УПРАВЛЕНИЕ, ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА И ИНФОРМАТИКА

УДК 531.01:629.78

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ОПОРНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ СИНТЕЗЕ БОРТОВЫХ АЛГОРИТМОВ НАВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Дильмурат Мухамаджанович АЗИМОВ родился в 1964 г. в городе Ташкенте. Докторант МАИ. Кандидат физико-математических наук. Основные научные интересы — в области оптимизации траекторий, наведения, навигации и управления космическими аппаратами. Автор 42 научных работ. E-mail: mai_kaf604@mail.ru

Dilmurat M. AZIMOV, Ph.D., was born in 1964, in Tashkent. He is working towards his D.Sci. degree at the MAI. His research interests are in spacecraft trajectory optimization, guidance, navigation and control. He has published 42 technical papers. E-mail: mai_kaf604@mail.ru

Станислав Алексеевич ГОРБАТЕНКО родился в 1934 г. в городе Смоленске. Профессор МАИ. Доктор технических наук, профессор. Основные научные интересы — в области теории управления и устойчивости движения ЛА. Автор более 200 научных работ. E-mail: mai_kaf604@mail.ru

Stanislav A. GORBATENKO, D.Sci., was born in 1934, in Smolensk. He is a Professor at the MAI. His major research interests are in control theory and motion stability for flight vehicles. He has published over 200 technical papers. E-mail: mai_kaf604@mail.ru

Рассматривается аналитический подход к решению вариационной задачи оптимизации траекторий центра масс космических аппаратов в ньютоновском поле. На основе анализа условия Клебша определены классы экстремальных и оптимальных активных участков, которые классифицируются в зависимости от значений мощности и удельного импульса. Получены два класса аналитических решений для экстремального движения с ограниченной мощностью. Полученные решения для активных участков могут быть использованы в маневрах перелета на заданную орбиту и ухода с эллиптической орбиты. Представленный в работе метод аналитического определения экстремальных решений вариационной задачи может служит инструментом выделения опорных траекторий в задачах космического наведения.

An analytical approach is considered to solve a variational trajectory optimization problem for spacecraft center of mass in the Newtonian filed. Classes of extremal and optimal thrust arcs, which are classified depending on values of power and specific impulse, are defined using the Clebsch condition. Two classes of analytical solutions are obtained for extremal spacecraft motion with a limited power. The thrust arc solutions obtained can be used in spacecraft maneuvers design for transfer into some specified orbit or for escape from some elliptical orbit. The analytical definition technique to find extremal solutions of the variational problem can be used as a tool to obtain reference trajectories needed to solve spacecraft guidance problems.

Ключевые слова: проблема оптимизации, аналитический метод, экстремальное решение, исходная орбита, эллиптическая орбита.

Key words: optimization problem, analytical method, extreme solution, reference orbit, elliptical orbit.

Условные обозначения

КА — космический аппарат;
$\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор центра масс КА;
r — величина радиус-вектора;
$\boldsymbol{v}$ — вектор скорости центра масс КА;
v_1, v_2 — радиальная и трансверсальная составляющие вектора скорости;
m — масса КА;
μ — гравитационный параметр;
$\boldsymbol{e}$ — единичный вектор тяги;
$\boldsymbol{u}$ — вектор управления;
I_s — удельный импульс;
c — скорость истечения газов;
P — мощность;
a_t — реактивное ускорение;
β — секундный расход массы;
g_0 — ускорение свободного падения;
H — гамильтониан;
$\boldsymbol{\lambda}$ — базис-вектор;
λ — величина базис-вектора;
λ_1, λ_2 — радиальная и трансверсальная составляющие базис-вектора;
λ_3, λ_4 — множители Лагранжа, используемые для вычисления вектора λ_r;
λ_5, λ_m — множители Лагранжа, сопряженные массе;
λr — вектор, сопряженный радиус-вектору;
J — функционал вариационной задачи;
μ, α, β — дополнительные переменные;
φ — угол тяги;
θ — полярный угол;
p — параметр эллиптической орбиты;
ω — угловое расстояние перигея;
γ, η — дополнительные управления;
χ — функция переключения;
f — истинная аномалия;
r_{si} — радиус сферы действия Земли;
n, C, C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования.

Введение

Эффективность осуществления маневров во многом зависит от функционирования и характеристик бортовой системы наведения космических аппаратов (КА). Наведение реализуется, в частности, автономным образом на активных участках (АУ) траекторий маневров, таких, как переход на межпланетную траекторию, вход в орбиту парковани или посадка на требуемой местности на поверхности небесного тела с достаточной точностью и др. Задача автономного наведения состоит в определении таких управляющих воздействий, которые приводят КА из заданного или текущего состояния в заданное состояние в заданный момент времени с определенной точностью. Решение этой задачи обеспечивается одним из двух типов бортовых систем наведения. Первый тип этих систем функционирует по методу «жестких» траекторий [1]. Эти системы обеспечивают движение КА по заранее рассчитанной номинальной траектории. Второй тип систем управления строится на принципах терминального управления и реализует наведение по методу «гибких» траекторий. Система управления в каждый выбранный момент времени сама формирует программу изменения тяги в зависимости от целей наведения и текущих параметров КА. Алгоритмы наведения в системах обоих типов могут быть построены на основе явных зависимостей, которые представляют собой решение задачи оптимизации.

В данной работе исследуется вариационная задача оптимизации траекторий центра масс КА с целью получения аналитических решений для построения бортовых алгоритмов наведения. Известно, что эта задача может быть сформулирована в форме задачи Майера, решение которой сводится к канонической системе уравнений 14-го порядка [2, 3]. Предложено множество решений на основе численно интегрированных оптимальных траекторий [4]. Эти решения очень чувствительны к начальным условиям и не позволяют построить простые и надежные законы автономного наведения из-за возможной проблемы сходимости параметров задачи, неопределенности начальных значений множителей Лагранжа во время изменения режима тяги и из-за неизвестной последовательности участков тяги на траектории. Поэтому для исключения возникновения этих проблем необходимо иметь надежную опорную траекторию, которая описывается явными зависимостями между параметрами КА и траектории. Как известно, получение таких траекторий связано с аналитическим решением вариационной задачи [2, 5]. В случае численного интегрирования уравнений задачи с учетом реальных условий полета это решение может быть рассмотрено как решение нулевого порядка.

Вариационная задача

Пусть движение центра масс КА как точки переменной массы изучается в инерциальной системе координат, центр которой совпадает с центром притяжения. В любой момент времени на интервале $[t_1, t_2]$ движение этой точки определяется вектор-функцией $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, m)$, составляющие которой предполагаются непрерывными и дифференцируемыми на том же интервале, но их производные могут иметь разрывы. Здесь $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ — радиус-вектор и вектор скорости; m — масса КА; t_1, t_2 — начальное и конечное время движения. Уравнения движения центра масс КА имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{r}} \\ \dot{\boldsymbol{v}} \\ \dot{m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ -\dfrac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r} + \dfrac{2P}{I_s m g_0}\boldsymbol{e} \\ -\dfrac{2P}{I_s^2 g_0^2} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

где μ — гравитационный параметр притягивающего небесного тела; $e = (e_1, e_2, e_3)$ — единичный вектор тяги; I_s — удельный импульс; P — мощность, которая определяется как $P = \frac{1}{2}\beta I_s^2 g_0^2$; β — секундный расход массы; g_0 — ускорение свободного падения, которое считается постоянным. Вектор-функция $\boldsymbol{u} = (P, I_s, e_1, e_2, e_3)$ называется вектором управления (или просто управлением). Составляющие этого вектора определены на том же интервале времени $[t_1, t_2]$ и предполагаются кусочно-непрерывными функциями, и на них наложены следующие ограничения:

$$\begin{gathered} e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1; \\ P \le P_{\max}; \\ I_{\min} \le I_s \le I_{\max}, \end{gathered} \qquad (2)$$

где $P_{\max}$, $I_{\min}$ и $I_{\max}$ — заданные значения мощности и удельного импульса.

Пусть при t_1 и t_2 начальные и конечные условия даны в виде

$$\Psi_l(x_1) = 0,\ l = 1, \ldots, p,\ p \le n; \qquad (3)$$

$$F_k(x_2) = 0,\ k = 1, \ldots, q,\ q < n + 1. \qquad (4)$$

Здесь и далее индексы «1» и «2» будут означать начальное и конечное значения переменных, исключая v и λ, для которых эти индексы будут означать радиальные и трансверсальные составляющие. Требуется найти $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{u}$ так, чтобы (1)—(4) удовлетворялись, а заданный функционал

$$J(x_{2,q+1}, x_{2,q+2}, \ldots, x_{2,n}, t_2) \qquad (5)$$

принимал минимально возможное значение. Все функции в (3)—(5) являются непрерывными и обладают непрерывными частными производными достаточно высокого порядка по всем аргументам.

Заметим, что минимум расхода топлива является одним из важнейших критериев в осуществлении маневров. При этом в случае двигателей большой тяги обычно рассматривается минимизация интеграла $\int a_t(t)\,dt$ или выражения $m_1 - m_2$. Здесь a_t — ускорение от тяги. В случае двигателей малой тяги в качестве минимизируемого функционала может быть рассмотрен интеграл $\int a_t^2(t)\,dt$. Исключая $c = I_s g_0$ из формул $P = \frac{1}{2}\beta c^2$ и $a_t = \frac{\beta c}{m}$, имеем

$$\frac{a_t^2}{2P} = \frac{\beta}{m^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\right),$$

откуда после интегрирования получим

$$\frac{m_1}{m_2} = 1 + m_1 \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_t^2}{2P}\,dt.$$

Из этого, в частности, следует, что независимо от типа двигателей минимизация интеграла $\int a_t^2(t)\,dt$ при удержании мощности при ее максимальном значении приведет к минимизации отношения $\frac{m_1}{m_2}$. Следовательно, выбор $P = P_{\max}$ является эффективным по сравнению с промежуточными значениями мощности на любых активных участках при минимизации $\int a_t^2(t)\,dt$. С другой стороны, можно показать, что при $c = I_s g_0 = \text{const}$ имеем

$$J = \int_{t_1}^{t_2} a_t^2\,dt = \int \frac{c\beta}{m}\,dt = c \ln \frac{m_1}{m_2},$$

что эквивалентно минимизации $m_1 - m_2$. Из рассуждений, приведенных выше, следует, что, в частности, при $P = P_{\max}$ минимизация интеграла

$\int a_t(t)dt$ при $c = \text{const}$ эквивалентна минимизации $\int a_t^2(t)dt$.

Расширенный функционал и канонические уравнения

Расширенный функционал задачи запишем в виде

$$K(x_1, x_2, u, \alpha, \beta, t_2) = G + \int_{t_1}^{t_2} [H - \lambda^T \dot{x}]dt, \qquad (6)$$

где

$$H(x, u, \lambda, \mu, t) = \lambda^T \dot{\boldsymbol{x}} + \mu^T \boldsymbol{\Phi};$$

$$G(x_1, x_2, \alpha, \beta, t_1) = J + \alpha^T \Psi + \beta^T F.$$

Здесь $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_p)$ и $F = (F_1, F_2, ..., F_q)$ — вектор-функции, составляющие которых заданы в (3) и (4), векторы $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ рассматриваются как неизвестные множители, а $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)^T$;

$$\begin{gathered}\Phi_1 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - 1 = 0;\ \Phi_2 = P(P_{\max} - P) - \gamma^2 = 0;\\ \Phi_3 = (I_{\max} - I_s)(I_s - I_{\min}) - \eta^2 = 0,\end{gathered} \qquad (7)$$

где η и γ — дополнительные управляющие переменные, подлежащие определению. При этом вектор управления принимает вид

$$\boldsymbol{u} = (P, I_s, e_1, e_2, e_3, \eta, \gamma).$$

Тогда первый дифференциал (6) приводится к виду

$$dK = (G_{x_1} + \lambda_1^T)dx_1 + (G_{x_2} - \lambda_2^T)dx_2 + (G_{t_2} + H_2)dt_2 +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \left[H_x + \dot{\lambda}^T)\delta x + H_u \delta u + (H_\lambda - \dot{x}^T)\delta\lambda \right] dt.$$

Здесь и далее принято, что если нижним индексом функции является некоторый вектор или переменная, то это будет означать частную производную функции по составляющим этого вектора или переменной. С учетом (1)—(4) из $dK = 0$ получим следующие необходимые условия оптимальности первого порядка:

$$\dot{x}^T = H_\lambda,\ \dot{\lambda}^T = -H_x,\ H_u = 0; \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = 0,\ \ F = 0,\ \lambda_1(t_1) = -G_{x_1}^T,\ \lambda_2(t_2) = G_{x_2}^T,\ H_2 = -G_{t_2}. \qquad (9)$$

Уравнения (8) определяют 21 переменную x_i, λ_i, u_r $(i, r = 1, ..., 7)$ вместе с 14 постоянными интегрирования. Эти постоянные вместе с векторами α_l $(l = 1, ..., p)$, β_k $(k = 1, ..., q)$ и временем t_2 могут быть определены из (9). Заметим, что из (1), (7) и (8) следуют канонические уравнения [5]:

$$\begin{gathered}\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{2P}{I_s g_0 m} \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda} - \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{r};\quad \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v};\quad \dot{m} = -\frac{2P}{I_s^2 g_0^2};\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\boldsymbol{\lambda}_r;\quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}_r = \frac{\mu}{r^3}\boldsymbol{\lambda} - 3\frac{\mu}{r^5}(\boldsymbol{\lambda r})\boldsymbol{r};\quad \dot{\lambda}_m = \frac{2P}{I_s m^2 g_0}\lambda.\end{gathered} \qquad (10)$$

В полярной системе с началом в центре притяжения векторы в (10)имеют вид [3]

$$\boldsymbol{r} = (r, 0);\ \boldsymbol{v} = (v_1, v_2);\ \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2);\ \boldsymbol{\lambda}_r =$$

$$= \left(\lambda_3,\ \lambda_1 \frac{v_2}{r} - \lambda_2 \frac{v_1}{r} + \frac{\lambda_4}{r} \right).$$

Результатами решения системы (10) при заданных краевых условиях вместе с условиями трансверсальности (9), т.е. решениями смешанной краевой задачи являются экстремальные траектории в рамках рассматриваемой задачи. Оптимальная траектория является наилучшей экстремальной траекторией на которой функция J принимает минимальное возможное значение. Для выделения оптимальной траектории среди всех экстремальных траекторий необходимо проверить условия оптимальности второго и высокого порядков. Выполнение этих условий во многом зависит от выполнения условия Клебша, которое, в частности, позволяет определить наличие особых траекторий и сопряженных точек (условие Якоби) на экстремальной траектории.

Выполнимость условия Клебша

Как известно, условие Клебша является одним из необходимых условий оптимальности второго порядка, согласно которому в каждой точке оптимальной траектории матрица вторых частных производных гамильтониана по отношению ко всем управлениям H_{uu} должна быть положительно полуопределенной. С другой стороны, положительная определенность этой матрицы в каждой точке экстремальной траектории служит одним из достаточных условий оптимальности. Это условие выражается условиями строгой положительности всех главных миноров матрицы H_{uu}, элементы которой определяются в виде

$$[H_{uu}] = \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \quad (i, j = 1, \dots, 7), \tag{11}$$

где

$$H(x, u, \lambda, \mu, t) = \lambda^T \dot{x} + \mu^T \Phi; \tag{12}$$

$$\boldsymbol{u} = (P, I_s, e_1, e_2, e_3, \eta, \gamma). \tag{13}$$

Рассмотрим элементы матрицы H_{uu} в (11). Если $\mu_2 = 0,\ \mu_3 \neq 0$, тогда $\gamma \neq 0,\ \eta = 0,$ что соответствует случаю $0 < P < P_{\max},\ I_s = I_{\min}$ или $I_s = I_{\max}$, т.е. движению с постоянным I_s и переменной мощностью. В этом случае $H_{\gamma u} = 0.$ Если $\mu_2 \neq 0, \mu_3 = 0,$ то $\gamma = 0,\ \eta \neq 0,$ что влечет за собой $P = P_{\max}$ или $P = 0$ и $I_{\min} < I_s < I_{\max}$, т.е. движение с переменным I_s и $P_{\max}$. Тогда $H_{\eta u} = 0$. В обоих случаях . Это будет означать, что все главные миноры матрицы H_{uu} равны нулю, что указывает на наличие особых экстремальных траекторий в случае $\gamma \neq 0, \eta = 0$ и $\gamma = 0,\ \eta \neq 0.$ Следовательно, активные участки с максимальной мощностью $P_{\max}$ и переменным удельным импульсом $I_{\min} < I_s < I_{\max}$ или с переменной мощностью $0 < P < P_{\max}$ и постоянным удельным импульсом $I_s = I_{\min}$ или $I_s = I_{\max}$ представляют собой особые экстремали рассматриваемой задачи. Если $\mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$, то строгая положительность всех главных миноров матрицы H_{uu} обеспечивается надлежащим выбором μ, λ и *e*. Необходимо отметить, что в настоящее время полные решения канонической системы, соответствующие случаю $\mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$, остаются неизвестными. Из условий $H_u = 0$ следуют равенства $\gamma = 0, \eta = 0$, которые означают движение с $P = P_{\max}$, $I_s = I_{\min}$ или $I_s = I_{\max}$ [6]. Таким образом, оптимальными активными участками могут быть те, на которых мощность имеет максимальное значение $P = P_{\max}$, а удельный импульс постоянен, т.е. $I_s = I_{\min}$ или $I_s = I_{\max}$. На основании вышеизложенного можно заключить, что среди всех экстремалей вариационной задачи могут удовлетворять условию Лежандра—Клебша, т.е. $H_{uu} > 0$, только те активные участки, на которых постоянны мощность *P* и удельный импульс I_s. Как видно из этих рассуждений, выполнение этого условия позволяет выделить активные участки, которые претендуют на оптимальность, но в то же время сильно сужает область допустимых значений параметров задачи. С другой стороны, рассматриваемая в этой работе задача является модельной задачей механики полета, так как в задаче не рассматриваются гравитационные эффекты неосновных небесных тел, атмосферные силы, солнечное давление и др. В этом смысле не только все экстремальные, но и оптимальные траектории являются приближением к истинной траектории и в дальнейшем могут служить опорными траекториями для задач навигации и наведения. Одним из главных вопросов решения канонических уравнений (10) является нахождение необходимого числа первых интегралов этой системы для активных участков. Как известно, эти интегралы представляют многообразия фазовых переменных, которые содержат активные участки траекторий движения с постоянным и переменным удельными импульсами. Можно показать, что в случаях движения с постоянным I_s и переменной *P*, а также с переменным I_s и постоянной *P* принципиальная трудность получения решений в квадратурах заключается в нахождении *только одного интеграла*. В случае движения с постоянным I_s и максимальной *P* принципиальная трудность получения решений в квадратурах заключается в нахождении четырех первых интегралов [3].

Экстремали с нефиксированным временем

В случае плоских активных участков, где $P = P_{\max}$ и $I_s = \text{const}$, система (10) имеет первые интегралы [3]:

$$\begin{gathered}\lambda_1\left(-\frac{\mu}{r^2} + \frac{v_2^2}{r}\right) - \lambda_2 \frac{v_1 v_2}{r} + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 \frac{v_2}{r} = C;\\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 - 2\lambda_3 r - c\lambda \ln\frac{m_1}{m_2} + 3Ct = C_1;\\ \lambda_4 = C_2;\ \ m\lambda_5 = C_3;\ \ \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} = \lambda,\end{gathered} \tag{14}$$

где $C, C_1, C_2, C_3, \lambda$ — постоянные интегрирования; $\lambda_5 = \lambda_m$. На рассматриваемых участках производные всех порядков от функции переключения χ равны нулю:

$$\dot{\chi} = \ddot{\chi} = \dddot{\chi} = \dots = 0, \tag{15}$$

где $\chi = \frac{c}{m}\lambda - \lambda_5$.

Если по условиям задачи полярный угол фиксирован $(C_2 \neq 0)$ и время полета не фиксировано $(C = 0)$, то можно показать, что интегралы (14) и инвариантные соотношения (15) позволяют получить два класса решений, которые приводятся ниже.

Докажем теорему.

Теорема. *Пусть в вариационной задаче (1)—(5) конечное время не фиксировано, а полярный угол фиксирован. Тогда существуют, по крайней мере, два класса активных участков движения с переменной мощностью и постоянным удельным импульсом, решения для которых выражаются в конечном виде.*

Доказательство теоремы будет состоять из двух частей.

Доказательство первой части теоремы.

Перепишем равенства $\dot{\chi} = 0$ и $\ddot{\chi} = 0$ в виде

$$\frac{\lambda_4}{\lambda} = \pm k\sqrt{\frac{\mu}{r^3}(1-3s^2)};$$
$$s\frac{v_2}{r} - k\frac{v_1}{r} + \frac{n}{r} = \mp s\sqrt{\frac{\mu}{r^3}(1-3s^2)}, \qquad (16)$$

где

$$s = \sin\varphi,\ k = \cos\varphi,\ \lambda_1 = \lambda s,\ \lambda_2 = \lambda k,\ n = \pm\frac{C_2}{\lambda}.$$

Подставляя (16) в первое равенство (14), имеем

$$\frac{C^2}{\lambda^2}r^4 + 6\frac{C}{\lambda}\mu s^3 r^2 - n^2\mu(1-3s^2)r + 9\mu^2 s^6 = 0. \qquad (17)$$

С помощью (14)—(17) получим решения системы (10) в виде функций от угла тяги φ, т.е. угла между перпендикуляром к радиус-вектору и направлением тяги. Так, если $n \neq 0$ и $C = 0$, из (17) следует

$$r = \frac{9\mu}{n^2}\frac{s^6}{1-3s^2}. \qquad (18)$$

Используя (18), можно переписать равенства $\dot{\chi} = 0$ и $\ddot{\chi} = 0$ в форме

$$sv_2 - kv_1 = \mp n\frac{1-3s^2}{3s^2} - n;$$
$$sv_1 + kv_2 = \pm 2n\frac{k(1-3s^2)}{3s^3} - \frac{1-5s^2}{2s}v_1. \qquad (19)$$

Ниже получим два класса экстремалей (10) на основе (19).

Первый класс экстремалей. При выборе первого знака в правых частях (19) с учетом (18) имеем

$$r = \frac{\mu}{n^2}L_1(s),\ v_1 = nL_2(s),\ v_2 = nL_3(s), \qquad (20)$$

где

$$\sin^2\varphi < \frac{1}{3};\ \ L_1(s) = \frac{9s^6}{1-3s^2};$$

$$L_2(s) = \frac{2k(1-2s^2)}{s^2(3-5s^2)};\ \ L_3(s) = \frac{3-13s^2+12s^4}{3s^3(3-5s^2)}.$$

В частности, для маневра перелета с заданной точки на заданную орбиту, который будет рассмотрен ниже, имеем $\frac{dr}{dt} < 0$ для любого t и, следовательно, $n < 0$, так как $L_2(s) > 0$ для любого t. Подставляя эти значения в (14), получаем:

$$m = m_1\exp[h(s)];$$
$$h(s) = \frac{1}{c}\left[n\frac{k(10s^4 - 7s^2 + 1)}{s^3(3-5s^2)} + \frac{C_1}{\lambda}\right];\ c = I_s g_0. \qquad (21)$$

Из выражений (20) и $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$ получим

$$\theta = \theta_0 - 3\cot\varphi - 4\varphi; \qquad (22)$$

$$t = t_1 + 27\frac{\mu}{n^3}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{s^7(3-5s^2)}{(1-3s^2)^2}d\varphi. \qquad (23)$$

Уравнения (18) и (22) являются параметрическими уравнениями движения по спиральной траектории (спирали Лоудена). Зависимость (23) определяет монотонность угла тяги по времени. Дифференцируя (21) и (23), находим

$$\beta = -\frac{\frac{dm}{d\varphi}}{\frac{dt}{d\varphi}} = \frac{n^4}{27\mu}\frac{m}{c}\frac{(1-3s^2)^3(9-25s^2+20s^4)}{s^{11}(3-5s^2)^3}. \qquad (24)$$

Соответствующее реактивное ускорение имеет вид

$$a_t = \frac{n^4}{27\mu}\frac{(1-3s^2)^3(9-25s^2+20s^4)}{s^{11}(3-5s^2)^3}. \qquad (25)$$

Соответствующие множители Лагранжа вычисляются по формулам

$$\lambda_1 = \lambda s; \;\; \lambda_2 = \lambda k; \;\; \lambda_3 = \lambda \frac{n^3}{27\mu} \frac{k(1-3s^2)}{s^9};$$

$$\lambda_4 = \lambda n; \;\; \lambda_5 = \lambda \frac{c}{m}.$$

Причем $C = 0$, $C_2 = \lambda n$, $C_3 = \lambda c$, $n, t_1, \theta_0, C_1, \lambda$ — постоянные интегрирования.

Можно показать, что приведенные выше решения аналогичны спиралям Лоудена, которые были получены при помощи интегралов уравнений движения и базис-вектора, введения новых преобразований переменных [7], а также при помощи проверки второй вариации [8]. В данной работе решения Лоудена получены на основе решений канонических уравнений задачи и анализа инвариантных соотношений и первого интеграла, явно содержащего время и массу. Преимущество такого подхода состоит в возможности получения неизвестных до сих пор классов решений канонических уравнений. Время выражается в квадратуре от угла тяги. Если угол тяги увеличивается от $\varphi_1 \neq 0$ до $\varphi_2 < \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}61548$ или уменьшается от $\varphi_1 \neq 0$ до $\varphi_2 > -0{,}61548$, величина радиус-вектора увеличивается от r_1 до ∞. Соответствующий сегмент может быть использован в задачах перелета на заданную орбиту паркования и в задаче ухода с гравитационного поля планеты. Уравнения движения могут также быть проинтегрированы численным образом, если вместо угла тяги подставляется его значение, полученное из аналитических решений. Расчеты показали, что значения переменных системы (10), полученных из аналитических решений и при помощи численного интегрирования, одинаковы для любого значения φ.

Второй класс экстремалей. Выбирая второй знак в правых частях (19) и учитывая (18), получим

$$r = \frac{\mu}{n^2} W_1(s); \;\; v_1 = n W_2(s); \;\; v_2 = n W_3(s),$$

где

$$W_1(s) = \frac{9s^6}{1-3s^2}; \;\; W_2(s) = \frac{2k(-1+4s^2)}{s^2(3-5s^2)};$$

$$W_3(s) = \frac{-3+7s^2+6s^4}{3s^3(3-5s^2)}.$$

Как видно из этих формул, $W_1 = L_1$. Остальные переменные второго класса экстремалей находятся таким же образом, как и в случае первого класса экстремалей:

$$m = m_1 \exp[z(s)]; \;\; z(s) = \frac{1}{c}\left[n \frac{k(1-10s^2)(1+3s^2)}{3s^3(3-5s^2)} + \frac{C_1}{\lambda} \right];$$

$$\theta = \theta_0 + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{(1-2s^2)(3-5s^2)(-3+7s^2+6s^4)}{s^2(-1+4s^2)(1-3s^2)^2} d\varphi;$$

$$t = t_1 + 27 \frac{\mu}{n^3} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{s^7(1-2s^2)(3-5s^2)}{(-1+4s^2)(1-3s^2)^2} d\varphi;$$

$$\beta = -\frac{n^4}{81\mu} \frac{m}{c} \times$$
$$\times \frac{(-1+4s^2)(1-3s^2)^2(-9+53s^2-258s^4+170s^6)}{s^{11}(1-2s^2)(3-5s^2)^3};$$

$$a_t =$$
$$= -\frac{n^4}{81\mu} \frac{(-1+4s^2)(1-3s^2)^2(-9+53s^2-258s^4+170s^6)}{s^{11}(1-2s^2)(3-5s^2)^3}.$$

Аналогично первому классу экстремалей, здесь также можно показать, что экстремали рассматриваемого класса не содержат сопряженных точек. Теорема доказана.

Анализ поведений массы, скорости изменения угла тяги и скорости в случаях обоих классов по отношению к углу тяги показывает, что существует небольшое различие между решениями для этих классов, хотя расход массы является более эффективным в случае первого класса экстремалей. Несмотря на это различие, оба класса экстремалей могут быть использованы как опорные траектории для решения задач наведения.

Пример построения траектории перелета из заданного положения на заданную орбиту

В рамках поставленной выше вариационной задачи (1)—(5) рассмотрим траекторию маневра перелета КА с наименьшим расходом топлива из заданного положения на заданную эллиптическую орбиту паркования. В качестве активного участка будем использовать экстремали первого класса (спирали Лоудена). Здесь нас интересует та часть задачи, которая связана с построением экстремальной траектории КА при наличии аналитических решений, представленных в (20) и (23), опуская анализ зависимостей времени и динамических параметров от постоянных интегрирования и других переменных задачи (см. (21), (23)—(25)). Поэтому значение максимальной мощности и граничные значения удельного импульса, а также конечные значения функционала задачи не будут рассмотрены в данном анализе. Предполагается, что КА входит в сферу действия Земли, когда $r_1 = r_{si}$ (условие (3)), где r_1 — величина радиус-вектора центра масс КА; $r_{si} = 9{,}2482 \times 10^5$ км — радиус сферы действия Земли. Здесь предполагается, что скорость центра масс КА в точке входа в сферу действия Земли предполагается неизвестной и подлежит определению на основе условий непрерывности в этой же точке переключения. Такое определение начальных условий связано с тем, что рассматриваемые экстремали первого класса представляют собой частные решения канонической системы уравнений (10) и, следовательно, ограничивают, на первый взгляд, выбор начальных параметров КА. Однако на основе вычисленных составляющих скорости можно, например, найти параметры гиперболической орбиты входа в сферу действия Земли. Значит, часть результатов данного примера позволяет ответить на вопрос о том, какова должна быть начальная гиперболическая орбита для дальнейшего перехода на заданную орбиту паркования. Такая задача имеет важное практическое значение, например, при возвращении образцов грунта Марса. Предположим далее, что конечные условия удовлетворяются, когда КА достигает заданной эллиптической орбиты и начинает движение по ней с параметром $p = 10000$ км, эксцентриситетом $e = 0{,}1$ и угловым расстоянием перигея орбиты $\omega = 0$ рад. В этом случае условия (4) принимают вид параметрических уравнений эллиптической орбиты:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}; \;\; \theta = f + \omega,$$

где f — истинная аномалия.

Функционал задачи имеет вид $J = m_1 - m_2$ (см. условие (5)). Рассмотрим случай, когда время маневра не фиксировано ($C = 0$) и конечный полярный угол фиксирован ($n \neq 0$), а фаза движения на конечной орбите считается произвольной. Если предполагать, что двигатель КА работает в течение всего времени движения, то в этом случае существуют две точки переключения. Значения переменных в этих точках будем обозначать через 1 и 2 соответственно. Условия непрерывности в первой точке имеют вид

$$\frac{\mu}{n^2} L_1(s_2) = r_{si}; \;\; \theta_1 = \theta_0 - 3\mathrm{ctg}\varphi_1 - 4\varphi_1;$$
$$nL_2(s_1) = v_{11} \quad nL_3(s_1) = v_{21}. \qquad (26)$$

Во второй точке условия непрерывности даны в виде

$$\frac{\mu}{n^2} L_1(s_2) = \frac{p}{1 + e\cos f_2};$$
$$\theta_2 = \theta_0 - 3\mathrm{ctg}\varphi_2 - 4\varphi_2 = f_2 + \omega; \qquad (27)$$

$$nL_2(s_2) = \frac{\mu}{p} e\sin f_2; \;\; nL_3(s_2) = \frac{\mu}{p}(1 + e\cos f_2), \qquad (28)$$

где f_2 — истинная аномалия второй точки переключения.

Условия (26)—(28) позволяют найти неизвестные $n, \varphi_1, \varphi_2, f_2, v_{11}, v_{12}$ в зависимости от начального значения величины радиус-вектора и элементов конечной орбиты, p, e и ω. Если

$$q_1 = 3 - 13s_2^2 + 12s_2^4; \;\; q_2 = 1 - 3s_2^2;$$
$$q_3 = 1 - 2s_2^2; \;\; q_4 = 3 - 5s_2^2, \qquad (29)$$

то из (27) и (28) можно получить, что

$$e\cos f_2 = \frac{q_1^2 - q_2 q_4^2}{q_2 q_4^2}; \;\; e\sin f_2 = \frac{6k_2 s_2 q_1 q_3}{q_2 q_4^2}. \qquad (30)$$

Исключая f_2 из этих выражений, получим уравнение для φ_2:

$$(q_1^2 - q_2 q_4^2)^2 + 36 k_2^2 s_2^2 q_1^2 q_3^2 - e^2 q_1^2 q_4^2 = 0. \qquad (31)$$

Тогда f_2 легко находится из (30) в форме

$$f_2 = f_2(e) = \mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{k_2 s_2 q_1 q_3}{q_1^2 - q_2 q_4^2}\right]. \qquad (32)$$

Полученные значения для φ_2 и f_2 позволяют определить n в виде

$$n = n(p, e) = \sqrt{\frac{p}{9\mu}\frac{q_2^2 q_4^2}{s_2^6 q_1^2}}. \qquad (33)$$

Подставляя (33) в первое уравнение (26), получим кубическое уравнение

$$(s_1^2)^3 + d_1 s_1^2 + d_2 = 0, \;\; d_1 = \frac{n^2 r_{si}}{3\mu}; \;\; d_2 = -\frac{n^2 r_{si}}{9\mu}.$$

Дискриминант $\frac{d_1^3}{27} + \frac{d_2^2}{4} > 0$, и поэтому есть один действительный корень:

$$s_1(p,e,r_{si}) = \sin^2\varphi_1 = 2\sqrt{\frac{d_1}{3}}\text{ctg}2\xi,$$

где

$$0 < \sin^2\varphi < \frac{1}{3};\;\; \text{tg}\xi = (\text{tg}\gamma)^{\frac{1}{3}};\;\; \text{ctg}2\gamma = \sqrt{\frac{9}{4}\frac{\mu}{n^2 r_{si}}}.$$

Второе и третье условия в (26) могут быть использованы для вычисления v_{11} и v_{12}:

$$v_{11} = n(p,e)L_2(p,e,r_{si});\;\; v_{12} = n(p,e)L_3(p,e,r_{si}).$$

Постоянная θ_0 в (26) может быть определена из второго уравнения (28) в виде

$$\theta_0(p,e,\omega) = f_2 + \omega + 3\text{ctg}\varphi_2 + 4\varphi_2.$$

Из (31) и (32) видно, что конечный угол φ_2 определяется формой, т.е. эллиптичностью конечной орбиты, а величина n зависит от размера орбиты. Ориентация конечной орбиты не влияет на φ_1, φ_2 или n, а используется только для определения θ_0, θ_1, θ_2.

Выводы

В работе рассмотрена вариационная задача оптимизации траекторий движения центра масс КА в ньютоновском поле. При помощи условия Клебша определены классы активных участков, которые могут быть экстремальными или оптимальными. Получены два класса аналитических решений для экстремальных участков движения с постоянным удельным импульсом и переменной мощностью. Один из этих классов соответствует спиралям Лоудена. Показано, что эти классы не содержат сопряженных точек. На примере задачи перелета показано, что полученные экстремали могут быть использованы в задачах перелета с заданного положения на заданную орбиту и ухода с эллиптической орбиты. Представленный в работе метод решения вариационной задачи может служит инструментом выделения опорных траекторий для задачи наведения.

Библиографический список

1. *Разыграев А.П.* Основы управления полетом космических аппаратов и кораблей. — М.: Машиностроение, 1977.

2. *Lawden D.F.* Optimal trajectories for space navigation. —London: Butterworths, 1963. Pp. 55-99.

3. *Azizov A.G., Korshunova N.A.* On an analytical solution of the optimum trajectory problem in a gravitation field // Celest. Mech., 1986. V.38. N.4. Pp. 297-306.

4. *Азимов Д.М.* Обзор работ по исследованию активных участков в гравитационных полях //Автоматика и телемеханика. 2005. Вып. 11. С. 14-34.

5. *Azimov D.M.* New classes for intermediate-thrust arcs of flight trajectories in a Newtonian field //AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics. 2000. V.23. N.1. Pp. 142-145.

6. *Белецкий В.В., Егоров В.А., Ершов М.Г.* Анализ траекторий межпланетных полетов с двигателями постоянной мощности //Космические исследования. 1964. Т.3. Вып.4. С. 507-522.

7. *Kelly H.J.* A transformation approach to singular sub-arcs in optimal trajectory and control problems // SIAM J. Control. 1964. V.2. N.2. Pp. 234-240.

8. *Копп Р.Е., Мойер Г.* Необходимые условия оптимальности особых экстремалей //Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т.3. Вып.8. С. 81-94.

9. *Иванов Н.М., Лысенко Л.Н.* Баллистика и навигация космических аппаратов. — М.: Дрофа, 2004.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 22.02.2009