + 4y_2 - y_3}{2h}$ ;  $z_5 = \frac{y_5 - y_4}{h}$ . Тогда для вычисления неизвестных  $a$  и

$b$  получим в общем виде систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} az_4 + by_4 = c_1 \\ az_5 + by_5 = c_2 \end{cases}$$

где:  $c_1 = \frac{z_3 - z_4}{h}$ ,  $c_2 = \frac{z_4 - z_5}{h}$ .

Рассмотрим иллюстративный пример, используя данные таблицы (табл. 1). В таблицу 1 с шагом  $h = 0,125$  сведены  $y_i$  – табличные значения  $y(t)$ ,  $y'_i$  – значения полученные по формулам численного дифференцирования.

Таблица 1.

$i$	1	2	3	4	5
$t_i$	0,000	0,125	0,250	0,375	0,500
$y_i$	50,00	46,40	43,09	40,03	37,22
$y'_i=z_i$	-29,93	-27,65	-25,47	-23,48	-21,67
$y_{pi}$	50,00	46,42	43,13	40,10	37,32
$\Delta_i$	0,00	0,01	0,04	0,07	0,10

Запишем систему линейных алгебраических уравнений с числовыми значениями коэффициентов:

$$\begin{cases} -23,48a + 40,03b = -15,90 \\ -21,67a + 37,22b = -14,51 \end{cases}$$

Решая эту систему, подставляя табличные данные, находим:  $a = 1,61$ ,  $b = 0,55$ . В результате, приведенное дифференциальное уравнение можно представить в виде:

$$y'' + 1,61y' + 0,55y = 0.$$

Далее вернемся к решению «прямой» задачи, для чего из характеристического уравнения устанавливаем значения корней:  $k_1 = -0,49$ ,  $k_2 = -1,12$ . Определим значения  $A_1$  и  $A_2$  аналитической функции выбега: из начальных условий для функции  $y(t)$  и её первой производной  $y'(t)$  при  $t = 0$ , из таблицы имеем:  $y(0) = 50$ ,  $y'(0) = -29,93$ . Подставляя в уравнение  $y(t) = A_1 e^{k_1 t} + A_2 e^{k_2 t}$  значение  $t = 0$ , имеем  $y(0) = A_1 + A_2 = 50$ . Соответственно, дифференцируя  $y(t)$  и подставляя  $t = 0$ , имеем:  $y'(0) = -0,49A_1 - 1,12A_2 = -29,93$ .

$A_2 = -29,93$ . отсюда получим  $A_1=41,30$  и  $A_2=8,70$ . Соответственно, решением приведенного дифференциального уравнения является расчётная функция  $y_p$ :

$$y_p = 41,30e^{-0.49t} + 8,70e^{-1.12t}.$$

Для оценки точности метода заполним последние строки таблицы (см. таблицу 1), внося в нее дискретные значения  $y_{pi}$  и расхождение между значениями экспериментальной и расчетной функциями  $\Delta_i = y_{pi}(t) - y_i(t)$ . Возможные расхождения таблично заданной  $y(t)$  и  $y_p(t)$ , можно существенно уменьшить эффективным подбором шага  $h$ , а также используя статистические методы коррекции.

### Численные методы уточнения показателей

Для обеспечения требуемой точности определения параметров дифференциального уравнения состояния использован метод двойного пересчета Рунге [8]. Для исходных данных таблицы 1 в таблице 2 приведена динамика уточнения показателей ЭД в зависимости от изменения величины шага аппроксимации  $h$ .

Таблица 2.

$h$	$a$	$b$	$A_1$	$K_1$	$A_2$	$K_2$	$\sigma$
0.5	2.03	0.73	44,8	-0.47	5,2	-1.51	0.22
0.25	1.70	0.60	42,58	-0.48	7,42	-1.25	0.07
<b>0.125</b>	<b>1.61</b>	<b>0.55</b>	<b>41,30</b>	<b>-0.49</b>	<b>8,70</b>	<b>-1.12</b>	<b>0.016</b>
0.0625	1.55	0.52	40,64	-0.492	9,36	-1.06	0.0025
0.03125	1.52	0.51	40,32	-0.496	9,68	-1.03	0.00036
Точное значение	1.5	0.5	40,0	-0.5	10,0	-1.0	

В таблице 2 в последней колонке приведены значения  $\sigma$  - вычисленные по формуле среднего квадратического отклонения:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta_i^2}{n}},$$

где  $\Delta_i$  - расхождение между значениями экспериментальной и расчётной функциями. Из таблицы 2 видна достоверная сходимость приближенных значений параметров к их точным значениям и существенная зависимость  $\sigma$  от шага аппроксимации  $h$ . Для рассматриваемой задачи достаточно выбрать шаг  $h=0.125$ , его абсолютная погрешность

$$S = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,016}{\sqrt{5}} \cong 0,007$$

В относительных единицах

$$\delta = \frac{S}{y_{\min}} * 100\% = \frac{0,007}{37,22} * 100 \cong 1,9\% < 2\%.$$

Таким образом, методом двойного пересчета Рунге можно обеспечить требуемую точность в получении параметров дифференциальных уравнений вращения ротора при выбеге.

Возвращаясь к коэффициентам приведенного дифференциального уравнения  $\omega_0$  и  $\beta$  рассматриваемого ЭД, определим их значения:

$$\omega_0 = \sqrt{b} = \sqrt{0,55} = 0,74 [1/c] \text{ и } \beta = 0,5a = 0,5 \cdot 1,61 = 0,81.$$

Из числа параметров исходного дифференциального уравнения  $J$ ,  $R$ ,  $D$ , только момент инерции  $J$ , определяемый геометрическими размерами и распределением (как правило, металлических) масс вычисляют на этапе проектирования объекта. В

нашем иллюстративном примере положим  $J = 105,3$  [кг·см<sup>2</sup>]. В процессе эксплуатации  $J$  практически сохраняет свою величину, поэтому о времени отработки объектом ресурса обычно судят лишь по изменению параметров  $R$  и  $D$  (здесь, согласно расчёту,  $R=169,53$  и  $D=57,92$ ).

Таким образом, решением «прямой» и «обратной» задач с использованием методов математического моделирования установлена взаимосвязь между значениями физических параметров дифференциального уравнения  $J, R, D$ , принятых для описания состояния ЭД, и параметрами аналитической зависимости  $\omega(t)$ , представляющей функцию выбега. Такая связь может стать основой параметрического контроля ЭД по информации, связанной с кинетикой функционирования ЭД, дающей достаточно полное представление о состоянии объекта [9, 10]. При этом, состояние исследуемого ЭД, состояние его подшипникового узла можно оценить по искажению функции скорости ротора, регулярно регистрируя лишь её значения. Функция затухания скорости вращения ротора исправного двигателя в режиме выбега приведена на рис 2. Её характеризует механическая постоянная времени  $T_M \cong 2$ с. Весь интервал затухания равен примерно  $\sim 3T_M \cong 6$ с. Начальная скорость в режиме выбега исправного двигателя соответствует паспортным данным  $n=1500$  об/мин. Номинальное скольжение для заданного электродвигателя равно 0.0272.

При деградации подшипников, при охрупчиваниях, выкрашиваниях поверхностей металла мелкими частицами существенно увеличивается момент сопротивления их вращающихся частей. В режиме выбега в подшипниках

увеличивается тормозной момент, сокращается время останова. Таким образом, если в режиме выбега начальная скорость меньше паспортной и время торможения сокращается – в подшипниках начались деградационные процессы (см. рисунок 2).

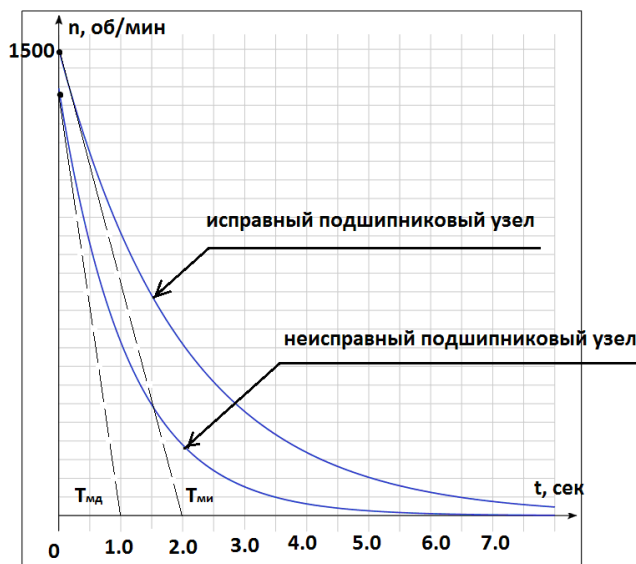


Рис 2. Затухание скорости вращения ротора в режиме выбега.

Механическая постоянная времени  $T_M$  функции торможения вала ротора является характеристическим параметром деградационных процессов в подшипниках. На рис. 2  $T_{ми}$  – постоянная времени исправного ЭД,  $T_{мд}$  – постоянная времени ЭД при деградации в подшипниковом узле.

**Замечание.** Рассмотрены признаки диагностирования деградационных изменений в ЭД по режиму выбега. Указанные признаки могут быть зафиксированы при наличии простейших измерительных приборов (вольтметров, секундомеров и тахометров) без планирования и реализации специальных экспериментов, а непосредственно при эксплуатации ЭД.

## Выводы

1. Установлена взаимосвязь между значениями физических параметров электродвигателя и характеристикой останова ротора. Показана возможность анализа деградационного изменения состояния электродвигателя по изменению характеристики останова ротора в режиме выбега.

2. Приведена методика количественной оценки параметров дифференциального уравнения состояния электродвигателя по кинетической характеристике вращения ротора в режиме выбега. Обеспечение требуемой точности параметров уравнения достигается методом двойного пересчета Рунге.

3. Разработан эффективный алгоритм для автоматизированной обработки исходной информации, полученной на этапе выбега в единичном рабочем цикле ЭД при отработке им ресурса.

### **Библиографический список**

1. Гольберг О.Д., Хелемская С.П. Надёжность электрических машин. - М.: Академия, 2010. – 288 с.

2. Гольдберг О.Д., Гурин Я.С., Свириденко И.С. Проектирование электрических машин. - М.: Высшая школа, 2001. – 431 с.

3. Лисов А.А., Чернова Т.А., Горбунов М.С. Имитационный подход к исследованию и моделированию деградационных процессов электротехнических преобразователе // Вестник Московского авиационного института. 2017. Т. 24. № 2. С. 150-159.



4. Заковряшин А.И., Кошелькова Л.В. Оценка максимально допустимого времени применения сложного объекта по назначению // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=73384>
5. Алексеев Г.В. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – Владивосток: ДВФУ, 2010. – 120 с.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - СПб.: Лань, 2003. - 576 с.
7. Копчёнова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: СПб: Лань, 2009. - 368 с.
8. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. - М.: Наука, Гл. ред. физ-мат литературы, 1967. - 368 с.
9. Лисов А.А. Методологические предпосылки к упреждению отказов машин и машинных агрегатов роторного типа // Измерительная техника. 2001. № 5. С. 7-10.
10. Лисов А.А., Чернова Т.А., Горбунов М.С., Кубрин П.В. Моделирование переходных процессов «угасания» характеристик электродвигателей при отключении питания // Качество и жизнь. 2016. № 2. С. 38-41.